Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Феллер, Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 440–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10344>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 17:20:15

УДК 517.9

Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и лапласианом Леви

М. Н. Феллер

Для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с бесконечномерным лапласианом Леви Δ_L

$$\beta \left(\sqrt{2} \|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x)$$

приведены алгоритмы решения краевой задачи $U(0, x) = u_0$, $U(t, 0) = u_1$ и краевой внешней задачи $U(0, x) = v_0$, $U(t, x)|_\Gamma = v_1$, $\lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2$ в классе функций Шилова, зависящих от параметра t .

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10344

1. Введение. Теории линейных гиперболических уравнений с лапласианом Леви посвящены работы [1]–[3].

Нелинейные гиперболические уравнения с лапласианом Леви встречаются в статье [4], в которой рассматривались краевые задачи для уравнения с дивергентной частью

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[k(U(t, x)) \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right] = \Delta_L U(t, x),$$

и в статье [5], в которой рассматривались краевые задачи для уравнения

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x).$$

В настоящей статье в классе функций Шилова, зависящих от вещественного параметра t , $0 \leq t < \infty$, приведены алгоритм решения краевой задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\begin{aligned} \beta \left(\sqrt{2} \|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 &= \Delta_L U(t, x), \\ t > 0, \quad x \in H, \\ U(0, x) &= u_0, \quad U(t, 0) = u_1 \end{aligned}$$

и алгоритм решения краевой внешней задачи для нелинейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами и с лапласианом Леви

$$\beta\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t, x),$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_\Gamma = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2,$$

где $\Gamma \cup \Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 \geq R^2\}$.

2. Предварительные сведения. Пусть H – счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H , $x \in H$.

Бесконечномерный лапласиан ввел Леви [6]. Для функции $F(x)$, дважды сильно дифференцируемой в точке x_0 , лапласиан Леви в этой точке определяется, если он существует, формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (F''(x_0) f_k, f_k)_H, \quad (1)$$

где $F''(x)$ – гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ – выбранный ортонормированный базис в H .

Приведем свойство лапласиана Леви (1), полученное в [6], которое понадобится в дальнейшем (см. также [7]). Пусть функция

$$F(x) = f(V_1(x), \dots, V_m(x)),$$

где $f(v_1, \dots, v_m)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{V_1(x), \dots, V_m(x)\} \subset \mathbb{R}^m$. Пусть $V_k(x)$ – дважды сильно дифференцируемые функции и $\Delta_L V_k(x)$ существует, $k = 1, \dots, m$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f}{\partial v_k} \bigg|_{v_k=V_k(x)} \Delta_L V_k(x). \quad (2)$$

Обозначим через C^{sh} *шиловский класс* функций – совокупность функций вида

$$F(x) = f\left((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \frac{\|x\|_H^2}{2}\right),$$

где $a_1, \dots, a_m$ – некоторые элементы пространства H , $f(\xi_1, \dots, \xi_m, \zeta)$ – функция $m+1$ переменных, определенная и непрерывная в области $\mathbb{R}^{m+1}$.

Обозначим через C^* подмножество функции из C^{sh} , дважды непрерывно дифференцируемых по аргументу $\|x\|_H^2/2$.

Для $F(x) \in C^*$ имеет место формула [8]

$$\Delta_L F(x) = \frac{\partial f((a_1, x)_H, \dots, (a_m, x)_H, \zeta)}{\partial \zeta} \bigg|_{\zeta=\|x\|_H^2/2}. \quad (3)$$

Лапласиан Леви (1) в шиловском классе функций не зависит от выбора базиса.

