Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Кузнецова, А. Н. Подкорытов, О нормах интегральных средних сферических сумм Фурье, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 701–708

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10343>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 15:55:10

О нормах интегральных средних сферических сумм Фурье

О. И. Кузнецова, А. Н. Подкорытов

Рассматриваются сферические суммы Фурье $S_r(f, x) = \sum_{\|k\| \leq r} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}$ периодической функции f от m переменных и интегральные сильные средние этих сумм $((\int_0^R |S_r(f, x)|^p dr)/R)^{1/p}$ для $p \geq 1$. В работе установлен точный порядок роста при $R \rightarrow +\infty$ соответствующих операторов, т.е. порядок роста величин $\sup_{|f| \leq 1} ((\int_0^R |S_r(f, 0)|^p dr)/R)^{1/p}$. Оценки сверху и снизу различаются на коэффициенты, зависящие лишь от размерности m . Приводится достаточное условие на функцию, обеспечивающее равномерную сильную p -суммируемость ее ряда Фурье.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10343

1. Введение. Сферическая частичная сумма $S_R(f, x)$ ряда Фурье функции f , суммируемой на кубе $\mathbb{T}^m = [-\pi, \pi]^m$, имеет вид (всюду далее $k \in \mathbb{Z}^m$)

$$S_R(f, x) = \sum_{\|k\| \leq R} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}, \quad \text{где} \quad \widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(u) e^{-ik \cdot u} du.$$

Это свертка функции f со сферическим ядром Дирихле

$$D_R(x) = \frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{\|k\| \leq R} e^{-ik \cdot x}.$$

Сильными средними таких сумм называют величины (далее $p \geq 1$ и $n \in \mathbb{N}$)

$$H_{n,p}(f, x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f, x)|^p \right)^{1/p}.$$

Их поведение при $n \rightarrow \infty$ тесно связано с поведением норм $H_{n,p} = \sup_{|f| \leq 1} H_{n,p}(f, 0)$.

Сильная суммируемость рядов Фурье была введена Харди и Литтлвудом [1] в одномерном случае более 100 лет назад. Они доказали, что при $m = 1$ и фиксированном p нормы $H_{n,p}$ ограничены. Поэтому в каждой точке x непрерывности суммируемой на $\mathbb{T}$ функции f ее ряд Фурье p -суммируется к $f(x)$ в сильном смысле:

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f, x) - f(x)|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

В кратном случае ситуация иная – нормы $H_{n,p}$ не ограничены. Их двусторонние оценки, неулучшаемые по порядку, получены в [2].

Кроме средних $H_{n,p}(f)$ естественно рассматривать также их интегральные аналоги, определяемые равенством

$$\mathcal{H}_{R,p}(f, x) = \left(\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x)|^p dr \right)^{1/p}.$$

Отметим, что усреднение по радиусу систематически использовалось во многих работах, например, при изучении сумм Рисса кратного ряда Фурье.

Наша цель – оценить нормы соответствующих операторов, т.е. величины

$$\mathcal{H}_{R,p} = \sup_{|f| \leq 1} \mathcal{H}_{R,p}(f, 0).$$

В силу неравенства Гёльдера с ростом p растут средние $\mathcal{H}_{R,p}(f)$, а следовательно, и нормы $\mathcal{H}_{R,p}$. В работе [3] они оценены сверху. Здесь мы дополним эти результаты, установив неувлучшаемые по порядку двусторонние оценки. Нетрудно видеть, что для этого достаточно рассмотреть $\mathcal{H}_{R,p}$ лишь для целых значений R .

2. Основной результат. Мы доказываем, что нормы $\mathcal{H}_{n,p}$ и $H_{n,p}$ имеют одинаковый порядок. Точнее¹

$$\mathcal{H}_{n,p} \asymp H_{n,p} \asymp \begin{cases} n^{(m-1)/2 - \min\{1/2, 1/p\}} & \text{при } m \geq 3, p \geq 1; \\ n^{1/2-1/p} \min^{1/p} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\} & \text{при } m = 2, p > 2; \\ \sqrt{\ln(n+1)} & \text{при } m = 2, p \in [1, 2]. \end{cases}$$

Здесь новым является результат о нормах $\mathcal{H}_{n,p}$; как было отмечено, утверждение о нормах $H_{n,p}$ установлено в [2].

В конце статьи приведено следствие о сильной p -суммируемости кратного ряда Фурье.

