Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Толстоногов, О минимуме в вариационных эллиптических задачах без предположений выпуклости, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 130–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1034>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:42:05

УДК 517.97

О МИНИМУМЕ В ВАРИАЦИОННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ БЕЗ ПРЕДПОЛОЖЕНИЙ ВЫПУКЛОСТИ

Д. А. Толстоногов

Доказывается абстрактная теорема существования минимума функционала вида

$$G(y) + \int_{\Omega} h(x, u(x)) dx$$

при ограничениях типа неравенств, где отображение $G(y)$ вогнуто, а функция $h(x, u)$ не является выпуклой по u , на решениях систем, описываемых линейными эллиптическими операторами. На примерах дается конкретизация этой теоремы для задач вариационного исчисления и оптимального управления.

Библиография: 18 названий.

Введение. Вопросы существования решений в задачах вариационного исчисления и оптимального управления, как правило, после их переформулировки в абстрактной форме сводятся к существованию минимума у полунепрерывного снизу в слабой топологии функционала на слабо компактном множестве соответствующего функционального пространства. Такой подход обычно называют прямым. Кроме соответствующих условий роста достаточным условием полунепрерывности снизу в слабой топологии интегрального функционала в подходящем функциональном пространстве является выпуклость подынтегральной функции по соответствующей переменной. В сложившейся терминологии такие подынтегральные функции называют *выпуклыми интегрантами* [1]. Недавно было доказано [2], что для интегральных функционалов в пространстве со сходимостью выпуклость их интегрантов является и необходимым условием полунепрерывности снизу.

При изучении вопросов существования минимума у интегральных функционалов с невыпуклыми интегрантами в последние годы интенсивно развивается метод, основанный на применении теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости множества значений неатомической меры. В этом подходе функционал имеет вид

$$\int_{\Omega} g(x, y(x)) dx + \int_{\Omega} h(x, u(x)) dx, \quad (1)$$

где $g(x, y)$ вогнута по y , а $h(x, u)$ не является выпуклой по u . Основополагающей в этом направлении является работа [3], где рассмотрена классическая задача вариационного

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 96-01-00326.

исчисления с функционалом вида (1), $\Omega = [0, T]$, при связях, описываемых линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями в конечномерном пространстве, и граничных условиях. В дальнейшем идеи этой работы использовались для доказательства существования решений при соответствующих предположениях в задачах оптимального управления с функционалом вида (1) и с динамикой, описываемой линейными и нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями в конечномерном пространстве в [4]–[7]. Среди результатов этого типа следует отметить и ранние работы [8], [9]. Классические вариационные задачи с функционалом вида (1), зависящим от градиента и лапласиана, при тех или иных предположениях рассматривались в [10]–[13].

В работе [14] развивается другой подход, основанный на использовании мер Юнга, при исследовании линейных управляемых систем с функционалами вида (1), где g и h квазивогнуты.

В настоящей работе доказывается абстрактная теорема существования минимума функционала вида (1) на решениях систем, описываемых линейными эллиптическими операторами. На примерах дается конкретизация этой теоремы для задач вариационного исчисления и оптимального управления.

1. Постановка задачи. Пусть Σ – открытое или замкнутое ограниченное множество с конечной, неотрицательной, неатомической мерой Радона μ . В приложениях в дальнейшем под (Σ, μ) мы будем понимать либо ограниченную открытую область Ω с n -мерной мерой Лебега, либо ее границу $\partial\Omega$ с $(n - 1)$ -мерной мерой Лебега.

Пусть V – гильбертово пространство и $a(y, \varphi)$ – непрерывная билинейная форма на $V \times V$. Тогда существует элемент $Ay \in V'$ такой, что $a(y, \varphi) = \langle Ay, \varphi \rangle$ для всех $y, \varphi \in V$, где $A \in \mathcal{L}(V, V')$. Через $\mathcal{L}$ мы обозначаем соответствующие пространства непрерывных линейных операторов.

Пусть W_1, W_2 – банаховы пространства и $L_1 \in \mathcal{L}(V, W_1)$, $L_2 \in \mathcal{L}(V, W_2)$. Пусть на W_1 и $U = L_2(\Sigma)^k$ заданы (не обязательно выпуклые) функционалы $G: W_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $H: U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Рассмотрим измеримое многозначное отображение $\Gamma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$ с непустыми замкнутыми (не обязательно выпуклыми) значениями. Обозначим через S_Γ совокупность всех измеримых селекторов многозначного отображения Γ .