Обозначим через $\bar{\Omega} = \{x \in H : \|x\|_H^2 \leq R^2\}$ – шар, а через Ω' – множество точек, внешних по отношению к шару:

$$\Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 > R^2\}, \quad \Gamma = \{x \in H : \|x\|_H^2 = R^2\}.$$

Введем функцию

$$S(x) = \frac{\|x\|_H^2 - R^2}{2}.$$

Функция $S(x)$ обладает такими свойствами:

$$S(x) > 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega', \quad S(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Gamma, \quad \Delta_L S(x) = 1.$$

3. Краевая задача. Рассмотрим задачу

$$\beta\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad (4)$$

$$t > 0, \quad x \in H,$$

$$U(0, x) = u_0, \quad U(t, 0) = u_1, \quad (5)$$

где $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – заданные функции на $\mathbb{R}^1$, числа u_0 , u_1 заданы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R}^1$. Тогда решение задачи (4), (5) равно

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}, U(t, x)\right) = 0, \quad (6)$$

где $\Phi(z, \varphi(z)) = 0$ – решение в неявном виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения второго порядка

$$\beta\left(\frac{d\varphi(z)}{dz}\right) \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \alpha(\varphi(z)) \left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]^2 + 2z \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0, \quad (7)$$

$$\varphi(0) = u_0, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1. \quad (8)$$

Решение задачи (4), (5) существует (существует и единственно), если существует (существует и единственно) решение задачи (7), (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (3) уравнение (4) и условия (5) принимают вид

$$\beta\left(2\sqrt{\varsigma} \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial t^2} + \alpha(u(t, \varsigma)) \left[\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t}\right]^2 = \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma} \Big|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2}, \quad (9)$$

$$u(0, \varsigma) = u_0, \quad u(t, 0) = u_1. \quad (10)$$

Уравнение (9) не изменяется при преобразовании переменных $\bar{t} = ct$, $\bar{\varsigma} = c^2\varsigma$ при любых t , ς , c . Действительно, с одной стороны,

$$\frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial t} = c \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}}, \quad \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \varsigma} = c^2 \frac{\partial u(t, \varsigma)}{\partial \bar{\varsigma}}, \quad \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t, \varsigma)}{\partial \bar{t}^2}$$

и из (9) имеем

$$\beta \left(2\sqrt{\frac{\zeta}{c^2}} c \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}} \right) c^2 \frac{\partial^2 u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}^2} + \alpha(u(t, \zeta)) \left[c \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}} \right]^2 = c^2 \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{\zeta}}.$$

Сокращая на c^2 , получим

$$\beta \left(\sqrt{\frac{\zeta}{c^2}} \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial^2 u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}^2} + \alpha(u(t, \zeta)) \left[\frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{t}} \right]^2 = \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (11)$$

С другой стороны, уравнение (9) имеет место для любых t, ζ , а значит, и для $\bar{t}, \bar{\zeta}$, поэтому

$$\beta \left(\sqrt{\bar{\zeta}} \frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\zeta})}{\partial \bar{t}} \right) \frac{\partial^2 u(\bar{t}, \bar{\zeta})}{\partial \bar{t}^2} + \alpha(u(\bar{t}, \bar{\zeta})) \left[\frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\zeta})}{\partial \bar{t}} \right]^2 = \frac{\partial u(\bar{t}, \bar{\zeta})}{\partial \bar{\zeta}}. \quad (12)$$

Не изменяются и условия (10).

Сравнивая равенства (11) и (12), имеем, что $u(t, \zeta) = u(\bar{t}, \bar{\zeta})$, т.е.

$$u(t, \zeta) = u(ct, c^2\zeta).$$

Полагая $c = 1/(2\sqrt{\zeta})$, получим, что

$$u(t, \zeta) = u\left(\frac{t}{2\sqrt{\zeta}}, \frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\zeta}}\right) = \varphi(z), \quad z = \frac{t}{2\sqrt{\zeta}}, \quad \zeta = \frac{\|x\|_H^2}{2}. \quad (13)$$

То есть $u(t, \zeta)$ зависит только от аргумента $z = t/(2\sqrt{\zeta})$.

