Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Ахмерова, А. А. Папин, Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 170–185

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10346>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:09:52

Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси

И. Г. Ахмерова, А. А. Папин

Для системы уравнений одномерного нестационарного движения теплопроводной двухфазной смеси (газ – твердые частицы) доказана локальная разрешимость начально-краевой задачи. В случае постоянства истинных плотностей фаз и малости вязкости и ускорения второй фазы установлена разрешимость “в целом” по времени и сходимость при неограниченном росте времени решения нестационарной задачи к решению стационарной.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10346

1. Постановка задачи и формулировка основного результата. В работе изучается следующая квазилинейная система уравнений составного типа:

$$\frac{\partial(\rho_1^0 s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1^0 s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(\rho_2^0(1-s))}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2^0(1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

$$\rho_1^0 s \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial(s p_1)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_1(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + F + \rho_1^0 s g, \quad (1.2)$$

$$\rho_2^0(1-s) \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) = -\frac{\partial((1-s)p_2)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_2(s) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - F + \rho_2^0(1-s)g, \quad (1.3)$$

$$F = B(s)(v_2 - v_1) + p_2 \frac{\partial s}{\partial x}, \quad p_1 - p_2 = p_c(s, \theta), \quad p_2 = R \rho_2^0 \theta, \quad (1.4)$$

$$c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + c_2 \rho_2^0(1-s) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (1.5)$$

решаемая в области $(x, t) \in Q_T = \Omega \times (0, T)$, $\Omega = (0, 1)$, при краевых и начальных условиях, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} v_i|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, & v_i|_{t=0} &= v_i^0(x), \\ p_2|_{t=0} &= p^0(x), & \theta|_{t=0} &= \theta^0(x), & s|_{t=0} &= s^0(x). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Данная начально-краевая задача описывает одномерное движение между непроницаемыми теплоизолированными стенками двухфазной смеси, состоящей из твердых частиц и газа [1]. Здесь ρ_i^0 , v_i – соответственно истинная плотность и скорость

i -й фазы ($i = 1$ – твердые частицы, $i = 2$ – газ), s – объемная концентрация твердых частиц, θ – абсолютная температура смеси, p_1 – эффективное давление твердых частиц, p_2 – внутреннее давление газа, g – плотность массовых сил, $c_i = \text{const} > 0$ – теплоемкость при постоянном объеме, $R = \text{const} > 0$ – универсальная газовая постоянная; кроме того, $\mu_i(s)$ – вязкости фаз, $B(s)$ – коэффициент взаимодействия фаз, $\chi(s)$ – коэффициент теплопроводности смеси, $p_c(s, \theta)$ – разность давлений (заданные функции). Задача записана в эйлеровых координатах x, t . Истинная плотность твердых частиц ρ_1^0 принимается постоянной. Искомыми являются величины $s, \theta, \rho_2^0, v_i, p_i, i = 1, 2$.

Локальная по времени разрешимость задачи (1.1)–(1.6) при дополнительных условиях малой вязкости и ускорения второй фазы (в уравнении (1.3) соответствующие слагаемые отбрасываются) установлена в работе [2]. При этих же предположениях, а также при условиях $p_1 = p_2, \theta = \text{const}, \rho_i^0 = \text{const}, \mu_i = \text{const}, i = 1, 2$, установлена локальная разрешимость задачи Коши [3].

Система (1.1)–(1.5) близка по структуре системе уравнений вязкого газа [4] с зависящей от плотности вязкостью [5]. Особенностью задачи (1.1)–(1.6) является наличие двух скоростей v_1 и v_2 , а также необходимость обоснования физического принципа максимума для концентрации s вида $0 \leq s \leq 1$ и для истинной плотности газа: $0 < \rho_2^0 < \infty$.

В настоящей работе доказана локальная разрешимость задачи (1.1)–(1.6) в случае когда ρ_2^0 – функция давления и температуры, а $\rho_1^0 = \text{const}$. В предположениях работы [3] установлена разрешимость “в целом” и стабилизация решения.

