Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Р. Забирова, В. В. Напалков, Об операторах композиции свертки и умножения на функцию, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 350–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10342>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:36:04

Об операторах композиции свертки и умножения на функцию

К. Р. Забирова, В. В. Напалков

Изучается оператор, являющийся композицией оператора свертки и оператора умножения на фиксированную целую функцию. Такие операторы находят применение в задаче разложения Фишера, задаче Коши для операторов свертки и др.

Библиография: 14 названий.

1. О некоторых свойствах оператора Данкла. Пусть $H(\mathbb{C})$ – пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах. Обозначим через $H^*(\mathbb{C})$ сопряженное к $H(\mathbb{C})$ пространство с сильной топологией, через $P_{\mathbb{C}}$ – пространство целых функций экспоненциального типа, а через $P_{\mathbb{C}}^*$ – сопряженное пространство к $P_{\mathbb{C}}$. В пространстве $P_{\mathbb{C}}$ введем топологию индуктивного предела нормированных пространств B_n , где

$$B_n = \left\{ \beta \in H(\mathbb{C}) : \|\beta\|_n = \sup_{z \in \mathbb{C}} |\beta(z)| e^{-n|z|} < \infty \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В этой топологии последовательность $\varphi_k \in P_{\mathbb{C}}$ сходится к нулю, если выполняются следующие условия: существуют $B_1, B_2 > 0$ такие, что $|\varphi_k(z)| < B_1 e^{B_2|z|}$ и $\varphi_k(z) \rightarrow 0$ равномерно на компактах плоскости $\mathbb{C}$ (см. [1]).

Рассмотрим оператор Данкла в $H(\mathbb{C})$

$$\Lambda[f(z)] = f'(z) + \frac{\alpha}{z}(f(z) - f(-z)), \quad \alpha > 0. \quad (1.1)$$

Оператор был введен Данклом в работе [2]. Этот оператор играет важную роль в задачах математической физики. Так, например, эти операторы в многомерном случае находят применение в квантовой задаче Калоджеро–Мозера–Сазерленда (см., например, [3], [4]). Большой интерес вызывает изучение и одномерных операторов Данкла. В настоящее время появляется все больше работ (см., например, [5]–[7]), в которых развивается гармонический анализ, связанный с одномерным оператором Данкла, оператором свертки Данкла, преобразованием Данкла.

В случае $\alpha = 0$ в (1.1) получаем оператор дифференцирования. В этом случае в работе [8] изучен оператор композиции свертки и умножения на функцию и решена задача Валле Пуссена.

Собственной функцией оператора Данкля, соответствующей собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, является функция $y_\lambda(z) \equiv y(\lambda z)$, где

$$y(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{p(1)p(2) \cdots p(k)} \quad (1.2)$$

и $p(k) = k + \alpha(1 - e^{i\pi k})$ (см. [5], [9]). В работе [7] показано, что функция имеет порядок $\rho = 1$ и тип $\sigma = 1$. Рассмотрим произведение $p(1)p(2) \cdots p(l)$. В зависимости от четности l , нетрудно получить следующую оценку для произведения

$$l! < p(1)p(2) \cdots p(l) < l!(1 + 2\alpha)^l. \quad (1.3)$$

Из представления собственной функции (1.2) и оценки (1.3) вытекает

$$e^{B_2|z|/(1+2\alpha)} < y(B_2|z|) < e^{B_2|z|} \quad \text{для всех } k. \quad (1.4)$$

Если $|\varphi_k(z)| < B_1 e^{B_2|z|}$, то $|\varphi_k(z)| < B_1 y(\overline{B_2}|z|)$ согласно оценке (1.4). Следовательно, условие сходимости можно записать в следующем виде. Последовательность $\varphi_k \in P_{\mathbb{C}}$ сходится к нулю, если выполняются следующие условия: существуют $B_1, B_2 > 0$ такие, что $|\varphi_k(z)| < B_1 y(B_2|z|)$ и $\varphi_k(z) \rightarrow 0$ равномерно на компактах плоскости $\mathbb{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть N – множество в $\mathbb{C}$, произвольная последовательность $\varphi_k \in L$, где L – подпространство $P_{\mathbb{C}}$ с индуцированной из $P_{\mathbb{C}}$ топологией. Будем говорить, что множество N является секвенциально достаточным в L , если из условий:

$$1) \text{ существуют } B_1, B_2 > 0: |\varphi_k(z)| < B_1 y(B_2|z|), z \in N, \text{ для всех } k \in \mathbb{N}; \quad (1.5)$$

$$2) \quad |\varphi_k(z)| \rightarrow 0 \text{ равномерно на любом компакте из } N, \quad (1.6)$$

вытекает сходимость последовательности в L .

Исследуем асимптотическое поведение на бесконечности собственных функций.