Из (13) имеем, что

$$\frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\zeta}} \frac{d\varphi(z)}{dz}, \quad \frac{\partial u^2(t, \zeta)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\zeta} \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}, \quad \frac{\partial u(t, \zeta)}{\partial \zeta} = -\frac{z}{2\zeta} \frac{d\varphi(z)}{dz}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9) и сокращая на $1/(4\zeta)$, получим для функции $\varphi(z)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка (7)

$$\beta \left(\frac{d\varphi(z)}{dz} \right) \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \alpha(\varphi(z)) \left[\frac{d\varphi(z)}{dz} \right]^2 + 2z \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0,$$

а из условий (10) (поскольку $z = t/(2\sqrt{\zeta})$, $\zeta = \|x\|_H^2/2$) вытекают условия (8)

$$\varphi(0) = u_0, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1.$$

Теперь, если $\Phi(z, \varphi(z)) = 0$ – решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (7), (8), то поскольку $\varphi(z) = u(t, \zeta)$, а $z = t/(2\sqrt{\zeta})$, $\zeta = \|x\|_H^2/2$ и, кроме того, $u(t, \zeta)|_{\zeta=\|x\|_H^2/2} = U(t, x)$, мы получаем, что решение задачи (4), (5) равно (6): $\Phi(t/2\sqrt{\|x\|_H^2/2}, U(t, x)) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\beta(\xi) = 1$ решение задачи

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in H, \\ U(0, x) = u_0, \quad U(t, 0) = u_1$$

(в неявном виде) дается формулой

$$\int_{u_0}^{U(t,x)} e^{\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds \left[\int_{u_0}^{u_1} e^{\int_{u_0}^\xi \alpha(\xi) d\xi} ds \right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t/2\sqrt{\|x\|_H^2/2}} e^{-p^2} dp.$$

Действительно, в случае $\beta(\xi) = 1$ уравнение (7) равно

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} + \alpha(\varphi(z)) \left[\frac{d\varphi(z)}{dz} \right]^2 + 2z \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0. \quad (14)$$

Из (14), разделив на $\varphi'(z)$ и проинтегрировав, получим уравнение первого порядка, и задача (7), (8) принимает вид

$$\begin{aligned} \ln \varphi'(z) &= - \int \alpha(\varphi) d\varphi - z^2 + \ln C_0, \\ \varphi(0) &= u_0, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = u_1. \end{aligned}$$

Отсюда $\varphi'(z)e^{\int \alpha(\varphi) d\varphi} = C_0 e^{-z^2}$ и интегрируя, получим, что

$$\int e^{\int \alpha(\varphi) d\varphi} d\varphi = C_0 \int e^{-z^2} dz + C_1.$$

С учетом краевых условий имеем

$$\int_{u_0}^{\varphi(z)} e^{\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u_0}^{u_1} \exp\left(\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi\right) ds \int_0^z e^{-p^2} dp = 0.$$

Но

$$z = \frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}, \quad \varphi(z) = u(t, \varsigma)|_{\varsigma=\|x\|_H^2/2} = U(t, x).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} &\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}, U(t, x)\right) \\ &\equiv \int_{u_0}^{U(t,x)} \exp\left(\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi\right) ds \\ &\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{u_0}^{u_1} \exp\left(\int_{u_0}^s \alpha(\xi) d\xi\right) ds \int_0^{t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})} e^{-p^2} dp = 0. \end{aligned}$$

4. Краевая задача (внешняя). Рассмотрим задачу

$$\beta\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad (15)$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_{\Gamma} = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2, \quad (16)$$

где $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – заданные функции на $\mathbb{R}^1$, числа v_0 , v_1 , v_2 заданы, а $\Gamma \cup \Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 \geq R^2\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\alpha(\xi)$, $\beta(\xi)$ – непрерывные функции на $\mathbb{R}^1$. Тогда решение задачи (15), (16) равно

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t, x)\right) = 0, \quad (17)$$

где $\Phi(w, \varphi(w)) = 0$ – решение в неявном виде краевой задачи для обыкновенного дифференциального нелинейного уравнения второго порядка

$$\beta\left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right) \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w)) \left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^2 + 2w \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0, \quad (18)$$

$$\varphi(0) = v_0, \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1. \quad (19)$$

Здесь $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$.