Введем необходимые обозначения. Пусть

$$\|f\|_{q,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^q dx \right)^{1/q}, \quad \|u\|_{q,r,Q_T} = \left(\int_0^T \left(\int_{\Omega} |u(x,t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}$$

– нормы в пространствах Лебега $L_q(\Omega), L_{q,r}(Q_T)$, где $r, q \in [1, \infty]$. Положим для краткости $\|\cdot\|_q = \|\cdot\|_{q,\Omega}, \|\cdot\| = \|\cdot\|_{2,\Omega}$. Также используются пространства Соболева $W_p^l(\Omega)$, l – натуральное, $1 \leq p \leq \infty$, с нормой

$$\|u\|_{W_p^l(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega}^{(l)} = \sum_{|\alpha|=0}^l \sum_{(\alpha)} \|D_x^\alpha u\|_{L_p(\Omega)},$$

где $\sum_{(\alpha)}$ означает суммирование всех производных порядка $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ [4]. Сформулируем основные результаты статьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Обобщенным решением задачи (1.1)–(1.6) называется совокупность функций*

$$(s(x, t), \rho_2^0(x, t), v_i(x, t), p_i(x, t), \theta(x, t)), \quad i = 1, 2,$$

из пространств

$$\begin{aligned} s, \rho_2^0 &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)), & \frac{\partial s}{\partial t}, \frac{\partial \rho_2^0}{\partial t} &\in L_2(Q_T), \\ v_i, \theta &\in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega)) \cap L_2(0, T; W_2^2(\Omega)), & \frac{\partial v_i}{\partial t}, \frac{\partial \theta}{\partial t}, \frac{\partial p_i}{\partial x} &\in L_2(Q_T), \end{aligned}$$

удовлетворяющие уравнениям (1.1)–(1.5) и неравенствам $0 < s < 1$, $0 < \rho_2^0$, $\theta < \infty$ почти всюду в Q_T и принимающих заданные граничные и начальные значения в смысле следов функций из указанных классов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть данные задачи (1.1)–(1.6) подчиняются следующему условию гладкости:

$$v_i^0, \theta^0, s^0, \rho_2^0 \in W_2^1(\Omega), \quad g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad v_i^0|_{x=0, x=1} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Пусть функции $\mu_1(s)$, $\mu_2(s)$, $B(s)$, $p_c(s, \theta)$, $\chi(s)$ и их производные до второго порядка непрерывны для $s \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} k_0^{-1} s^{q_1} (1-s)^{q_2} &\leq \mu_1(s) \leq k_0 s^{q_3} (1-s)^{q_4}, & |(\mu_1(s))'_s| &\leq k_0 s^{q_5} (1-s)^{q_6}, \\ k_0^{-1} s^{q_7} (1-s)^{q_8} &\leq \mu_2(s) \leq k_0 s^{q_9} (1-s)^{q_{10}}, & |(\mu_2(s))'_s| &\leq k_0 s^{q_{11}} (1-s)^{q_{12}}, \\ k_0^{-1} s^{q_{13}} (1-s)^{q_{14}} |\theta|^{q_{15}} &\leq p_c(s, \theta) \leq k_0 s^{q_{16}} (1-s)^{q_{17}} |\theta|^{q_{18}}, \\ &|(p_c(s, \theta))'_s| \leq k_0 s^{q_{19}} (1-s)^{q_{20}} |\theta|^{q_{21}}, \\ k_0^{-1} s^{q_{22}} (1-s)^{q_{23}} &\leq \chi(s) \leq k_0 s^{q_{24}} (1-s)^{q_{25}}, & |(\chi(s))'_s| &\leq k_0 s^{q_{26}} (1-s)^{q_{27}}, \\ k_0^{-1} s^{q_{28}} (1-s)^{q_{29}} &\leq B(s) \leq k_0 s^{q_{30}} (1-s)^{q_{31}}, \end{aligned}$$

где $k_0 = \text{const} > 0$, $q_1, \dots, q_{31}$ – фиксированные вещественные параметры.

Если выполнены условия

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \leq p^0(x), \quad \theta^0(x) \leq M_1 < \infty, \quad x \in \bar{\Omega},$$

где m_0 , M_0 , m_1 , M_1 – известные положительные постоянные, то найдется достаточно малое значение $t_0 \in (0, T)$ такое, что для всех $t \leq t_0$ существует обобщенное решение $(s(x, t), \rho_2^0(x, t), v_i(x, t), p_i(x, t), \theta(x, t))$ задачи (1.1)–(1.6).