3. Оценка разности $\mathcal{H}_{n,p}(f) - H_{n,p}(f)$. Ясно, что

$$\mathcal{H}_{n,p}(f, 0) = \left(\frac{1}{n} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} |S_{j+t}(f, 0)|^p dt \right)^{1/p} = \left(\frac{1}{n} \int_0^1 \sup_{|\varepsilon|_q \leq 1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j S_{j+t}(f, 0) \right|^p dt \right)^{1/p}.$$

Здесь верхняя грань берется по всевозможным наборам $\varepsilon = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ действительных чисел, удовлетворяющих условию $|\varepsilon|_q = (|\varepsilon_0|^q + \dots + |\varepsilon_{n-1}|^q)^{1/q} \leq 1$, q – сопряженный показатель: $1/p + 1/q = 1$.

Оценим, насколько изменится внутренняя сумма, если в ней заменить t нулем (при этом правая часть формулы для $\mathcal{H}_{n,p}(f, 0)$ превратится в $H_{n,p}(f, 0)$). Пусть

$$\sigma(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j S_{j+t}(f, 0) - \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j S_j(f, 0) = \int_{\mathbb{T}^m} f(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (D_{j+t}(x) - D_j(x)) dx.$$

¹Мы пишем $\alpha_n \asymp \beta_n$, если одновременно $\alpha_n = O(\beta_n)$ и $\beta_n = O(\alpha_n)$. Константы в соответствующих неравенствах, справедливых для всех n , могут зависеть лишь от размерности m .

Тогда

$$\begin{aligned} |\sigma(f)| &\leq \left\| f \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (D_{j+t} - D_j) \right\|_1 \leq \|f\|_2 \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j (D_{j+t} - D_j) \right\|_2 \\ &= \|f\|_2 \sqrt{\frac{1}{(2\pi)^m} \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j^2 \sum_{j < \|k\| \leq j+t} 1^2} = O(n^{(m-1)/2} |\varepsilon|_2 \|f\|_2). \end{aligned}$$

Мы воспользовались равенством Парсеваля и тем фактом, что при $t \in [0, 1]$ и $j < n$ сферический слой $j < \|k\| \leq j+t$ содержит лишь $O(n^{m-1})$ точек решетки $\mathbb{Z}^m$. Поэтому

$$|\sigma(f)| = O(n^{(m-1)/2} |\varepsilon|_q \|f\|_2) = O(n^{(m-1)/2} \|f\|_2) \quad \text{при } p \geq 2,$$

а при $p < 2$ в силу неравенства Гёльдера

$$|\sigma(f)| = O(n^{m/2-1/q} \|f\|_2).$$

Итак,

$$\mathcal{H}_{n,p}(f, 0) = \frac{1}{n^{1/p}} \sup_{|\varepsilon|_q \leq 1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j S_j(f, 0) \right| + O(n^{(m-1)/2 - \min\{1/p, 1/2\}} \|f\|_2). \quad (*)$$

Обозначим для краткости $\varkappa = (m-1)/2 - \min\{1/p, 1/2\}$. Тогда

$$\mathcal{H}_{n,p}(f, 0) = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |S_j(f, 0)|^p \right)^{1/p} + O(n^\varkappa \|f\|_2) = H_{n,p}(f, 0) + O(n^\varkappa \|f\|_2).$$

Поэтому нормы интегральных и сумматорных средних связаны соотношением

$$\mathcal{H}_{n,p} = \sup_{|f| \leq 1} \mathcal{H}_{n,p}(f, 0) = \sup_{|f| \leq 1} H_{n,p}(f, 0) + O(n^\varkappa) = H_{n,p} + O(n^\varkappa).$$

4. Оценка $\mathcal{H}_{n,p}$ сверху. Поскольку порядок роста норм $H_{n,p}$ известен [2] (он указан также в пункте 2), установленное соотношение $\mathcal{H}_{n,p} = H_{n,p} + O(n^\varkappa)$ позволяет легко оценить сверху норму $\mathcal{H}_{n,p}$. При $p > 2$ мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,p} &= O(n^{(m-1)/2-1/p}), & m \geq 3, \\ \mathcal{H}_{n,p} &= O\left(n^{1/2-1/p} \min^{1/p} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\}\right), & m = 2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{H}_{n,2} = O(n^{m/2-1})$, $m \geq 3$, и $\mathcal{H}_{n,2} = O(\sqrt{\ln(n+1)})$, $m = 2$. Поэтому для $p \in [1, 2]$ мы имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,p} &\leq \mathcal{H}_{n,2} = O(n^{m/2-1}), & m \geq 3, \\ \mathcal{H}_{n,p} &\leq \mathcal{H}_{n,2} = O(\sqrt{\ln(n+1)}), & m = 2. \end{aligned}$$

Тем самым требуемая оценка сверху норм $\mathcal{H}_{n,p}$ установлена.