ЛЕММА 1.1. Пусть $q(z), r(z)$ – целые функции, представимые рядами

$$q(z) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l z^l, \quad r(z) = \sum_{l=0}^{\infty} r_l z^l.$$

Если $r_l > 0$ и $q_l/r_l \rightarrow 0$, $x \in \mathbb{R}_+$ при $l \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x)r^{-1}(x) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы очевидно выполняется, если $q(x)$ полином. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x)r^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sum_{l=1}^n q_l x^l \right) r^{-1}(x) + \left(\sum_{l=n+1}^{\infty} q_l x^l \right) r^{-1}(x).$$

При любом фиксированном n предел при $x \rightarrow \infty$ первого слагаемого равен 0. Модуль второго слагаемого оценивается величиной

$$\sup_{l \geq n+1} \left(\left| \frac{q_l}{r_l} \right| \right) \left(\sum_{l=n+1}^{\infty} r_l x^l \right) r^{-1}(x) \leq \sup_{l \geq n+1} \left(\left| \frac{q_l}{r_l} \right| \right).$$

При больших n эта величина произвольно мала. Это влечет утверждение леммы.

ЛЕММА 1.2. Пусть функция $y(x)$ определена (1.2), $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq m < n$. Тогда выполняется следующее предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m y^{(m)}(x)}{x^n y^{(n)}(x)} = 0. \quad (1.7)$$

Если $\lambda_{k+1} > \lambda_k > 0$, то при любых целых неотрицательных n, m выполняется

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m y^{(m)}(\lambda_k x)}{x^n y^{(n)}(\lambda_{k+1} x)} = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$x^m y^{(m)}(x) = \sum_{l=m}^{\infty} \frac{l(l-1) \cdots (l-m+1)}{p(1)p(2) \cdots p(l)} x^l.$$

Из леммы 1.1 при $m < n$ сразу получаем соотношение (1.7). Из него получаем, что соотношение (1.8) достаточно доказать при $n = 0$. Кроме того, достаточно полагать, что $\lambda_k = 1$, $\lambda_{k+1} := a > 1$ (иначе проведем замену переменной $\lambda_k x = t$). Но при таких предположениях для доказательства соотношения (1.8) достаточно применить лемму 1.1 для случая

$$\frac{q_l}{r_l} = \frac{l(l-1) \cdots (l-m+1)}{a^l}.$$

Ясно, что в этом случае $q_l r_l^{-1} \rightarrow 0$ при любом $a > 1$. Лемма установлена.

Преобразованием Данкла функционала $F \in H^*(\mathbb{C})$ будем называть действие функционала F на собственную функцию $y(\lambda z)$

$$\varphi(\lambda) = \hat{F}(\lambda) = (F, y(\lambda z)).$$

Оператором сдвига Данкла по переменной t в пространстве $H(\mathbb{C})$ называют следующий оператор:

$$S_t[f(z)] = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda^k[f(z)] \frac{t^k}{p(1)p(2) \cdots p(k)}, \quad f(z) \in H(\mathbb{C}).$$

Оператор свертки Данкла получается при действии функционала $F \in H^*(\mathbb{C})$ на сдвиг Данкла

$$M_\varphi[f(z)] = (F, S_t[f(z)]).$$

Эти операторы были введены в работе [5]. Также в этой работе было показано, что оператор M_φ , действующий из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, линейный, непрерывный и сюръективный. Если F определяет M_φ , то φ – характеристическая функция этого оператора.

Топологический изоморфизм пространств $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ доказан в [5], его устанавливает преобразование Данкла. Известно, что пространство $H^*(\mathbb{C})$ изоморфно пространству функции аналитических в бесконечно удаленной точке $H_0(\{\infty\})$ (см. [10]). Получили что, пространства $P_{\mathbb{C}}$ и $H_0(\{\infty\})$ топологически изоморфны. Значит, каждому функционалу F из $H^*(\mathbb{C})$ поставлена в соответствие функция γ_F

из $H_0(\{\infty\})$. И для каждой функции γ_F существует функционал F . Справедливо следующее интегральное представление для преобразования Данкла:

$$\widehat{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} y(\lambda w) \gamma_F(w) dw, \quad \widehat{F}(\lambda) \in P_{\mathbb{C}}, \quad (1.9)$$

где γ_F — ассоциированная по Борелю с функцией $\widehat{F}(\lambda)$, контур Υ спрямляемый и охватывает особенности γ_F .

2. Оператор композиции. Рассмотрим свойства оператора

$$M_{\varphi}[\psi \cdot f(z)] = (F, S_t[(\psi f)(z)]), \quad (2.1)$$

где ψ — фиксированная целая функция. Данный оператор для случая оператора Данкла изучается впервые. Оператор (2.1) линейно и непрерывно отображает пространство $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$. Он является композицией двух операторов: M_{φ} , действующего из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, и оператора умножения на функцию $\psi \in H(\mathbb{C})$. Обозначим этот оператор через $M_{\varphi} \circ \psi$. Рассмотрим задачу о том, при каких условиях на функции φ и ψ оператор (2.1) будет сюръективным. Для этого воспользуемся теоремой Дьедонне–Шварца [11]. Так как $H(\mathbb{C})$ — пространство Фреше, то справедливы следующие утверждения:

1) замкнутость $\text{Im } M_{\varphi}[\psi \cdot]$ в $H(\mathbb{C})$ эквивалентна замкнутости $\text{Im}\{M_{\varphi}[\psi \cdot]\}^*$ в $H^*(\mathbb{C})$;

2) инъективность $\{M_{\varphi}[\psi \cdot]\}^*$ эквивалентна всюду плотности $\text{Im } M_{\varphi}[\psi \cdot]$ в $H(\mathbb{C})$.