В случае $\rho_i^0 = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$, уравнение состояния $p_2 = p_2(\rho_2^0, \theta)$ не используется и давление p_2 является искомой функцией. Введем безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{t}{t_1}, \quad v'_i = \frac{v_i}{U}, \quad p'_i = \frac{p_i}{P}, \quad i = 1, 2, \quad p'_c = \frac{p_c}{P}, \quad \theta' = \frac{\theta}{\theta_1}$$

и положим

$$\delta = \frac{\rho_2^0}{\rho_1^0}, \quad \mu_i = \mu_i^0 \bar{\mu}_i(s), \quad \chi = \chi_0 \bar{\chi}(s), \quad \mu_i^0 = \text{const} > 0, \quad \chi_0 = \text{const} > 0,$$

$\bar{\mu}_i(s)$, $\bar{\chi}(s)$ – заданные функции. Кроме того, положим

$$\begin{aligned} L &= U t_1, \quad \nu = \frac{\mu_2^0}{\mu_1^0}, \quad P = L \rho_1^0 |g|, \quad \chi_0 = U L \rho_1^0 c_1, \quad B' = \frac{B U}{\rho_1^0 |g|}, \quad n = \frac{g}{|g|}, \\ \text{Re} &= \frac{\rho_1^0 U L}{\mu_1^0} - \text{число Рейнольдса}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{L |g|} - \text{число Фруда}. \end{aligned}$$

Вместо системы (1.1)–(1.5) получим (штрихи опущены):

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(s v_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial((1-s))}{\partial t} + \frac{\partial((1-s) v_2)}{\partial x} = 0,$$

$$\begin{aligned}
s \operatorname{Fr} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= -s \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial(sp_c)}{\partial x} + \frac{\operatorname{Fr}}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_1(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + B(v_2 - v_1) + sn, \\
(1-s) \delta \operatorname{Fr} \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) &= -(1-s) \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\operatorname{Fr}}{\operatorname{Re}} \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_2(s) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \\
&\quad + B(v_1 - v_2) + (1-s) \delta n, \\
s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{c_2}{c_1} \delta (1-s) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\chi}(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad p_1 = p_2 + p_c.
\end{aligned}$$

При $\delta = \nu = 0$ приходим к системе [1]

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial(sv_1)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial(1-s)}{\partial t} + \frac{\partial((1-s)v_2)}{\partial x} = 0, \quad (1.7)$$

$$s \operatorname{Fr} \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -s \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial(sp_c)}{\partial x} + \frac{\operatorname{Fr}}{\operatorname{Re}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\mu}_1(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + B(v_2 - v_1) + sn, \quad (1.8)$$

$$0 = -(1-s) \frac{\partial p_2}{\partial x} + B(v_1 - v_2), \quad p_1 = p_2 + p_c, \quad (1.9)$$

$$s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{\chi}(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \quad (1.10)$$

замкнутой относительно неизвестных функций $s, v_i, p_i, \theta, i = 1, 2$, удовлетворяющих краевым и начальным условиям

$$\begin{aligned}
v_i|_{x=0, x=1} &= 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} = 0, \quad v_i|_{t=0} = v_i^0(x), \\
p_2|_{t=0} &= p^0(x), \quad \theta|_{t=0} = \theta^0(x), \quad s|_{t=0} = s^0(x).
\end{aligned} \quad (1.11)$$

Следует отметить, что стационарным решением задачи (1.7)–(1.11) при $g = 0$, $p_c = 0$ является набор постоянных $v_1 = v_2 = 0$, $s = \text{const} \in (0, 1)$, $\theta = \text{const} > 0$.

Обобщенное решение задачи (1.7)–(1.11) понимается в смысле определения 1, в котором нужно положить $\rho_2^0 = \text{const} > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\rho_2^0 = \text{const} > 0$ и данные подчиняются следующему условию:

- 1) функции $\mu_1(s)$, $B(s)$, $p_c(s, \theta)$, $\chi(s)$ и их производные непрерывны для $s \in (0, 1)$ и удовлетворяют условиям

$$\mu_1(s) = \mu_1 s, \quad B(s) = B_0 \frac{1}{s^\beta (1-s)^{\beta+1}}, \quad B_0 = \text{const} > 0, \quad \beta = \text{const} \geq 1,$$

$$|p'_{cs}| \leq \frac{M_1}{s(1-s)}, \quad |p'_{c\theta}|^2 \leq \frac{M_1 \chi(s)}{s(1-s)}, \quad p_c^2 \leq M_1 \left(\frac{1}{s^\beta} + \frac{1}{(1-s)^\beta} \right),$$

$$M_1^{-1} (s(1-s))^{q_{32}} \leq \chi(s) \leq M_1 (s(1-s))^{q_{33}}, \quad |\chi(s)'_s| \leq M_1 (s(1-s))^{q_{34}},$$