5. Оценка $\mathcal{H}_{n,p}$ снизу. Начнем с двумерного случая. Тогда $\varkappa = 0$ при $1 \leq p \leq 2$ и поэтому $\mathcal{H}_{n,p} = H_{n,p} + O(1) \geq \alpha_m \sqrt{\ln(n+1)}$ для таких p . Кроме того, при $p > 2$ из соотношений

$$H_{n,p} \asymp n^{1/2-1/p} \min^{1/p} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\}, \quad \mathcal{H}_{n,p} = H_{n,p} + O(n^{1/2-1/p})$$

вытекает, что

$$\mathcal{H}_{n,p} \geq \beta_m n^{1/2-1/p} \min^{1/p} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\}$$

по крайней мере для p , достаточно близких к 2.

Убедимся теперь, что $\mathcal{H}_{n,p} \geq \gamma_m n^\varkappa$ при $p \geq 2$ для всех $m = 2, 3, \dots$ и $n \in \mathbb{N}$. Для этого нам потребуются некоторые вычисления.

Далее $R > 1$, $0 < \delta \leq 1$; $f_{R,\delta}$ – функция, равная $\cos(R\|x\| - \pi(m+1)/4)$ при $\|x\| \leq \delta$ и нулю для остальных $x \in \mathbb{T}^m$; $B(r)$ – шар радиуса r с центром в нуле.

ЛЕММА. Если δ достаточно мало, а произведение $R\delta$ достаточно велико (границы зависят лишь от размерности m), то функция $f_{R,\delta}$ удовлетворяет неравенству

$$S_r(f_{R,\delta}, 0) = \int_{B(\delta)} f_{R,\delta}(x) D_r(x) dx \geq c_m (r\delta)^{(m-1)/2} \quad \text{для всех } r, |r - R| \leq \frac{1}{\delta}.$$

В качестве коэффициента c_m можно взять дробь $\pi^{(m-1)/2}/2\Gamma(1+m/2)$.

Поскольку [4]

$$|S_r(f, 0)| \leq \int_{\mathbb{T}^m} |D_r(x)| dx = O(r^{(m-1)/2}),$$

если $|f| \leq 1$, отсюда следует, что у $f_{R,\delta}$ экстремально большая (среди ограниченных функций) не только сферическая сумма $S_R(f_{R,\delta}, 0)$, но и все суммы $S_r(f_{R,\delta}, 0)$ при $R - 1/\delta \leq r \leq R + 1/\delta$.

Прежде чем переходить к доказательству, отметим, что функции с “малым носителем” использовались для получения оценок снизу в значительно более общей ситуации В. А. Ильиным (см., например, лемму §3 гл. II в обзоре [5]). Для наших дальнейших целей существенно уточнение – при уменьшении радиуса δ коэффициент при $r^{(m-1)/2}$ в правой части неравенства убывает медленнее, чем $\delta^{m/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Вместо $f_{R,\delta}$ будем писать просто f . Воспользуемся связью между сферическим ядром Дирихле D_r и преобразованием Фурье $\hat{\chi}_{B(r)}$ характеристической функции шара $B(r)$ (см., например, [2]). Пусть

$$\theta(x) = \frac{x_1/2}{\sin x_1/2} \cdots \frac{x_m/2}{\sin x_m/2}, \quad T(r) = \bigcup_{\|k\| \leq r} \left(k + \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]^m \right).$$

Тогда

$$D_r(x) = \frac{\theta(x)}{(2\pi)^m} \int_{T(r)} e^{-iy \cdot x} dy = \frac{\theta(x)}{(2\pi)^m} \left(\int_{B(r)} e^{-iy \cdot x} dy + \int_{\mathbb{R}^m} \eta_r(y) e^{-iy \cdot x} dy \right),$$

где $\eta_r = \chi_{T(r)} - \chi_{B(r)}$ – разность характеристических функций множеств $T(r)$ и $B(r)$. Таким образом, $D_r(x) = \theta(x)(\hat{\chi}_{B(r)}(x) + \hat{\eta}_r(x))$. Преобразование Фурье характеристической функции шара можно выразить с помощью функции Бесселя:

$$\hat{\chi}_{B(r)}(x) = \left(\frac{r}{2\pi\|x\|} \right)^{m/2} J_{m/2}(r\|x\|).$$