Рассмотрим задачу

$$\min_{\substack{u \in U \cap S_\Gamma \\ y \in V}} G(L_1 y) + H(u) \quad (2)$$

при условиях

$$Ay = \psi + Bu, \quad y \in V, \quad \psi \in V', \quad (3)$$

$$F(L_2 y) \leq \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^l, \quad \Phi(u) \leq \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}^m, \quad (4)$$

где $B \in \mathcal{L}(U, V')$, ψ – фиксированный элемент из V' , $F: W_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, а неравенства (4) понимаются покоординатно.

Всюду в дальнейшем предполагаем, что непрерывная билинейная форма $a(y, \varphi)$ коэрцитивна, т.е.

$$a(y, y) \geq \alpha \|y\|_V^2, \quad \alpha > 0, \quad y \in V, \quad (5)$$

операторы L_1 и L_2 компактны, $F: W_2 \rightarrow \mathbb{R}^l$ непрерывна и ее компоненты являются вогнутыми функциями, $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ слабо полунепрерывна снизу и ее компоненты являются вогнутыми функциями. Отображения F и Φ будем называть *вогнутыми*.

Кроме того, пусть выполнены следующие предположения:

А) имеет место представление

$$H(u) = \int_{\Sigma} h(x, u(x)) d\mu,$$

где $h: \Sigma \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ – функция типа Каратеодори, почти всюду удовлетворяющая неравенству

$$h(x, u) \geq \eta_1 |u|^2 - \eta_2(x), \quad \eta_1 > 0, \quad \eta_2(x) \geq 0, \quad \eta_2 \in L_1(\Sigma); \quad (6)$$

Б) $G: W_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ – вогнутая функция, удовлетворяющая неравенству

$$G(w) \geq -\gamma_1 |w|_{W_1}^2 - \gamma_2, \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 \geq 0. \quad (7)$$

Из А) следует, что для любого $u \in U$ функция $h(x, u(x))$ измерима и ее неположительная часть интегрируема. Поэтому

$$\int_{\Sigma} h(x, u(x)) d\mu$$

либо конечен, либо равен $+\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теории управления пространство U называют *пространством управлений*, V – *пространством состояний*, а W_1 и W_2 – *пространствами наблюдений* [15].

2. Релаксационная задача. Приведем ряд вспомогательных утверждений. При этом мы будем использовать результаты [1], которые были доказаны для случая, когда Σ – открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега. Отметим, что все результаты остаются справедливыми в нашем случае.

Рассмотрим функцию

$$h_{\Gamma}(x, u) = \begin{cases} h(x, u), & \text{если } u \in \Gamma(x), \\ +\infty, & \text{если } u \notin \Gamma(x). \end{cases}$$

Обозначим через $h_{\Gamma}^{**}(x, u)$ вторую сопряженную к $h_{\Gamma}(x, u)$ функцию [1].

ЛЕММА 1 [1]. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $h_{\Gamma}^{**}(x, \cdot)$ – наибольшая выпуклая функция, не превышающая $h_{\Gamma}(x, \cdot)$, т.е. почти всюду для любых x

$$h_{\Gamma}^{**}(x, u) \leq h_{\Gamma}(x, u);$$

- 2) при выполнении условий роста (6)

$$h_{\Gamma}^{**}(x, u) = \min \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i h_{\Gamma}(x, \xi_i), \quad u = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i \xi_i : \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \right\};$$

- 3) для измеримой функции $u(\cdot)$ существуют измеримые функции $p_i: \Omega \rightarrow [0, 1]$, $v_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, k+1$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) = 1, \quad u(x) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) v_i(x), \quad h_{\Gamma}^{**}(x, u(x)) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) f(x, v_i(x)).$$

Из свойств функции $h(x, u)$ и отображения Γ следует, что для любого $u \in U$ функция $h_{\Gamma}(x, u)$ измерима. Следовательно, $h_{\Gamma}^{**}(x, u)$ является нормальным интегралом [1] и почти всюду для любых u

$$h_{\Gamma}^{**}(x, u) \geq \eta_1 \|u\|^2 - \eta_2(x). \quad (8)$$

ЛЕММА 2 (лемма Лакса–Мильграма). Пусть билинейная непрерывная форма $a(y, \varphi)$ коэрцитивна. Тогда для заданного $f \in V'$ существует единственный элемент $y \in V$, для которого $a(y, \varphi) = \langle f, \varphi \rangle$, $\varphi \in V$.