где q_{32}, q_{33}, q_{34} – фиксированные вещественные параметры;

- 2) параметры задачи (1.7)–(1.11) удовлетворяют условиям

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \leq \theta^0(x) \leq M_1 < \infty,$$

функция g и начальные функции s^0, θ^0, v_i^0 удовлетворяют следующим условиям гладкости:

$$g \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)), \quad s^0, v_i^0, \theta^0 \in W_2^1(\Omega),$$

условиям согласования $v_i^0|_{x=0, x=1} = 0$ и дополнительно к (1.11) выполнено условие $\int_0^1 p_2(x, t) dx = 0$.

Тогда для всех $t \in [0, T]$, $T < \infty$, существует единственное обобщенное решение задачи (1.7)–(1.11), причем существуют числа

$$0 < m < M < 1, \quad 0 < m^1 < M^1 < \infty$$

такие, что

$$m \leq s(x, t) \leq M, \quad m^1 \leq \theta(x, t) \leq M^1, \quad (x, t) \in Q_T.$$

ТЕОРЕМА 3. Обобщенное решение задачи (1.7)–(1.11) с $g = 0, p_c = 0$ стабилизируется к решению стационарной задачи, решением которой является набор постоянных $u = 0, \theta = b = \text{const} > 0, s = c = \text{const} \in (0, 1)$, т.е. установлено, что

$$\begin{aligned} \int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 u_x^2 dx + \int_0^1 (\theta - b)^2 dx + \int_0^1 \theta_x^2 dx \\ + \int_0^1 (s - c)^2 dx + \int_0^1 s_x^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

2. Локальная разрешимость. Системе уравнений (1.1)–(1.5) можно придать следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(sv_1) &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_2) = 0, \quad \rho = \rho_2^0(1 - s), \quad p_2 = R\rho_2^0\theta, \\ \rho_1^0 s \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) &= -s \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s, \theta)) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_1(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + B(s)(v_2 - v_1) + \rho_1^0 sg, \\ \rho \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) &= -(1 - s) \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_2(s) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + B(s)(v_1 - v_2) + \rho g, \\ c_1 \rho_1^0 s \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) &+ c_2 \rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Пусть $y = y(\zeta, x, t)$ – решение задачи Коши

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = v_1(y, \zeta), \quad y|_{\zeta=t} = x.$$

Положим $\xi = y(\zeta, x, t)|_{\zeta=0}$ и возьмем за новые переменные ξ и t . Тогда $s(\xi, t) = s^0(\xi)J(\xi, t)$, где $J(\xi, t) = \partial \xi / \partial x$ – якобиан перехода [4; с. 47]. Переходя от (ξ, t) к массовым лагранжевым переменным $(\bar{x}, t)$ по правилу

$$s^0(\xi) d\xi = d\bar{x}, \quad \bar{x}(\xi) = \int_0^\xi s^0(\eta) d\eta \in [0, 1]$$

и сохраняя затем для переменной $\bar{x}$ обозначение x , получим

$$\frac{\partial s}{\partial t} + s^2 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v_2 - v_1)s \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho s \frac{\partial v_2}{\partial x} = 0,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} L_1(s, \rho, v_1, v_2, \theta) &= \rho_1^0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + s \frac{\partial p_2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(sp_c(s, \theta)) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(s\mu_1(s) \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{B(s)(v_2 - v_1)}{s} - \rho_1^0 g = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} L_2(s, \rho, v_1, v_2, \theta) &= \frac{\partial v_2}{\partial t} + (v_2 - v_1)s \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{s}{\rho}(1 - s) \frac{\partial p_2}{\partial x} \\ &\quad - \frac{s}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(s\mu_2(s) \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - \frac{B(s)(v_1 - v_2)}{\rho} - g = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$L_3(s, \rho, v_1, v_2, \theta) = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{c_2 \rho s (v_2 - v_1)}{c_1 \rho_1^0 s + c_2 \rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{s}{c_1 \rho_1^0 s + c_2 \rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(s\chi(s) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Краевые и начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} v_i|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, & \frac{\partial p_2}{\partial x} \Big|_{x=0, x=1} &= 0, \\ v_i|_{t=0} &= v_1^0(x), & p_2|_{t=0} &= p^0(x), & \theta|_{t=0} &= \theta^0(x), & s|_{t=0} &= s^0(x). \end{aligned}$$