Сопряженный оператор $\{M_{\varphi}[\psi \cdot]\}^*$ действует из $H^*(\mathbb{C})$ в $H^*(\mathbb{C})$. Из топологического изоморфизма пространств $H^*(\mathbb{C})$ и $P_{\mathbb{C}}$ [5] следует, что оператору $\{M_{\varphi}[\psi \cdot]\}^*$ соответствует оператор, действующий из $P_{\mathbb{C}}$ в $P_{\mathbb{C}}$. Найдем его вид. Так как имеем $M_{\varphi}[\psi \cdot] = M_{\varphi} \circ \psi$, то сопряженный $\{M_{\varphi} \circ \psi\}^* = (\psi \cdot)^* \circ M_{\varphi}^*$.

ЛЕММА 2.1. *Сопряженным к оператору свертки Данкла M_{φ} является оператор M_{φ}^* , который реализуется, как оператор умножения на характеристическую функцию оператора M_{φ} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения сопряженного оператора получаем

$$(M_{\varphi}[f], L) = (f, M_{\varphi}^*[L]).$$

В силу полноты системы $\{y_{\lambda}(z), \lambda \in \mathbb{C}\}$ в $H(\mathbb{C})$ в качестве $f(z)$ возьмем $y(\lambda z)$. Тогда

$$M_{\varphi}[y(\lambda z)] = (F, S_t[y(\lambda z)]) = (F, y(\lambda z)y(\lambda t)) = \widehat{F}(\lambda)y(\lambda t).$$

Действие оператора свертки на функционал следующее:

$$(M_{\varphi}[y(\lambda z)], L) = (y(\lambda t)\widehat{F}(\lambda), L) = \widehat{F}(\lambda)\widehat{L}(\lambda).$$

Соотношение $(f, M_{\varphi}^*[L])$ запишем в другом виде

$$(y(\lambda z), M_{\varphi}^*[L]) = \widehat{M}_{\varphi}^*[L] = \widehat{F}(\lambda)\widehat{L}(\lambda).$$

Значит, $\widehat{M}_{\varphi}^*$ есть оператор умножения на характеристическую функцию $\widehat{F}(\lambda) = \varphi(\lambda)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. *Сопряженным к оператору умножения на ψ в $H(\mathbb{C})$ является обобщенный оператор свертки M_ψ в $P_{\mathbb{C}}$ следующего вида*

$$M_\psi[g(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \psi(w) y(\lambda w) \gamma_g(w) dw, \quad (2.2)$$

где γ_g – ассоциированная по Борелю с функцией $g(z)$, контур Υ спрямляемый и охватывает особенности функции γ_g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $H(\mathbb{C})$ введем операцию умножение на z

$$U(f) = f(z) \cdot z.$$

Учитывая полноту системы $\{y_\lambda(z), \lambda \in \mathbb{C}\}$ в $H(\mathbb{C})$, достаточно взять в качестве функции $f(z)$ собственную функцию оператора Данкла $y(\lambda z)$. Следовательно, имеем

$$(y(\lambda z) \cdot z, F) = (\Lambda[y(\lambda z)], F) = \Lambda[F, y(\lambda z)] = \Lambda[\widehat{F}(\lambda)].$$

Воспользуясь интегральным представлением $\widehat{F}(\lambda)$ (1.9), получаем следующее соотношение

$$\Lambda[\widehat{F}(\lambda)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \Lambda[y(\lambda w)] \gamma_F(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} w y(\lambda w) \gamma_F(w) dw.$$

Вместо z возьмем произвольный многочлен $P_k(z)$, получим

$$\begin{aligned} (P_k(z) \cdot y(\lambda z), F) &= (P_k \Lambda[y(\lambda z)], F) = P_k \Lambda[F, y(\lambda z)] = P_k \Lambda[\widehat{F}(\lambda)] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} P_k(w) y(\lambda w) \gamma_F(w) dw. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Рассмотрим функцию $\psi(z)$. В топологии $H(\mathbb{C})$ ее можно представить как предел частичных сумм $\psi(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k(z)$. В выражении (2.3) при переходе к пределу при $k \rightarrow \infty$ получим

$$(\psi(z) \cdot y(\lambda z), F) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \psi(w) y(\lambda w) \gamma_F(w) dw.$$

Следовательно, сопряженным к оператору умножения на ψ является оператор вида (2.2). Назовем его обобщенным оператором свертки M_ψ в $P_{\mathbb{C}}$. Лемма доказана.