Решение задачи (15), (16) существует (существует и единственно), если существует (существует и единственно) решение задачи (18), (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формуле (2) при $m = 1$ уравнение (15) принимает вид

$$\beta\left(2\sqrt{\eta} \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} + \alpha(u(t, \eta)) \left[\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t}\right]^2 = \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=S(x)} \Delta_L S(x).$$

Но $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$ и, значит, $\Delta_L S(x) = \Delta_L \|x\|_H^2/2 = 1$. Поэтому имеем

$$\beta\left(2\sqrt{\eta} \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} + \alpha(u(t, \eta)) \left[\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t}\right]^2 = \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta}, \quad (20)$$

$$v(0, \eta) = v_0, \quad v(t, 0) = v_1. \quad (21)$$

Уравнение (20) и условия (21) не изменяются при преобразовании переменных $\bar{t} = ct$, $\bar{\eta} = c^2\eta$ при любых t, η, c . Поэтому

$$u(t, \eta) = u(ct, c^2\eta).$$

Полагая $c = 1/(2\sqrt{\eta})$, получим

$$u(t, \eta) = u\left(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \frac{1}{4}\right) = \varphi\left(\frac{t}{2\sqrt{\eta}}\right) = \varphi(w), \quad w = \frac{t}{2\sqrt{\eta}}, \quad \eta = S(x). \quad (22)$$

Из (22) имеем

$$\frac{\partial u(t, \eta)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\eta}} \frac{d\varphi(w)}{dw}, \quad \frac{\partial^2 u(t, \eta)}{\partial t^2} = \frac{1}{4\eta} \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2}, \quad \frac{\partial u(t, \eta)}{\partial \eta} = -\frac{w}{2\eta} \frac{d\varphi(w)}{dw}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (20) и условия (21) и сокращая на $1/(4\eta)$, получим для функции $\varphi(w)$ обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение второго порядка (18)

$$\beta\left(\frac{d\varphi(w)}{dw}\right) \frac{d^2\varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w)) \left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^2 + 2w \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0,$$

а из условий (21) (поскольку $w = t/(2\sqrt{\eta})$, $\eta = S(x)$, а $S(x)|_{\Gamma} = 0$) следуют условия (19)

$$\varphi(0) = v_0, \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1.$$

Теперь, если $\Phi(w, \varphi(w)) = 0$ – решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (18), (19), то поскольку $\varphi(w) = u(t, \eta)$, а $w = t/(2\sqrt{\eta})$, $\eta = S(x)$ и, кроме того, $u(t, \eta)|_{\eta=S(x)} = U(t, x)$, мы получаем, что решение задачи (15), (16) равно (17): $\Phi(t/(2\sqrt{S(x)}), U(t, x)) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $\beta(\xi) = 1$ решение задачи

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + \alpha(U(t, x)) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0, x) = v_0, \quad U(t, x)|_{\Gamma} = v_1, \quad \lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = v_2$$

(в неявном виде) дается формулой

$$\int_{v_0}^{U(t, x)} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds \left[\int_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^{\xi} \alpha(\xi) d\xi} d\xi \right]^{-1} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-p^2} dp,$$

где $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$, а $v_2 = v_0$.