Будем строить локальное обобщенное решение как предел приближенных решений $(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n)$, где v_1^n , v_2^n и θ^n представляются в виде конечных сумм:

$$\begin{aligned} v_1^n &= \sum_{i=1}^n u_i^n(t) \sin(\pi i x), & v_2^n &= \sum_{i=1}^n v_i^n(t) \sin(\pi i x), \\ \theta^n &= \sum_{j=0}^n \theta_j^n(t) \cos(\pi j x), & n &= 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

с неизвестными коэффициентами

$$u_i^n(t), v_i^n(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \theta_j^n(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Для определения последних предполагается, что уравнения (2.1)–(2.3) выполняются приближенно:

$$\int_0^1 L_1(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n) \sin(\pi i x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.4)$$

$$\int_0^1 L_2(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n) \sin(\pi i x) dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

$$\int_0^1 L_3(s^n, \rho^n, v_1^n, v_2^n, \theta^n) \cos(\pi j x) dx = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Функцию $s^n(x, t)$, $\rho^n(x, t)$ определим из решения задач

$$\frac{\partial s^n}{\partial t} + (s^n)^2 \frac{\partial v_1^n}{\partial x} = 0, \quad s^n|_{t=0} = s^0(x), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho^n}{\partial t} + (v_2^n - v_1^n)s^n \frac{\partial \rho^n}{\partial x} + \rho^n s^n \frac{\partial v_2^n}{\partial x} = 0, \quad \rho^n|_{t=0} = \rho^0(x). \quad (2.8)$$

Из (2.7) для $s^n(x, t)$ получим следующее соотношение:

$$s^n(x, t) = s^0(x) \left(1 + s^0(x) \int_0^t v_{1x}^n d\tau \right)^{-1}. \quad (2.9)$$

Задаче (2.8) придадим следующий вид:

$$\frac{\partial R^n}{\partial t} + U^n \frac{\partial R^n}{\partial x} = f_1(v_2^n, s^n, \rho^n) \equiv f_1^n, \quad R^n|_{t=0} = R^0(x), \quad (2.10)$$

где

$$R^n = \ln \rho^n, \quad U^n \equiv (v_2^n - v_1^n) s^n, \quad f_1^n = -s^n \frac{\partial v_2^n}{\partial x}.$$

Соответствующая (2.10) характеристическая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dy(t, \xi)}{dt} &= U^n(y(t, \xi), t), \quad y|_{t=0} = \xi, \\ \frac{d\bar{R}^n}{dt} &= f_1^n(y(t, \xi), t, \bar{R}^n), \quad \bar{R}^n|_{t=0} = R^0(\xi), \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $y(t, \xi) = x$, $\bar{R}^n(t, \xi) = R^n(y, t)$. Для $I \equiv \partial y(t, \xi) / \partial \xi$ имеем

$$I = \exp \int_0^t \frac{\partial U^n(y(\tau, \xi), \tau)}{\partial y} d\tau = \exp \int_0^t (v_2^n - v_1^n)_x s^n + (v_2^n - v_1^n) s_x^n d\tau.$$