Отсюда следует, что для заданного $f \in V'$ существует единственный элемент $y \in V$ такой, что $Ay = f$.

Рассмотрим вспомогательную задачу, обычно называемую *релаксационной* [1]:

$$\min_{\substack{u \in U \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}^{**}(u) \quad (9)$$

при ограничениях (3), (4), где

$$H_{\Gamma}^{**}(u) = \int_{\Sigma} h_{\Gamma}^{**}(x, u(x)) \, dx.$$

Элемент (u, y) , $u \in U$, $y \in V$, будем называть *допустимым*, если он удовлетворяет (3), (4). Из неравенств (7), (8) следует, что

$$-\infty < G(L_1 y) + H_{\Gamma}^{**}(u) \leq +\infty.$$

Поэтому для того чтобы задача (9) имела нетривиальное решение, мы должны предположить, что

В) существует допустимый элемент $(u_{\text{доп}}, y_{\text{доп}})$ такой, что

$$G(L_1 y_{\text{доп}}) + H_{\Gamma}^{**}(u_{\text{доп}}) < +\infty.$$

В противном случае любой допустимый элемент является решением задачи (9).

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены предположения А)–В) и

$$\eta_1 - \frac{2\gamma_1 \|L_1\|^2 \|B\|^2}{\alpha^2} > 0. \quad (10)$$

Тогда релаксационная задача (9) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия В) следует, что

$$\inf_{\substack{u \in U \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}^{**}(u) < +\infty.$$

Поэтому найдется число $M > 0$ и последовательность (u_n, y_n) , $n \geq 1$, допустимых элементов такие, что

$$\inf_{\substack{u \in U \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}^{**}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G(L_1 y_n) + H_{\Gamma}^{**}(u_n)) < +\infty,$$

$$G(L_1 y_n) + H_{\Gamma}^{**}(u_n) \leq M, \quad n \geq 1.$$

Из (7), (8) получим

$$-\gamma_1 \|L_1\|^2 \|y_n\|^2 - \gamma_2 + \eta_1 \|u_n\|^2 - \int_{\Omega} \eta_2(x) dx \leq M. \quad (11)$$

Пусть $z \in V$ таков, что

$$a(z, \varphi) = \langle Az, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in V$$

(существование такого z обеспечивается леммой 2). Тогда, используя (3), (5), получим

$$\alpha \|y_n\|^2 \leq \|A\| \|z\| \|y_n\| + \|B\| \|u_n\| \|y_n\|$$

или $\alpha \|y_n\| \leq \|A\| \|z\| + \|B\| \|u_n\|$. Следовательно,

$$\|y_n\|^2 \leq \frac{2}{\alpha^2} (\|A\|^2 \|z\|^2 + \|B\|^2 \|u_n\|^2). \quad (12)$$

Из (10), (11), (12) получаем

$$\|u_n\|^2 \leq \frac{\alpha^2 (M + \gamma_2 + \|\eta_2\|_{L_1(\Omega)}) + 2\gamma_1 \|A\|^2 \|L_1\|^2 \|z\|^2}{\alpha^2 \eta_1 - 2\gamma_1 \|L_1\|^2 \|B\|^2}. \quad (13)$$

Из (13) следует, что последовательность $u_n \in U$, $n \geq 1$, ограничена. Аналогично, согласно (12) последовательность $y_n \in V$, $n \geq 1$, ограничена в V . Так как U и V рефлексивны, то можно выбрать подпоследовательности u_{n_j}, y_{n_j} , $j \geq 1$, последовательностей u_n, y_n , $n \geq 1$, слабо сходящиеся к некоторым u_0, y_0 соответственно. Не ограничивая общности, будем считать, что сами последовательности u_n, y_n , $n \geq 1$, слабо сходятся к u_0, y_0 . Тогда из свойств операторов A, B, L_2 и отображений F, Φ следует, что соотношения (3), (4) выполняются для u_0, y_0 .

Покажем, что функционал $G(L_1 y)$ является непрерывным и вогнутым отображением из U в $\mathbb{R}$. Вогнутость $G(L_1 y)$ очевидна. Из условий А)–В) следует, что на некотором допустимом элементе $(u_{\text{доп}}, y_{\text{доп}})$

$$-\infty < -G(L_1 y_{\text{доп}}) \quad \text{и} \quad -G(L_1 y) \leq \gamma_1 \|L_1\|^2 \|y\|_V^2 + \gamma_2$$

для любых $y \in V$. Тогда из [1, предложение 2.5, с. 21]) следует, что $-G(L_1 y)$ является непрерывной функцией из V в $\mathbb{R}$. Следовательно, таковой является и функция $G(L_1 y)$.