См., например, теорему 4.15 гл. IV в [6] при $\delta = 0$ (хотя там она сформулирована для $\delta > 0$, в доказательстве используется лишь неравенство $\delta > -1$; можно также воспользоваться предельным переходом при $\delta \rightarrow 0$). Следовательно,

$$\int_{B(\delta)} f(x) D_r(x) dx \geq \int_{B(\delta)} \theta(x) f(x) \left(\frac{r}{2\pi\|x\|} \right)^{m/2} J_{m/2}(r\|x\|) dx - \int_{B(\delta)} \theta(x) |\hat{\eta}_r(x)| dx.$$

Оценим второй интеграл сверху, пользуясь тем, что $\theta(x) \leq (\pi/2)^m$, а носитель функции η_r лежит в сферическом слое $r - \sqrt{m}/2 \leq \|y\| \leq r + \sqrt{m}/2$ и $|\eta_r| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{B(\delta)} \theta(x) |\hat{\eta}_r(x)| dx &\leq \sqrt{\int_{B(\delta)} \theta^2(x) dx} \sqrt{\int_{B(\delta)} |\hat{\eta}_r(x)|^2 dx} \\ &= O(\delta^{m/2} \|\eta_r\|_2) = O(\delta^{m/2} r^{(m-1)/2}). \end{aligned}$$

Положим $\varphi = \pi(m+1)/4$, так что $f(x) = \cos(R\|x\| - \varphi)$ при $\|x\| \leq \delta$. Перейдя к сферическим координатам, получим

$$S_r(f, 0) \geq \int_0^\delta \theta_0(t) \cos(Rt - \varphi) \left(\frac{r}{2\pi t} \right)^{m/2} J_{m/2}(rt) t^{m-1} dt + O(\delta^{m/2} r^{(m-1)/2}),$$

где $\theta_0(t) = \int_{\|\xi\|=1} \theta(t\xi) d\sigma$ – ограниченная и бесконечно гладкая на $[0, \infty)$ функция. Воспользуемся теперь асимптотической формулой для функции Бесселя

$$J_{m/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos(u - \varphi) + O\left(\frac{1}{(1+u)\sqrt{u}}\right).$$

Для больших значений u она совпадает с классической формулой, в которой остаток записан в виде $O(u^{-3/2})$ (см., например, лемму 3.11 гл. IV в [6]). Для остальных значений она очевидна, поскольку функция Бесселя непрерывна на $\mathbb{R}$ и, следовательно, ограничена на каждом конечном промежутке.

Вклад остатка в интеграл по t имеет порядок $O((r\delta)^{(m-3)/2})$ при $m > 3$, $O(\ln(r\delta))$ при $m = 3$ и $O(1)$ при $m = 2$. Поэтому при $m > 3$

$$\begin{aligned} \frac{S_r(f, 0)}{r^{(m-1)/2}} &\geq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\delta \theta_0(t) t^{(m-3)/2} \cos(Rt - \varphi) \cos(rt - \varphi) dt + O\left(\delta^{m/2} + \frac{\delta^{(m-3)/2}}{r}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\delta \theta_0(t) t^{(m-3)/2} (\cos(R-r)t + \cos((R+r)t - 2\varphi)) dt \\ &\quad + O\left(\delta^{m/2} + \frac{\delta^{(m-3)/2}}{r}\right). \end{aligned}$$

Так как $|R-r|t \leq t/\delta \leq 1$, то $\cos(R-r)t \geq \cos 1 > 1/2$. Кроме того,

$$\theta_0(t) = \int_{\|\xi\|=1} \theta(t\xi) d\sigma \geq \int_{\|\xi\|=1} 1 d\sigma = \sigma(S^{m-1}) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}.$$

Следовательно,

$$\int_0^\delta \theta_0(t) t^{(m-3)/2} \cos(R-r)t dt \geq \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)} \int_0^\delta t^{(m-3)/2} dt > \frac{\pi^{m/2}}{\Gamma(1+m/2)} \delta^{(m-1)/2}.$$

Оставшийся интеграл оценивается с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \theta_0(t) t^{(m-3)/2} \cos((R+r)t - 2\varphi) dt &= \frac{1}{R+r} \int_0^\delta \theta_0(t) t^{(m-3)/2} d \sin((R+r)t - 2\varphi) \\ &= O\left(\frac{1}{r}\right) \text{Var}_0^\delta(\theta_0(t) t^{(m-3)/2}) = O\left(\frac{\delta^{(m-3)/2}}{r}\right). \end{aligned}$$