Затем (2.9) подставим в (2.4)–(2.6), полагая при этом

$$y_i^n = \int_0^t u_i^n d\tau, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда $u_i^n(t)$, $v_i^n(t)$, $\theta_j^n(t)$, y_i^n находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_i^n}{dt} &= \Phi_i^n(u_1^n, \dots, u_n^n; v_1^n, \dots, v_n^n; \theta_0^n, \dots, \theta_n^n; y_1^n, \dots, y_n^n; \rho^n), \\ u_i^n(0) &= 2 \int_0^1 u^0(x) \sin(\pi i x) dx, \\ \frac{dv_i^n}{dt} &= K_i^n(u_1^n, \dots, u_n^n; v_1^n, \dots, v_n^n; \theta_0^n, \dots, \theta_n^n; v_1^n, \dots, v_n^n; \rho^n), \\ v_i^n(0) &= 2 \int_0^1 v^0(x) \sin(\pi i x) dx, \\ \frac{d\theta_j^n}{dt} &= \lambda_j \Psi_j^n(u_1^n, \dots, u_n^n; v_1^n, \dots, v_n^n; \theta_0^n, \dots, \theta_n^n; v_1^n, \dots, v_n^n; \rho^n), \\ \theta_0^n(0) &= 2 \int_0^1 \theta^0(x) dx, \quad \theta_j^n(0) = 2 \int_0^1 \theta^0(x) \cos(\pi j x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{dy_k}{dt} &= u_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Здесь $\lambda_0 = 1$, $\lambda_j = 2$, $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\begin{aligned}\Phi_i^n &= 2 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(s^n \mu_1(s^n) \frac{\partial v_1^n}{\partial x} \right) - s^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^n}{1-s^n} \theta^n R \right) - \frac{\partial}{\partial x} (s^n p_c(s^n, \theta^n)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(s^n)(v_2^n - v_1^n)}{s^n} + \rho_1^0 g \right] \sin(\pi i x) dx, \\ K_i^n &= 2 \int_0^1 \left[\frac{s^n}{\rho^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(s^n \mu_2(s^n) \frac{\partial v_2^n}{\partial x} \right) - \frac{s^n(1-s^n)}{\rho^n} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho^n}{1-s^n} \theta^n R \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{B(s^n)(v_1^n - v_2^n)}{\rho^n} - (v_2^n - v_1^n) s^n \frac{\partial v_2^n}{\partial x} + g \right] \sin(\pi i x) dx, \\ \Psi_j^n &= \int_0^1 \left[\frac{1}{(c_1 \rho_1^0 + c_2 \rho^n / s^n)} \frac{\partial}{\partial x} \left(s^n \chi(s^n) \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right) - \frac{c_2 \rho^n (v_2^n - v_1^n)}{c_1 \rho_1^0 + c_2 \rho^n / s^n} \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \right] \cos(\pi j x) dx.\end{aligned}$$

Таким образом, приближенное решение $(v_1^n, v_2^n, s^n, \rho^n, \theta^n)$ удовлетворяет задаче Коши (2.11), (2.12), локальная разрешимость этой задачи при каждом фиксированном n следует из теоремы Коши–Пикара [6].

Укажем такое значение t_0 , для которого данная задача на интервале $[0, t_0]$ разрешима для всех n . Одно из условий, с учетом которого в дальнейшем выбирается величина промежутка t_0 , связано с требованием положительности $s^n(x, t)$, $\rho^n(x, t)$. Поскольку

$$0 < m_0 \leq s^0(x) \leq M_0 < 1, \quad 0 < m_1 \leq \rho^0(x) \leq M_1 < \infty,$$

потребуем чтобы для $s^n(x, t)$ и $\rho^n(x, t)$ выполнялись соотношения

$$0 < \frac{m_0}{2} \leq s^n(x, t) \leq \frac{M_0 + 1}{2} < 1, \quad \frac{m_1}{2} \leq \rho^n(x, t) \leq 2M_1, \quad (2.13)$$

для всех n при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, t_0]$. Кроме того, из (2.7), (2.10) и (2.13) получим

$$\begin{aligned}|s_x^n| &\leq C \left(1 + \int_0^t |v_{1xx}^n| d\tau \right), \\ |\rho_x^n| &\leq C \left(1 + \int_0^t |s_x^n| |v_{2x}^n| d\tau + \int_0^t |v_{2xx}^n| d\tau \right).\end{aligned} \quad (2.14)$$

Положим

$$\begin{aligned}z_n(t) &= \|v_1^n(t)\|^2 + \|v_2^n(t)\|^2 + \|\theta^n(t)\|^2 + \|v_{1x}^n(t)\|^2 + \|v_{2x}^n(t)\|^2 + \|\theta_x^n(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{\nu^0}{2} \left(\int_0^t \|v_{1xx}^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|v_{2xx}^n(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|\theta_{xx}^n(\tau)\|^2 d\tau \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\nu^0 &\equiv \min \left\{ k_0^{-1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_1+1} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_2}, \frac{2k_0^{-1}}{m_1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_7+2} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_8}, \right. \\ &\quad \left. \frac{2k_0^{-1}}{m_0+m_1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_{22}+2} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_{23}} \right\}.\end{aligned}$$