Так как оператор A имеет непрерывный обратный $A^{-1}: V' \rightarrow V$, выполнено $y_n = A^{-1}(f + Bu_n)$. Поэтому из слабой сходимости u_n к u_0 следует слабая сходимость y_n к y_0 . Так как оператор L_1 компактен, переходя к подпоследовательности (u_{n_j}, y_{n_j}) , получим

$$G(L_1 y_0) + \lim_{j \rightarrow \infty} H_{\Gamma}^{**}(u_{n_j}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (G(L_1 y_n) + H_{\Gamma}^{**}(u_n)). \quad (14)$$

Воспользовавшись (8), свойствами функции $h_{\Gamma}^{**}(x, u)$ и теоремой 2.1 из [1, с. 242], получаем

$$H_{\Gamma}^{**}(u_0) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} H_{\Gamma}^{**}(u_{n_j}). \quad (15)$$

Из (14), (15) следует, что

$$G(L_1 y_0) + H_{\Gamma}^{**}(u_0) = \inf_{\substack{u \in U \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}^{**}(u).$$

Теорема доказана.

3. Основной результат. Как и в релаксационной задаче, для того чтобы задача (2) имела нетривиальное решение, мы должны предположить, что

Γ) существует допустимый элемент $(u_{\text{доп}}, y_{\text{доп}})$ такой, что

$$G(L_1 y_{\text{доп}}) + H(u_{\text{доп}}) < +\infty.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены предположения А), Б), Г) и неравенство (10). Тогда задача (2) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из А), Б), Г) следует, что для некоторого допустимого элемента $(u_{\text{доп}}, y_{\text{доп}})$ задачи (2) будет иметь место неравенство

$$H(u_{\text{доп}}) < +\infty, \quad u_{\text{доп}} \in S_{\Gamma}.$$

Поэтому $h_{\Gamma}(x, u_{\text{доп}}(x)) = h(x, u_{\text{доп}}(x))$ почти всюду. Тогда в силу (8)

$$G(L_1 y_{\text{доп}}) + H_{\Gamma}^{**}(u_{\text{доп}}) \leq G(L_1 y_{\text{доп}}) + H(u_{\text{доп}}) < +\infty.$$

Следовательно, для задачи (9) будет существовать оптимальное решение (u_0, y_0) .

Пусть

$$H_{\Gamma}(u) = \int_{\Sigma} h_{\Gamma}(x, u(x)) \, d\mu.$$

Рассмотрим задачу

$$\min_{\substack{u \in U \cap S_{\Gamma} \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}(u)$$

при ограничениях (3), (4), которая эквивалентна исходной задаче (2). Поскольку

$$G(L_1 y_0) + H_{\Gamma}^{**}(u_0) \leq \inf_{\substack{u \in U \cap S_{\Gamma} \\ y \in V}} G(L_1 y) + H_{\Gamma}(u),$$

теорема будет доказана, если мы покажем, что существует допустимый элемент (u_*, y_*) такой, что

$$G(L_1 y_0) + H_{\Gamma}^{**}(u_0) = G(L_1 y_*) + H_{\Gamma}(u_*).$$

Так как

$$-\infty < \int_{\Sigma} h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) d\mu < +\infty,$$

функция $h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x))$ интегрируема и почти всюду

$$|h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x))| < \infty. \quad (16)$$

Воспользовавшись утверждением 3) леммы 1, получим, что существуют измеримые функции $p_i: \Sigma \rightarrow [0, 1]$, $v_i: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, k+1$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) = 1, \quad u_0(x) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) v_i(x), \quad (17)$$

$$h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) h_{\Gamma}(x, v_i(x)). \quad (18)$$

Из (16), (18) получаем, что функция $h_{\Gamma}(x, v_i(x))$ может принимать на множестве E положительной меры значение $+\infty$ только в том случае, если $p_i(x) = 0$ на этом множестве. Тогда, не меняя (17), (18), можно полагать, что $v_i(x) \in \Gamma(x)$ на множестве E . Если же $p_i(x) > 0$ на E , то $v_i(x) \in \Gamma(x)$, $i = 1, \dots, k+1$. Тогда согласно (18)

$$h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) = \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) h(x, v_i(x)) \quad (19)$$

и $u_0(x) \in \overline{\text{co}}\Gamma(x)$ при почти всех $x \in \Sigma$.