Итак, если $m > 3$, то для некоторых коэффициентов $A_m, B_m > 0$ имеем

$$\frac{S_r(f, 0)}{r^{(m-1)/2}} \geq \delta^{(m-1)/2} \left(\frac{\pi^{(m-1)/2}}{\sqrt{2} \Gamma(1+m/2)} - A_m \sqrt{\delta} - \frac{B_m}{r\delta} \right).$$

Поскольку $r\delta \geq R\delta - 1 \asymp R\delta$, это приводит к утверждению леммы при $m > 3$. Случаи $m = 2, 3$ рассматриваются аналогично.

Из леммы (при $R = n$ и малом δ) сразу следует нужная для $p \geq 2$ оценка снизу:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{n,p} &= \sup_{|f| \leq 1} \left(\frac{1}{n} \int_0^n |S_r(f, 0)|^p dr \right)^{1/p} \\ &\geq \frac{1}{n^{1/p}} \int_{n-1}^n S_r(f_{n,\delta}, 0) dr \geq c_m \delta^{(m-1)/2} n^{(m-1)/2-1/p}. \end{aligned}$$

В двумерном случае для “больших” $p > 2$ (разность $p - 2$ отделена от нуля) это равносильно соотношению

$$\mathcal{H}_{n,p} \geq \beta_m n^{1/2-1/p} \min^{1/p} \left\{ \ln(n+1), \frac{1}{p-2} \right\},$$

которое для “малых” $p > 2$ было установлено в начале этого пункта. Таким образом, при $p > 2$ требуемая оценка снизу норм $\mathcal{H}_{n,p}$ получена для всех $m = 2, 3, \dots$. Напомним, что в начале этого пункта получена также оценка снизу при $m = 2$ и $1 \leq p \leq 2$.

Осталось проверить, что $\mathcal{H}_{n,p} \geq \gamma_m n^{m/2-1}$ для $m \geq 3$ и $p \in [1, 2]$. Так как $\mathcal{H}_{n,p} \geq \mathcal{H}_{n,1}$, то это достаточно сделать лишь при $p = 1$. С этой целью применим соотношение (*), установленное в пункте 3, считая, что $p = 1$ и $|f| \leq 1$ в шаре $B(\delta)$, $f = 0$ вне этого шара (выбор радиуса δ уточним позже):

$$\mathcal{H}_{n,1}(f, 0) = \frac{1}{n} \sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \left| \int_{B(\delta)} f(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j D_j(x) dx \right| + O(\delta^{m/2} n^{m/2-1}).$$

Следовательно,

$$n \mathcal{H}_{n,1} \geq \sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \sup_{|f| \leq 1} \left| \int_{B(\delta)} f(x) \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j D_j(x) dx \right| + O((\delta n)^{m/2})$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\varepsilon_j = \pm 1} \int_{B(\delta)} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j D_j(x) \right| dx + O((\delta n)^{m/2}) \\
&\geq \frac{1}{2^n} \int_{B(\delta)} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j D_j(x) \right| dx + O((\delta n)^{m/2}).
\end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь неравенством Хинчина

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \left| \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j a_j \right| \geq \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} a_j^2},$$

получим

$$\begin{aligned}
n \mathcal{H}_{n,1} &\geq \frac{1}{2} \int_{B(\delta)} \sqrt{\sum_{j=0}^{n-1} D_j^2(x)} dx + O((\delta n)^{m/2}) \\
&\geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \int_{B(\delta)} \sum_{j=0}^{n-1} |D_j(x)| dx + O((\delta n)^{m/2}).
\end{aligned}$$

Тем более,

$$n \mathcal{H}_{n,1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}} \sum_{n/2 < j < n} \int_{B(\delta)} f_{j,\delta}(x) D_j(x) dx + O((\delta n)^{m/2}).$$

Теперь, если n достаточно велико, а δ достаточно мало, то к каждому слагаемому можно применить лемму (с $R = r = j$) и получить неравенство (с некоторыми $\alpha_m, \beta_m > 0$):

$$\mathcal{H}_{n,1} \geq 2\alpha_m n^{m/2-1} (\delta^{(m-1)/2} - \beta_m \delta^{m/2}).$$

Взяв $\delta \leq (1/(2\beta_m))^2$, получим нужную оценку снизу $\mathcal{H}_{n,1} \geq \alpha_m (n\delta)^{m/2-1} \sqrt{\delta}$.