Действительно, при $\beta(\xi) = 1$ уравнение (18) равно

$$\frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} + \alpha(\varphi(w)) \left[\frac{d\varphi(w)}{dw} \right]^2 + 2w \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0. \quad (23)$$

Из (23), разделив на $\varphi'(w)$ и проинтегрировав, получим уравнение первого порядка и задача (18), (19) принимает вид

$$\ln \varphi'(w) = - \int \alpha(\varphi) d\varphi - w^2 + \ln C_0,$$

$$\varphi(0) = v_0, \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = v_1.$$

Отсюда $\varphi'(w) e^{\int \alpha(\varphi) d\varphi} = C_0 e^{-w^2}$ и интегрируя получим, что

$$\int e^{\int \alpha(\varphi) d\varphi} d\varphi = C_0 \int e^{-w^2} dw + C_1.$$

С учетом краевых условий имеем

$$\int_{v_0}^{\varphi(w)} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_0}^{v_1} e^{\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi} ds \int_0^w e^{-p^2} dp = 0.$$

Но $w = t/(2\sqrt{S(x)})$, $\varphi(w) = u(t, \eta)|_{\eta=S(x)} = U(t, x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t, x)\right) \\ & \equiv \int_{v_0}^{U(t, x)} \exp\left(\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi\right) ds \\ & \quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_0}^{v_1} \exp\left(\int_{v_0}^s \alpha(\xi) d\xi\right) ds \int_0^{t/2\sqrt{S(x)}} e^{-p^2} dp = 0. \end{aligned}$$

5. Примеры.

ПРИМЕР 1. Решить краевую задачу

$$\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - 2U^{-3}(t, x) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad (24)$$

$$t > 0, \quad x \in H,$$

$$U(0, x) = e^{\pi/3\sqrt{3}}, \quad U(t, 0) = e^{\pi/\sqrt{3}}. \quad (25)$$

Решение. Для уравнения (24) дифференциальное уравнение второго порядка (7) равно

$$\frac{1}{\varphi'(z)} \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} - \frac{2}{\varphi^3(z)} \left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\right]^2 + 2z \frac{d\varphi(z)}{dz} = 0.$$

Разделив это уравнение на $\varphi'(z)$ и проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$-\int \frac{d\varphi'}{\varphi'^2} + 2 \int \frac{d\varphi}{\varphi^3} - z^2 = C_0.$$

Отсюда имеем (полагая $C_0 = 0$)

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{1 + \varphi^2 z^2}{\varphi^2}. \quad (26)$$

Согласно (25) краевые условия (8) запишутся в виде

$$\varphi(0) = e^{\pi/(3\sqrt{3})}, \quad \varphi(z)|_{z=\infty} = e^{\pi/\sqrt{3}}. \quad (27)$$

Полагая теперь $z = v/\varphi$, имеем, что $dz/d\varphi = ((dv/d\varphi)\varphi - v)/\varphi^2$. Подставляя значения z и $dz/d\varphi$ в (26), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\varphi \frac{dv}{d\varphi} = v^2 + v + 1.$$

Его решение

$$\varphi(z) = C_1 \exp\left(\int \frac{dv}{v^2 + v + 1}\right) = C_1 \exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}(2v + 1)\right),$$

(так как дискриминант уравнения $v^2 + v + 1 = 0$ $D = -3 < 0$).

Поскольку $v = z\varphi(z)$, то получим (полагая $C_1 = 1$), что решение задачи (26), (27) равно

$$\varphi(z) = \exp\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}(2z\varphi(z) + 1)\right).$$

Учитывая, что $z = t/(2\sqrt{\|x\|_H^2/2})$, $\varphi(z) = u(t, \zeta)|_{\zeta=\|x\|_H^2/2} = U(t, x)$, получим решение (в неявном виде) задачи (24), (25):

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}}, U(t, x)\right) \equiv U(t, x) - \exp\left\{\frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{t}{2\sqrt{\|x\|_H^2/2}} U(t, x) + \frac{1}{2}\right)\right\} = 0.$$

ПРИМЕР 2. Решить краевую задачу

$$\left(\sqrt{2}\|x\|_H \frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right)^{-1} \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} + 2U^{-3}(t, x) \left[\frac{\partial U(t, x)}{\partial t}\right]^2 = \Delta_L U(t, x), \quad (28)$$

$$t > 0, \quad x \in \Omega',$$

$$U(0, x) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad U(t, x)|_{\Gamma} = 1, \quad (29)$$

$$\lim_{\|x\|_H \rightarrow \infty} U(t, x) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

где $\Gamma \cup \Omega' = \{x \in H : \|x\|_H^2 \geq R^2\}$.