Согласно теореме Лузина [1] существует последовательность K_j , $j \geq 1$, компактных, попарно не пересекающихся множеств таких, что $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j) = \mu(\Sigma)$, и сужения $v_i(x)$, $h(x, v_i(x))$, $i = 1, \dots, k+1$, на K_j непрерывны. Рассмотрим измеримое многозначное отображение $\Gamma_1: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ с компактными значениями, определенное по правилу

$$\Gamma_1(x) = \bigcup_{i=1}^{k+1} h(x, v_i(x)).$$

Тогда почти всюду $h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) \in \text{co } \Gamma_1(x)$. Так как на каждом из множеств K_j многозначное отображение Γ_1 в силу непрерывности $h(x, v_i(x))$ на K_j интегрально ограничено, в соответствии с теоремой 1 из [16, с. 349]

$$\int_{K_j} \Gamma_1(x) d\mu = \int_{K_j} \text{co } \Gamma_1(x) d\mu.$$

Отсюда следует, что для каждого $j \geq 1$ существует разбиение K_j на попарно непересекающиеся измеримые множества K_j^i , $i = 1, \dots, k+1$, со свойством

$$\int_{K_j} h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) dx = \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) h(x, v_i(x)) dx = \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) h(x, v_i(x)) dx, \quad (20)$$

где $\chi_{K_j^i}(x)$ – характеристическая функция множества K_j^i .

Покажем, что для любого разбиения K_j^i множества K_j , для которого справедливо равенство (20), функция

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) h(x, v_i(x))$$

интегрируема. Как следствие из (6) получим, что функция

$$v(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) v_i(x)$$

интегрируема с квадратом.

Рассмотрим последовательность

$$s_n(x) = \sum_{j \leq n} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) (h(x, v_i(x)) + \eta_2(x)). \quad (21)$$

Согласно (6) последовательность $s_n(x)$ неотрицательна, монотонно не убывает и почти всюду сходится к $w(x) + \eta_2(x)$. Воспользовавшись (20), (21), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} s_n(x) dx &= \sum_{j \leq n} \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) (h(x, v_i(x)) + \eta_2(x)) dx \\ &= \sum_{j \leq n} \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} p_i(x) (h(x, v_i(x)) + \eta_2(x)) dx \\ &\leq \int_{\Sigma} (h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) + \eta_2(x)) dx < +\infty. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь из (22) и теоремы Фату [17, с. 542] вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Sigma} s_n(x) dx = \int_{\Sigma} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) dx = \int_{\Sigma} (w(x) + \eta_2(x)) dx < \infty.$$

Следовательно, функция $w(x)$ интегрируема.

При доказательстве теоремы 2 было установлено, что функционал $G(L_1 y)$ является непрерывным вогнутым отображением из V в $\mathbb{R}$. Тогда функционал $G_1(u) = G(L_1 A^{-1} \times (f + Bu))$, где A^{-1} – обратный к A оператор, является непрерывным вогнутым отображением из U в $\mathbb{R}$. Аналогично, $F_1: U \rightarrow \mathbb{R}^l$, $F_1(u) = F(L_2 A^{-1}(f + Bu))$ является непрерывным вогнутым отображением из U в $\mathbb{R}^l$.

Рассмотрим непрерывные выпуклые отображения $-G_1(u)$, $-F_1(u)$ и полунепрерывное снизу в слабой топологии пространства U выпуклое отображение $-\Phi(u)$ из U в $\mathbb{R}^m$. В соответствии с предложением 2.5 из [1, с. 21] отображение $-\Phi(u)$ будет непрерывным выпуклым отображением в слабой топологии пространства V . Согласно предложению 5.2 из [1, с. 31] отображения $-G_1(u)$, $-F_1(u)$ и $-\Phi(u)$ субдифференцируемы в

точке u_0 , т.е. существуют элементы $g' \in U' = L_2(\Sigma)$, $f' \in L_2(\Sigma)^l$, $\phi' \in L_2(\Sigma)^m$ такие, что

$$\int_{\Sigma} \langle g'(x), u(x) - u_0(x) \rangle d\mu \leq -G_1(u) + G_1(u_0), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle f'(x), u(x) - u_0(x) \rangle d\mu &\leq -F_1(u) + F_1(u_0), \\ \int_{\Sigma} \langle \phi'(x), u(x) - u_0(x) \rangle d\mu &\leq -\Phi(u) + \Phi(u_0) \end{aligned} \quad (24)$$

для всех $u \in U$. В (24) скалярные произведения и соответственно неравенства понимаются покомпонентно.