Из леммы 2.1 и леммы 2.2 следует, что сопряженным к оператору $M_\varphi[\psi \cdot]$, действующему из $H(\mathbb{C})$ в $H(\mathbb{C})$, является обобщенный оператор свертки $M_\psi[\varphi \cdot]$, действующий из $P_{\mathbb{C}}$ в $P_{\mathbb{C}}$, вида

$$M_\psi[\varphi \cdot g(z)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Upsilon} \psi(w) y(\lambda w) \gamma(w) dw, \quad (2.4)$$

где контур Υ спрямляемый и охватывает особенности ассоциированной по Борелю функции γ с $\varphi \cdot g(z)$, $g(z) \in P_{\mathbb{C}}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция ψ из (2.4) имеет только положительные нули μ_k , $k = 1, 2, \dots$ кратности h_k . Любая последовательность положительных чисел $\{\lambda_i\}_1^\infty$, $\lambda_i \rightarrow \infty$ является секвенциально достаточной в ядре оператора M_ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через N_φ последовательность положительных чисел $\{\lambda_i\}_1^\infty$, $\lambda_i \rightarrow \infty$. Пронумеруем нули функции ψ в порядке возрастания, т.е. $\mu_{k+1} > \mu_k$. Покажем, что N_φ секвенциально достаточное множество в $\text{Ker } M_\psi$ (см. определение 1). Рассмотрим уравнение

$$M_\psi[g(z)] = 0. \quad (2.5)$$

В работе [12; теорема 3, 4] показано, что каждый нуль μ_k , $\mu_k \in \mathbb{R}_+$ функции ψ порождает h_k решений уравнения (2.5)

$$y(\mu_k z), \quad zy'(\mu_k z), \quad \dots, \quad z^{h_k-1}y^{(h_k-1)}(\mu_k z)$$

и что любое решение уравнения (2.5) в топологии $P_\mathbb{C}$ представляется в виде конечной линейной комбинации $z^l y^{(l)}(\mu_k z)$, $l = 0, 1, \dots, h_k - 1$. Всякое решение уравнения (2.5) принадлежит $P_\mathbb{C}$, поэтому имеет порядок 1 и конечный тип. Из этого вытекает, что решение определяется интегралом (2.2), в котором контур Υ спрямляемый, не пересекает нули ψ и особенности функции γ лежат компактно в ограниченной области Ω . Следовательно, всякое решение уравнения (2.5) порождается нулями, лежащими внутри Ω . Поэтому решение имеет конечное число слагаемых. В случае классического оператора свертки подобный результат получен в работе [13].

Пусть задана последовательность

$$r_m(z) = \sum_{k=1}^{p_m} \sum_{l=0}^{h_k-1} C_{kl}(m) z^l y^{(l)}(\mu_k z). \quad (2.6)$$

Предположим, что $r_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в точках $z \in N_\varphi$. Это означает, что для этой последовательности выполняются условия (1.5), (1.6) в точках $z \in N_\varphi$. Нужно показать, что это влечет сходимость последовательности $r_m(z) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ в плоскости $\mathbb{C}$. Заметим, что компактное множество N_φ есть конечный набор нулей λ_i . Возьмем $z \in N_\varphi$, в силу условий теоремы z – положительное число.

1) Покажем, что в последовательности (2.6) участвуют лишь те $y(\mu_k z)$, у которых $\mu_k < B_2$. То есть нужно показать, что при выполнении условия (1.5) в точках $z \in N_\varphi$, коэффициенты C_{kl} отличны от нуля только если $\mu_k < B_2$. Положим противное. Зафиксируем m . Обозначим $\mu_p = \max\{\mu_k, k : C_{kl} \neq 0\}$, а C_{ph_p-1} коэффициент при $y(\mu_p z)$ с максимальной кратностью нуля $h_p - 1$. Пусть $\mu_k \geq B_2$. Разделим последовательность (2.6) на $z^{h_p-1}y^{(h_p-1)}(\mu_p z)$. Учитывая лемму 1.2 при $z \rightarrow \infty$, получим

$$\begin{aligned} |r_m(z)| (z^{h_p-1}y^{(h_p-1)}(\mu_p z))^{-1} &= \left| \sum_{k=1}^{p_m} \sum_{l=0}^{h_k-1} C_{kl}(m) \frac{z^l y^{(l)}(\mu_k z)}{z^{h_p-1}y^{(h_p-1)}(\mu_p z)} \right| \\ &= \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{p_m} \sum_{l=0}^{h_k-1} C_{kl}(m) \frac{z^l y^{(l)}(\mu_k z)}{z^{h_p-1}y^{(h_p-1)}(\mu_p z)} + C_{ph_p-1} \right| \rightarrow |C_{ph_p-1}|. \end{aligned}$$

Значит, рост последовательности $r_m(z)$ определяется слагаемым $C_{ph_p-1}(m)z^{h_p-1} \times y^{(h_p-1)}(\mu_p z)$. С другой стороны, рост $r_m(z)$ задается неравенством (1.5), поэтому

$$r_m(z) z^{1-h_p} (y^{(h_p-1)}(\mu_p z))^{-1} < B_1 y(B_2 z) z^{1-h_p} (y^{(h_p-1)}(\mu_p z))^{-1} \rightarrow 0.$$

Это предельное соотношение выполняется при $z \rightarrow \infty$ согласно лемме 1.2, когда $\mu_p \geq B_2$. Следовательно, коэффициент C_{ph_p-1} равен нулю, а это противоречит определению μ_p . Поэтому $\mu_k < B_2$.