Решение. Для уравнения (28) дифференциальное уравнение второго порядка (18) равно

$$\frac{1}{\varphi'(w)} \frac{d^2 \varphi(w)}{dw^2} + \frac{2}{\varphi^3(w)} \left[\frac{d\varphi(w)}{dw}\right]^2 + 2w \frac{d\varphi(w)}{dw} = 0.$$

Разделив это уравнение на $\varphi'(w)$ и проинтегрировав, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$\int \frac{d\varphi'}{\varphi'^2} + 2 \int \frac{d\varphi}{\varphi^3} + w^2 = C_0.$$

Отсюда имеем (полагая $C_0 = 0$)

$$\frac{dw}{d\varphi} = \frac{-1 + \varphi^2 w^2}{\varphi^2}. \quad (30)$$

Согласно (29) краевые условия (19) запишутся

$$\varphi(0) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \varphi(w)|_{w=\infty} = 1. \quad (31)$$

Полагая теперь $w = v/\varphi$ имеем, что $dw/d\varphi = ((dv/d\varphi)\varphi - v)/\varphi^2$. Подставляя значения w и $dw/d\varphi$ в (30), получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\varphi \frac{dv}{d\varphi} = v^2 + v - 1.$$

Его решение

$$\varphi(w) = C_1 \exp\left(\int \frac{dv}{v^2 + v - 1}\right) = C_1 \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{5}} (2v + 1)\right),$$

(так как дискриминант уравнения $v^2 + v - 1 = 0$ $D = 5 > 0$).

Поскольку $v = w\varphi(w)$, то получим (полагая $C_1 = 1$), что решение задачи (30), (31) равно

$$\varphi(w) = \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{1}{\sqrt{5}} (2w\varphi(w) + 1)\right).$$

Учитывая, что $w = t/(2\sqrt{S(x)})$, $\varphi(w) = u(t, \eta)|_{\eta=S(x)} = U(t, x)$, и что $S(x) = (\|x\|_H^2 - R^2)/2$, получим решение (в неявном виде) задачи (28), (29):

$$\Phi\left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}}, U(t, x)\right) \equiv U(t, x) - \exp\left\{-\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{Arcth} \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{t}{2\sqrt{S(x)}} U(t, x) + \frac{1}{2}\right)\right\} = 0.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. А. Альбеверио, Я. И. Белопольская, М. Н. Феллер, “Задача Коши для волнового уравнения с лапласианом Леви”, *Матем. заметки*, **87**:6 (2010), 803–813.
- [2] М. Н. Феллер, “Краевые задачи для волнового уравнения с лапласианом Леви в классе Гато”, *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1564–1574.
- [3] S. Albeverio, Ya. I. Belopolskaya, M. N. Feller, “Boundary problems for the wave equation with the Lévy Laplacian in Shilov’s class”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **16**:3 (2010), 197–202.
- [4] М. Н. Феллер, “Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с дивергентной частью и с лапласианом Леви”, *Укр. матем. журн.*, **64**:2 (2012), 237–244.
- [5] И. И. Ковтун, М. Н. Феллер, “Краевые задачи для нелинейного гиперболического уравнения с лапласианом Леви”, *Укр. матем. журн.*, **64**:11 (2012), 1492–1499.
- [6] P. Lévy, *Problèmes concrets d’analyse fonctionnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.
- [7] M. N. Feller, *The Lévy Laplacian*, Cambridge Tracts in Math., **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.
- [8] Г. Е. Шилов, “О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве, Γ ”, *Функц. анализ и его прил.*, **1**:2 (1967), 81–90.

М. Н. Феллер

Украинский государственный НИИ “Ресурс”

E-mail: feller@otblesk.com

Поступило

22.06.2013

Исправленный вариант

14.10.2013