Введем пространство $X = \mathbb{R}^{l+m+2}$. Тогда на Σ определены измеримые функции $\gamma_i: \Sigma \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k+1$, с компонентами

$$\gamma_i(x) = \{ \langle f'(x), v_i(x) \rangle, \langle \phi'(x), v_i(x) \rangle, \langle g'(x), v_i(x) \rangle, h(x, v_i(x)) \}.$$

Рассмотрим измеримое многозначное отображение $\Gamma^* \rightarrow X$, $\Gamma^*(x) = \{ \bigcup_{i=1}^{k+1} \gamma_i(x) \}$, $x \in \Sigma$, с замкнутыми значениями. Тогда из (17), (19) следует, что функция

$$\gamma(x) = \{ \langle f'(x), u_0(x) \rangle, \langle \phi'(x), u_0(x) \rangle, \langle g'(x), u_0(x) \rangle, h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) \}$$

почти всюду удовлетворяет включению $\gamma(x) \in \text{co } \Gamma^*(x)$. На каждом из множеств K_j отображение $\text{co } \Gamma^*(x)$ интегрально ограничено. Тогда, используя свойства многозначного интеграла (см. [16, теорема 1, с. 349]), получаем, что для каждого K_j существует разбиение K_j^i , $i = 1, \dots, k+1$, такое, что

$$\begin{aligned} \int_{K_j} \langle f'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) \langle f'(x), v_i(x) \rangle d\mu, \\ \int_{K_j} \langle \phi'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) \langle \phi'(x), v_i(x) \rangle d\mu, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \int_{K_j} \langle g'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) \langle g'(x), v_i(x) \rangle d\mu, \\ \int_{K_j} h_{\Gamma}^{**}(x, u_0(x)) d\mu &= \int_{K_j} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) h(x, v_i(x)) d\mu. \end{aligned} \quad (26)$$

Определим измеримые функции

$$u_*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) v_i(x), \quad w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} \chi_{K_j^i}(x) h(x, v_i(x)).$$

Тогда $u_*(x) \in \Gamma(x)$ почти всюду. Из равенства (26), как было доказано выше, следует, что функции $|u_*(x)|^2$ и $w(x)$ интегрируемы. Тогда с учетом интегрируемости функций $|u_*(x)|^2$ и $h_\Gamma^*(x, u_0(x))$ из (25), (26) получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \langle f'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} \langle f'(x), u_*(x) \rangle d\mu, & \int_{\Sigma} \langle \phi'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} \langle \phi'(x), u_*(x) \rangle d\mu, \\ \int_{\Sigma} \langle g'(x), u_0(x) \rangle d\mu &= \int_{\Sigma} \langle g'(x), u_*(x) \rangle d\mu, \end{aligned} \quad (27)$$

$$H_\Gamma^{**}(u_0) = \int_{\Sigma} h(x, u_*(x)) d\mu = H(u_*). \quad (28)$$

Обозначим через $y_* \in V$ элемент $y_* = A^{-1}(f + Bu_*)$. Тогда

$$Ay_* = f + Bu_*. \quad (29)$$

Воспользовавшись (23), (24) и (27), получаем

$$G(L_1 y_*) \leq G(L_1 y_0), \quad (30)$$

$$F(L_2 y_*) \leq F(L_2 y_0) \leq \delta, \quad \Phi(u_*) \leq \Phi(u_0) \leq \beta. \quad (31)$$

Из (28), (30) следует, что

$$G(L_1 y_*) + H(u_*) = G(L_1 y_*) + H_\Gamma^{**}(u_0) \leq G(L_1 y_0) + H_\Gamma^{**}(u_0). \quad (32)$$

Поскольку $u_*(x) \in \Gamma(x)$, то

$$h_\Gamma^{**}(x, u_*(x)) \leq h_\Gamma(x, u_*(x)) = h(x, u_*(x)).$$

Поэтому, воспользовавшись (32), получим

$$G(L_1 y_*) + H_\Gamma^{**}(u_*) \leq G(L_1 y_*) + H(u_*) \leq G(L_1 y_0) + H_\Gamma^{**}(u_0). \quad (33)$$

Так как (u_0, y_0) – решение задачи (9), из (29), (31), (33) следует, что

$$G(L_1 y_*) + H(u_*) = G(L_1 y_0) + H_\Gamma^{**}(u_0).$$

Тем самым, (u_*, y_*) является решением задачи (2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При доказательстве интегрируемости функции $w(x)$ использовались идеи работы [3].