6. О p -суммировании ряда Фурье в сильном смысле. Здесь мы покажем, что установленные оценки норм $\mathcal{H}_{R,p}$ стандартными рассуждениями приводят к условию на непрерывную периодическую функцию f , которое обеспечивает равномерную сильную p -суммируемость ряда Фурье, т.е. равномерную (относительно $x \in \mathbb{R}^m$) сходимость к нулю при $R \rightarrow +\infty$ величин

$$\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr.$$

Для этого нам понадобится понятие наилучшего равномерного приближения функции f , которое определяется равенством

$$E_R(f) = \min_M \|f - M\|_C, \quad \text{где } M(x) = \sum_{\|k\| \leq R} c_k e^{ik \cdot x}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Пусть непрерывная в $\mathbb{R}^m$ и 2π -периодическая по каждой переменной функция f такова, что $\mathcal{H}_{R,p} E_R(f) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$. Тогда

$$\max_x \frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим сверху интеграл

$$\Delta_t = \int_t^{2t} |S_r(f, x) - f(x)|^p dr \quad \text{для } t \geq 1.$$

Пусть $M_t(x) = \sum_{\|k\| \leq t} c_k e^{ik \cdot x}$ — многочлен наилучшего приближения функции f , т.е. $\|f - M_t\|_C = E_t(f)$. Поскольку $S_r(f) - M_t = S_r(f - M_t)$ при $r \geq t$ и $|a + b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p)$, получаем

$$\begin{aligned} \Delta_t &\leq 2^p \int_t^{2t} (|S_r(f, x) - M_t(x)|^p + |M_t(x) - f(x)|^p) dr \leq 2^p \int_0^{2t} \dots \\ &= 2^{p+1} t (\mathcal{H}_{2t,p}^p(f - M_t) + |M_t(x) - f(x)|^p) \leq 2^{p+2} t (\mathcal{H}_{2t,p} E_t(f))^p. \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{H}_{2t,p} \asymp \mathcal{H}_{t,p}$, отсюда следует, что $\Delta_t \leq t (C_m \mathcal{H}_{t,p} E_t(f))^p$. Теперь для оценки интеграла $\int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr$ надо разбить промежуток $[1, R]$ на части вида $[R2^{-j}, R2^{1-j}]$ и на каждой из них воспользоваться установленным соотношением. В результате мы получим, что

$$\frac{1}{R} \int_0^R |S_r(f, x) - f(x)|^p dr \leq \frac{1}{R} \int_0^R (\tilde{C}_m \mathcal{H}_{r,p} E_r(f))^p dr.$$

Отсюда сразу вытекает доказываемое утверждение.

Согласно теореме Джексона наилучшее приближение $E_R(f)$ мажорируется модулем гладкости функции f . Поэтому в двумерном случае при $1 \leq p \leq 2$ условие $\omega_f(t) \underset{t \rightarrow +0}{=} o(1/\sqrt{|\ln t|})$ на модуль непрерывности функции f достаточно для равномерной сильной p -суммируемости сферических сумм, а при фиксированном $p > 2$ ее обеспечивает более ограничительное условие Липшица $\omega_f(t) \underset{t \rightarrow +0}{=} o(t^{1/2-1/p})$. С ростом размерности m приходится накладывать на функцию f все более жесткие ограничения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “Sur la série de Fourier d’une fonction á carré sommable”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **156** (1913), 1307–1309.
- [2] О. И. Кузнецова, А. Н. Подкорытов, “О сильных средних сферических сумм Фурье”, *Алгебра и анализ*, **25:3** (2013), 121–130.
- [3] О. И. Кузнецова, “Сильные сферические средние кратных рядов Фурье”, *Изв. НАН Армении. Матем.*, **44:4** (2009), 27–40.
- [4] К. И. Бабенко, “О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних”, *Препринты ИПМ*, 1971, 052.
- [5] Ш. А. Алимов, В. А. Ильин, Е. М. Никишин, “Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений. Г”, *УМН*, **31:6** (1976), 28–83.
- [6] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

О. И. Кузнецова

Институт прикладной математики и механики НАН
Украины

E-mail: kuznets@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило

30.04.2013

Исправленный вариант

09.10.2013

А. Н. Подкорытов

Санкт-Петербургский государственный университет

E-mail: a.podkorytov@gmail.com