2) Докажем теперь сходимость (1.6) для последовательности $r_m(z)$ на любом компакте в плоскости $\mathbb{C}$. Поскольку $y(\mu_k z)$, $z \in \mathbb{R}$ ограничены на любом компактном множестве, то достаточно показать, что коэффициенты $|C_{kl}(m)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Учитывая оценку $\mu_k < B_2$, в записи функции $r_m(z)$ отбросим члены с нулевыми коэффициентами и перенумеруем в порядке возрастания нулей μ_k . Получим запись в виде

$$r_m(z) = \sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{h_k-1} \bar{C}_{kl}(m) z^l y^{(l)}(\bar{\mu}_k z).$$

При этом в силу определения μ_p в этой сумме будет в точности p различных нулей $\bar{\mu}_k$.

Обозначим через d величину равную $h_1 + h_2 + \dots + h_{p-1} + h_p$, где h_k кратность нуля μ_k . Если набор из нулей $\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_d}\}$ выбрать так, что определитель матрицы

$$A = \{\lambda_{i_j}^l y^{(l)}(\mu_k \lambda_{i_j})\}, \quad k = 1, \dots, p, \quad l = 0, 1, \dots, h_k - 1, \quad j = k + l = 1, \dots, d$$

отличен от нуля, то $C_{kl}(m)$ являются решениями системы уравнений

$$\sum_{k=1}^p \sum_{l=0}^{h_k-1} \bar{C}_{kl}(m) \lambda_{i_j}^l y^{(l)}(\bar{\mu}_k \lambda_{i_j}) = r_m(\lambda_{i_j}), \quad j = 1, 2, \dots, d. \quad (2.7)$$

Построим матрицу A следующим образом. Берем $y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) > 1$, величину λ_{i_2} выбираем так, чтобы определитель матрицы второго порядка был отличен от нуля

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \lambda_{i_1} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) \\ y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) & \lambda_{i_2} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) \end{vmatrix}.$$

Действительно, согласно лемме 1.2 $\lim_{\lambda_{i_2} \rightarrow +\infty} \frac{y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2})}{\lambda_{i_2} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2})} = 0$, поэтому

$$\Delta_2 = y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) \lambda_{i_2} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) - \lambda_{i_1} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) > 0.$$

Далее доказательство проводим индукцией по индексу $j = k + l$. Предположим, что уже найдены числа $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_{d-1}}$, такие, что $\Delta_j > 0$, $j = 1, \dots, d - 1$. Найдем достаточно большое число λ_{i_d} , при котором $\Delta_d > 0$. Нужно рассмотреть два случая. Первый случай $h_p = 1$. Второй случай $h_p > 1$. Мы рассмотрим только второй случай, первый случай рассматривается аналогично, также с использованием соотношений (1.7) и (1.8). Получим следующую квадратную матрицу A размера d

$$\begin{pmatrix} y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \lambda_{i_1} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \dots & \lambda_{i_1}^{h_1-1} y^{(h_1-1)}(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \dots & \lambda_{i_1}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_1}) \\ y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) & \lambda_{i_2} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) & \dots & \lambda_{i_2}^{h_1-1} y^{(h_1-1)}(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_2}) & \dots & \lambda_{i_2}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_2}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_d}) & \lambda_{i_d} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_d}) & \dots & \lambda_{i_d}^{h_1-1} y^{(h_1-1)}(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_d}) & \dots & \lambda_{i_d}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \end{pmatrix}.$$

Разложим определитель этой матрицы по последней строке, получим

$$\det A = (-1)^{d+1} y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_d}) \begin{vmatrix} \lambda_{i_1} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \dots & \lambda_{i_1}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i_{d-1}} y'(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_{d-1}}) & \dots & \lambda_{i_{d-1}}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}) \end{vmatrix} + \dots$$

$$+ (-1)^{d+d} \lambda_{i_d}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \begin{vmatrix} y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_1}) & \dots & \lambda_{i_1}^{h_p-2} y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ y(\bar{\mu}_1 \lambda_{i_{d-1}}) & \dots & \lambda_{i_{d-1}}^{h_p-2} y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}) \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta_{d-1} > 0$, то в разложении определителя последнее слагаемое отлично от нуля. Оценим $\det A$. Учитывая, монотонность наборов λ_{i_j} и μ_k , элементы, стоящие перед определителями в разложении матрицы A по строке, сразу заменим максимальным значением $\lambda_{i_d}^{h_p-2} y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d})$, получим

$$\det A \geq \lambda_{i_d}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \Delta_{d-1} - \left| \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k+d} \Delta_{d,k} \lambda_{i_d}^{h_p-2} y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \right|,$$