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При доказательстве теоремы мы не использовали в явном виде теорему Ляпунова о выпуклости значений векторной меры. Однако, она заложена в свойствах многозначного интеграла, которые мы использовали.

4. Примеры. Пусть Ω – открытая ограниченная область из $\mathbb{R}^n$ с мерой Лебега dx и кусочно-лишней границей, $g: \Omega \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ – функция типа Каратеодори и

Д) $g(x, z)$ при почти всех x вогнута по z и

$$g(x, z) \geq -\gamma_1 |z|^2 - \gamma_2(x), \quad \gamma_1 > 0, \quad \gamma_2 \in L_2(\Omega), \quad \gamma_2(x) \geq 0. \quad (34)$$

Из [1, следствие 2.3, с. 22] следует, что $g(x, z)$ при почти всех x непрерывна по z . Определим на $L_2(\Omega)^N = W_1$ функционал

$$G(z) = \int_{\Omega} g(x, z(x)) dx.$$

Из (34) следует, что $G: W_1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условию Б).

Рассмотрим на некотором пространстве $V \times V$ непрерывную билинейную форму

$$a(y, \varphi) = \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} a_0 y \varphi dx,$$

где

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2 \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ почти всюду в } \Omega, \quad (35)$$

$$a_{ij}, a_0 \in L^{\infty}, \quad a_0(x) \geq \alpha > 0 \quad \text{почти всюду в } \Omega.$$

Определим формальный линейный эллиптический оператор A второго порядка:

$$Ay = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_j} \right) + a_0 y. \quad (36)$$

ПРИМЕР 1 (граничное управление системой, описываемой задачей Неймана). Пусть $V = H^1(\Omega)$, $V' = H^{-1}(\Omega)$, $U = L_2(\Sigma)$, где Σ – граница множества Ω с $(n-1)$ -й мерой Лебега $d\sigma$.

Пусть $g: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\Gamma: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримое многозначное отображение с замкнутыми значениями, $F: L_2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^l$ и $\Phi: L_2(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}^m$ – отображения со свойствами, указанными в п. 1, оператор $B \in \mathcal{L}(L_2(\Sigma), H^{-1}(\Omega))$ определен по формуле

$$\langle Bu, \varphi \rangle = \int_{\Sigma} u \varphi d\sigma,$$

$L_1 = L_2$ – операторы вложения V в $L_2(\Omega)$.

Рассмотрим задачу

$$\min_{\substack{u \in L_2(\Sigma) \cap S_{\Gamma} \\ y \in L_2(\Omega)}} \int_{\Omega} g(x, L_1 y(x)) dx + \int_{\Sigma} h(s, u(s)) d\sigma \quad (37)$$

при ограничениях

$$a(y, \varphi) = \langle \psi, \varphi \rangle + \langle Bu, \varphi \rangle, \quad \varphi \in H^1(\Omega), \quad (38)$$

$$F(L_2 y) \leq \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^l, \quad \Phi(u) \leq \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}^m. \quad (39)$$

Уравнение (38) представляет собой задачу Неймана

$$Ay = \psi_1, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial y}{\partial \nu_A} = \psi_2 + u, \quad x \in \Sigma,$$

где $u \in U$ – управление, y – состояние, A – оператор вида (36), ψ_1 и ψ_2 – заданные элементы $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Sigma)$ соответственно, $\partial y / \partial \nu_A$ – производная по направлению внешней нормали к границе области Ω ,

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{\Omega} \psi_1 \varphi \, dx + \int_{\Sigma} \psi_2 \varphi \, d\sigma.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия А), Д), (10) и для задачи (37) существует допустимый элемент. Тогда задача (37) с условиями (38), (39) имеет решение.

Результат вытекает из теоремы 2 и компактности вложения V в $L_2(\Omega)$, поскольку (38) определяет операторное уравнение $Ay = \psi + Bu$.

ПРИМЕР 2 (классическая задача вариационного исчисления без предположений выпуклости). Пусть Ω – ограниченная открытая область с границей класса C^2 , $V = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\min_{\substack{y \in V \\ Ay \in L_2(\Omega) \cap S_{\Gamma}}} \int_{\Omega} g\left(x, y(x), \frac{\partial y}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}(x)\right) dx + \int_{\Omega} h(x, Ay(x)) \, dx \quad (40)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{\Omega} f\left(x, y(x), \frac{\partial y}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}(x)\right) dx \leq \delta, \quad \delta \in \mathbb{R}^l, \\ \Phi(y) &= \int_{\Omega} \langle \phi(x), Ay(x) \rangle \, dx \leq \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

Здесь производные понимаются в обобщенном смысле, $g: \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Д), $h: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию А), $\Gamma: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримое многозначное отображение с замкнутыми значениями, $f: \Omega \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^l$ – отображение типа Каратеодори, компоненты которого при почти всех x вогнуты и удовлетворяют условиям роста

$$f_i(x, z) \geq -\mu_i(x)|z|^2 - \nu_i(x), \quad i = 1, \dots, l, \quad (41)$$

где $\mu_i(x) \geq 0$, $\nu_i(x) \geq 0$, $\mu_i \in L_{\infty}(\Omega)$, $\nu_i \in L_1(\Omega)$, $\phi \in L_2(\Omega)^m$, A – эллиптический оператор вида (36) с коэффициентами, удовлетворяющими (35), и, кроме того, a_{ij} равномерно липшицевы в Ω .

Обозначим через $L_1: V \rightarrow L_2(\Omega)^{n+1}$ компактный оператор, определенный по правилу

$$L_1: y \mapsto L_1 y = \left\{ y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия А), Д), (41), (10), где $B = I$ – тождественный оператор, и существует допустимый элемент. Тогда классическая задача вариационного исчисления (40) имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (41) и существования допустимого элемента с помощью рассуждений, проведенных в теореме 1 для доказательства непрерывности отображения $G(L_1y)$, получаем, что $F_i(y)$, $i = 1, \dots, l$, являются вогнутыми непрерывными отображениями из $L_2(\Omega)^{n+1}$ в $\mathbb{R}$, а условие $\phi \in L_2(\Omega)^m$ означает, что

$$\int_{\Omega} \langle \phi(x), Ay(x) \rangle dx$$

– система непрерывных линейных функционалов на $L_2(\Omega)$. Теперь результат следует из теоремы 2, если учесть, что в силу теоремы о регулярности решения [18] обобщенная задача Дирихле

$$Ay = u, \quad y \in H_0^1(\Omega), \quad u \in L_2(\Omega),$$

имеет единственное решение в классе V .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
- [2] Сычев М. А. Необходимые и достаточные условия в теоремах полунепрерывности и сходимости с функционалом // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 77–108.
- [3] Cellina A., Colombo G. On a classical problem of the calculus of variations without convexity assumptions // Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire. 1990. V. 7. № 2. P. 97–106.
- [4] Raymond J. P. Existence theorems in optimal control problems without convexity assumptions // J. Optim. Theory Appl. 1990. V. 67. P. 109–132.
- [5] Mariconda C. A generalization of the Cellina–Colombo theorem for a class of nonconvex variational problems // J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 1975. P. 514–522.
- [6] Colombo G., Goncharov V. V. Existence for a nonconvex optimal control problem with nonlinear dynamics // Nonlinear Anal. 1995. V. 24. № 6. P. 795–800.
- [7] Colombo G., Goncharov V. V. On a class of nonconvex and nonlinear optimal control problems // NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 1996. V. 3. P. 115–126.
- [8] Olech C. Integrals of set-valued functions and linear optimal control problems // Colloque sur la Théorie Mathématique du Contrôle Optimal. Louvain: CBRM, Vander, 1970. P. 109–125.
- [9] Chesari L. Optimization Theory and Applications. New York: Springer, 1983.
- [10] Cellina A. On minima of a functional of the gradient: sufficient conditions // Nonlinear Anal. 1993. V. 20. P. 343–347.
- [11] Cellina A., Perrotta S. On minima of radially symmetric functionals of the gradient // Nonlinear Anal. 1994. V. 23. P. 239–249.
- [12] Flores F. On Radial Solutions to Non-Convex Variational Problems. Preprint SISSA, 1991. Ref. 127/M.
- [13] Cellina A. Minimizing a Functional Depending on ∇u and on u . Preprint SISSA, 1995. Ref. 41/95/M.
- [14] Balder E. New existence results for optimal control in the absence of convexity: the importance of extremality // SIAM J. Control Optim. 1994. V. 32. № 3. P. 890–916.
- [15] Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
- [16] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [17] Шварц Л. Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
- [18] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.