где $\Delta_{d,k}$ – определитель матрицы, полученный вычеркиванием d -ой строки и k -го столбца. Оценим сверху $|\Delta_{d,k}|$. Этот определитель состоит из $(d-1)!$ слагаемых, каждое из которых есть $(d-1)$ множитель вида $\lambda_{i_j}^l y^{(l)}(\bar{\mu}_k \lambda_{i_j})$, $j = 1, 2, \dots, d-1$, $k = 1, 2, \dots, p$, $l = 0, 1, \dots, h_k - 1$, поэтому

$$|\Delta_{d,k}| \leq (d-1)! (\lambda_{i_{d-1}}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}))^{d-1}.$$

Таким образом, $\det A$ имеет оценку

$$\det A \geq \lambda_{i_d}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \Delta_{d-1} - (d-1)! (d-1) (\lambda_{i_{d-1}}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}))^{d-1} \lambda_{i_d}^{h_p-2} y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d})$$

$$= \lambda_{i_d}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \Delta_{d-1} \times \left[1 - \frac{(d-1)(d-1)!}{\Delta_{d-1}} (\lambda_{i_{d-1}}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}))^{d-1} \frac{y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d})}{\lambda_{i_d} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d})} \right].$$

Множитель $(\lambda_{i_{d-1}}^{h_p-1} y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_{d-1}}))^{d-1}$ имеет фиксированное значение, множитель $y^{(h_p-2)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}) \lambda_{i_d}^{-1} (y^{(h_p-1)}(\bar{\mu}_p \lambda_{i_d}))^{-1}$ стремится к нулю согласно лемме 1.2. Выбираем λ_{i_d} так, чтобы выражение в квадратных скобках стало положительным. Получим, что определитель матрицы A будет больше нуля.

По формуле Крамера

$$C_{kl}(m) = \frac{\det \widetilde{A_{kl}}(m)}{\det A},$$

где матрица $\widetilde{A_{kl}}(m)$ получена из A заменой $h_1 + \dots + h_{k-1} + l + 1$ – того столбца столбцом свободных членов $(r_m(\lambda_{i_1}), \dots, r_m(\lambda_{i_d}))^T$. Согласно (1.6) $r_m(\lambda_{i_j}) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ на конечном множестве точек λ_{i_j} . Следовательно $|C_{kl}(m)| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому для любого z на любом компакте плоскости $\mathbb{C}$ выполняется (1.6) при $m \rightarrow \infty$.

Поскольку коэффициенты $C_{kl}(m)$ ограничены для любого m , $\{z^l y^{(l)}(\mu_k z)\}$, $l = 0, 1, \dots, h_k - 1$ ограничены на $z \in \mathbb{R}_+$, $y(\mu_k |z|) \geq y(\mu_k z)$ для любого $z \in \mathbb{C}$, получаем, что неравенство (1.5) будет выполняться и для точек z всей плоскости $\mathbb{C}$. Это означает, что N_φ является секвенциально достаточным множеством в ядре оператора M_ψ . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства этой теоремы вытекает, что N_φ – множество единственности в ядре оператора M_ψ . Действительно, для этого нужно показать, что из равенства $r_m(\lambda_{i_j}) = 0$ следует, что $r_m(z) = 0$ для любого z . Рассмотрим систему (2.7) с нулевой правой частью. Если в формуле Крамера заменить столбец нулевым столбцом свободных членов, получим, что $C_{kl} = 0$, следовательно, $r_m(z) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если функция φ имеет бесконечно много положительных нулей, а функция ψ имеет только положительные нули, то оператор (2.1) сюръективен в $H(\mathbb{C})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сюръективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot]$ это есть замкнутость и всюду плотность его образа в $H(\mathbb{C})$. По теореме Дьедонне–Шварца [11] это эквивалентно инъективности $\{M_\varphi[\psi \cdot]\}^*$ и замкнутости его образа. Ранее показали, что сопряженным к оператору $M_\varphi[\psi \cdot]$ является оператор $M_\psi[\varphi \cdot]$.

Для линейного оператора инъективность эквивалентна тому, что его ядро тривиально. Покажем, что $\text{Ker } M_\psi[\varphi \cdot] = \{0\}$. Пусть $h(z) \in P_\mathbb{C}$ такое, что $M_\psi[\varphi \cdot h(z)] = 0$, тогда $\varphi \cdot h(z) \in \text{Ker } M_\psi$. Согласно теореме 1 последовательность нулей функции φ будет секвенциально достаточным множеством в ядре оператора M_ψ , значит, согласно замечанию к теореме 1, эта последовательность будет множеством единственности в $\text{Ker } M_\psi$. Получаем, что $\varphi h(z) \equiv 0$. Так как $\varphi(z) \not\equiv 0$ в $\text{Ker } M_\psi$, то $h(z) \equiv 0$.

Для замкнутости образа оператора $M_\psi[\varphi \cdot]$ необходимо показать, что если последовательность $g_n(z)$ сходится к $g(z)$ и $g_n(z) \in \text{Im } M_\psi[\varphi \cdot]$, то $g(z) \in \text{Im } M_\psi[\varphi \cdot]$. Так как $g_n(z) \in \text{Im } M_\psi[\varphi \cdot]$, то существует последовательность функций $Q_n(z) \in P_\mathbb{C}$, удовлетворяющая следующему равенству

$$M_\psi[\varphi \cdot Q_n(z)] = g_n(z). \quad (2.8)$$

Рассмотрим оператор M_ψ . В работе [12] показано, что оператор M_ψ сюръективен в $P_\mathbb{C}$. Значит, существует непрерывный правый обратный M_ψ^{-1} (см. [14]). То есть существует последовательность функций $w_n(z) \in P_\mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $M_\psi[w_n] = g_n(z)$;
- 2) $w_n(z) \rightarrow w(z)$, $w(z) \in P_\mathbb{C}$.

Из первого условия и (2.8) в силу линейности оператора M_ψ получим

$$M_\psi[w_n(z) - \varphi \cdot Q_n(z)] = 0.$$

Обозначим $v_n(z) = w_n(z) - \varphi \cdot Q_n(z)$, тогда $v_n(z) \in P_\mathbb{C}$, $v_n(\lambda_k) = w_n(\lambda_k)$. Так как последовательность нулей функции φ секвенциально достаточное множество в $\text{Ker } M_\psi$, то $v_n(z) \rightarrow v(z)$ в $P_\mathbb{C}$, $v(z) \in \text{Ker } M_\psi$. Тогда, учитывая второе условие, $\varphi \cdot Q_n(z)$ сходится к какой-то функции $l(z) \in P_\mathbb{C}$ и нули $l(z)$ включают нули φ . Обозначим

$$Q(z) := \frac{l(z)}{\varphi}.$$

Функция $Q(z) \in H(\mathbb{C})$, $l(z) \in P_\mathbb{C}$, $\varphi \in P_\mathbb{C}$, тогда по теореме деления [10] $Q(z) \in P_\mathbb{C}$.

Покажем, что $Q_n(z)$ сходится к этой $Q(z)$ равномерно на компактах. Пусть K – замкнутый круг с центром в нуле и $|\varphi| > \delta$ на границе K . Так как $\varphi \cdot Q_n(z)$ сходится к $l(z)$ в $P_{\mathbb{C}}$, то $\varphi \cdot Q_n(z)$ сходится к $l(z)$ равномерно на компактах. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что выполняется неравенство

$$|\varphi \cdot Q_n(z) - l(z)| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad z \in K.$$

Следовательно $|Q_n(z) - l(z)/\varphi| < \varepsilon/\delta$ на границе K . По принципу максимума модуля сходимости может быть продолжена на весь компакт K . Таким образом, $Q_n(z)$ равномерно сходится к $Q(z)$ на K . В силу сходимости $\varphi \cdot Q_n(z)$ к $l(z)$ в $P_{\mathbb{C}}$ верна оценка $|\varphi \cdot Q_n(z)| < B_1 e^{B_2|z|}$.

Значит, согласно определению 1 получаем, что $\varphi \cdot Q_n(z)$ равномерно сходится к $\varphi \cdot Q(z)$ в $P_{\mathbb{C}}$. В силу непрерывности оператора свертки Данкла получим

$$M_\psi[w(z) - \varphi \cdot Q(z)] = 0.$$

Поэтому $M_\psi[\varphi \cdot Q(z)] = M_\psi[w(z)] = g(z)$, т.е. $g(z) \in \text{Im } M_\psi[\varphi \cdot]$. Получили, что оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ сюръективен. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функция $\psi(z)$ не имеет нулей, то оператор $M_\varphi[\psi \cdot]$ будет сюръективным. Покажем это. Действительно, для любой $g(z)$ уравнение $M_\varphi[w(z)] = g(z)$, $w(z) \in H(\mathbb{C})$ разрешимо (см. [12]). Функция $w(z)/\psi(z)$ целая, поэтому оператор $M_\varphi[\psi(z)(w(z)/\psi)]$ будет сюръективным в $H(\mathbb{C})$.

3. Приложения. Пусть задана функция $\varphi \in P_{\mathbb{C}}$, являющаяся характеристической функцией оператора M_φ , с нулями λ_i , $i = 1, 2, \dots$ и задана функция $\psi \in H(\mathbb{C})$ с нулями μ_k кратности h_k . Пусть в каждой точке μ_k задан конечный набор комплексных чисел a_{kj} , $j = 0, 1, \dots, h_k - 1$. Задача Валле Пуссена состоит в следующем: существует ли функция $u(z) \in \text{Ker } M_\varphi$ такая, что $u^{(j)}(\mu_k) = a_{kj}$.

ТЕОРЕМА 3. *Многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ разрешима тогда и только тогда, когда имеет место представление Фишера*

$$H(\mathbb{C}) = \text{Ker } M_\varphi + \{\psi(\lambda)r(\lambda) \mid r(\lambda) \in H(\mathbb{C})\}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение многоточечной задачи Валле Пуссена эквивалентно тому, что для любой $f(z) \in H(\mathbb{C})$ необходимо найти решение $u(z) \in H(\mathbb{C})$ уравнения $M_\varphi[f] = 0$ такое, что $(u - f)/\psi \in H(\mathbb{C})$. Отсюда $u - f = l(z)\psi$, $l(z) \in H(\mathbb{C})$ или $f = u + l\psi$. Получили представление Фишера.

Докажем достаточность. Пусть любая функция $f(z) \in H(\mathbb{C})$ имеет представление Фишера в виде

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z), \quad (3.2)$$

где $f_1(z) \in \text{Ker } M_\varphi$, $f_2(z) \in \{\psi(\lambda) \cdot r(\lambda) : r(\lambda) \in H(\mathbb{C})\}$. Возьмем определенную функцию $f(z) \in H(\mathbb{C})$ такую, что $f^{(j)}(\mu_k) = a_{kj}$. Такая функция существует в силу теоремы Вейерштрасса (Миттаг-Леффлера). Продифференцируем (3.2), получим

$$f^{(j)}(\mu_k) = f_1^{(j)}(\mu_k) + f_2^{(j)}(\mu_k), \quad j = 0, 1, \dots, h_k - 1.$$

Так как

$$f_2^{(j)}(\mu_k) = \sum_{k=0}^j C_j^k \psi^{(j-k)}(\mu_k) r^{(k)}(\mu_k) = 0,$$

то $f_1^{(j)}(\mu_k)$ совпадает с a_{kj} . Теорема доказана.

В работе [12] показано, что сюръективность оператора $M_\varphi[\psi \cdot]$ эквивалентна выполнению представления Фишера (3.1). Пусть λ_i, μ_k удовлетворяют условиям теоремы 1. Применяя теорему 3, получим, что многоточечная задача Валле Пуссена для M_φ разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ж. Себастьян-и-Сильва, “О некоторых классах локально-выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Сб. пер. Математика*, **1** (1957), 60–77.
- [2] C. F. Dunkl, “Differential-difference operators associated to reflection groups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **311** (1989), 167–183.
- [3] L. Lapointe, L. Vinet, “Exact operator solution of the Calogero–Sutherland model”, *Comm. Math. Phys.*, **178**:2 (1996), 425–452.
- [4] А. П. Веселов, “Квантовая задача Калоджеро, уравнение Книжника–Замолотчикова и принцип Гюйгенса”, *ТМФ*, **98**:3 (1994), 524–535.
- [5] J. J. Betancor, M. Sifi, K. Trimèche, “Hypercyclic and chaotic convolution operators associated with the Dunkl operators on $\mathbb{C}$ ”, *Acta Math. Hungar.*, **106**:1-2 (2005), 101–116.
- [6] L. D. Abreu, O. Ciaurri, J. L. Varona, “The spectrum of the right inverse of the Dunkl operator”, *Rev. Mat. Complut.*, **26**:2 (2013), 471–483.
- [7] В. Э. Ким, В. В. Напалков, “Обобщение оператора Данкла на пространстве целых функций”, *Докл. РАН*, **420**:2 (2008), 166–167.
- [8] В. В. Напалков, А. А. Нуятов, “Многоточечная задача Валле Пуссена для операторов свертки”, *Матем. сб.*, **203**:2 (2012), 77–86.
- [9] В. В. Напалков, В. В. Напалков (мл.), “Операторы Данкла как операторы свертки”, *Докл. РАН*, **423**:3 (2008), 300–302.
- [10] В. В. Напалков, *Уравнения свертки в многомерных пространствах*, Наука, М., 1982.
- [11] Ж. Дьедонне, Л. Шварц, “Двойственность в пространствах (F) и (LF)”, *Сб. пер. Математика*, **2**:2 (1958), 77–107.
- [12] К. Р. Забирова, В. В. Напалков, “Операторы свёртки Данкла и многоточечная задача Валле–Пуссена”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **1(30)** (2013), 70–81.
- [13] H. Muggli, “Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit konstanten Koeffizienten”, *Comment. Math. Helv.*, **11**:1 (1938), 151–179.
- [14] О. В. Епифанов, “О существовании непрерывного правого обратного в одном классе локально выпуклых пространств”, *Изв. Сев.-Кавказск. научн. центра высш. школы. Сер. Естественных наук*, 1991, № 3, 3–4.

К. Р. Забирова

Уфимский государственный авиационный
технический университет
E-mail: karinazabirova@gmail.com

Поступило

26.05.2013

В. В. Напалков

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, г. Уфа
E-mail: shaig@anrb.ru