Каждое из уравнений (2.4) умножим на $u_i^n(t)$, просуммируем по i от 1 до n , затем каждое из уравнений (2.4) умножим на $(i\pi)^2 u_i^n(t)$, просуммируем по i от 1 до n и с учетом оценок для s_x^n, ρ_x^n из (2.14) получим неравенства [7]:

$$\frac{d}{dt} \|v_1^n(t)\|^2 + \nu_0 \|v_{1x}^n(t)\|^2 \leq C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t)),$$

$$\frac{d}{dt} \|v_{1x}^n(t)\|^2 + 2\nu_0 \|v_{1xx}^n(t)\|^2 \leq \sum_{i=4}^{11} \varepsilon_i \|v_{1xx}^n(t)\|^2 + C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t)).$$

Аналогичные неравенства получаем для скорости второй фазы

$$\frac{d}{dt} \|v_2^n(t)\|^2 + \nu_1 \|v_{2x}^n(t)\|^2 \leq C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t) + z_n^4(t) + z_n^5(t)),$$

$$\frac{d}{dt} \|v_{2x}^n(t)\|^2 + 2\nu_1 \|v_{2xx}^n(t)\|^2 \leq \sum_{i=18}^{25} \varepsilon_i \|v_{2xx}^n(t)\|^2 + C(\|g(t)\|^2 + z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t))$$

и для температуры

$$\frac{d}{dt} \|\theta^n(t)\|^2 + \nu_2 \|\theta_x^n(t)\|^2 \leq C(z_n(t) + z_n^2(t) + z_n^3(t)),$$

$$\frac{d}{dt} \|\theta_x^n(t)\|^2 + 2\nu_2 \|\theta_{xx}^n(t)\|^2 \leq \sum_{i=29}^{31} \varepsilon_i \|\theta_{xx}^n(t)\|^2 + C(z_n^2(t) + z_n^3(t) + z_n^4(t)).$$

Выбирая ν_0, ν_1, ν_2 из условия

$$\nu^0 \equiv \min \left\{ k_0^{-1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_1+1} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_2}, \frac{2k_0^{-1}}{m_1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_7+2} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_8}, \right. \\ \left. \frac{2k_0^{-1}}{m_0+m_1} \left(\frac{m_0}{2} \right)^{q_{22}+2} \left(\frac{1-M_0}{2} \right)^{q_{23}} \right\}$$

и складывая полученные выше оценки, выводим неравенство

$$\frac{dz_n}{dt} \leq C(\|g(t)\|^2 + z_n^5(t))$$

с независимой от n постоянной C . Откуда при

$$t_0 < \frac{1}{C^2} \left(z_n(0) + C \int_0^T \|g(\tau)\|^2 d\tau \right)^{-4}$$

следует неравенство

$$\max_{0 \leq t \leq t_0} \|v_{1x}^n(t)\|^2 + \max_{0 \leq t \leq t_0} \|v_{2x}^n(t)\|^2 + \max_{0 \leq t \leq t_0} \|\theta_x^n(t)\|^2 \\ + \int_0^{t_0} (\|v_{1xx}^n(t)\|^2 + \|v_{2xx}^n(t)\|^2 + \|\theta_{xx}^n(t)\|^2) dt \leq N \quad (2.15)$$

с постоянной N не зависящей от n . Тогда из (2.9), (2.10) выводим, что

$$\frac{m_0}{1 + 2^{1/2} M_0 N^{1/2} t_0^{3/4}} \leq s^n(x, t) \leq \frac{M_0}{1 - 2^{1/2} M_0 N^{1/2} t_0^{3/4}}, \\ m_1 e^{-((M_0+1)/2) 2^{1/2} N^{1/2} t_0^{3/4}} \leq \rho^n(x, t) \leq M_1 e^{((M_0+1)/2) 2^{1/2} N^{1/2} t_0^{3/4}}.$$

Если выбрать

$$t_0 \leq \min \left\{ \left(\frac{1 - M_0}{(1 + M_0)2^{1/2}M_0N^{1/2}} \right)^{4/3}, \left(\frac{2^{1/2} \ln 2}{(M_0 + 1)N^{1/2}} \right)^{4/3}, \frac{1}{C^2} \left(z_n(0) + C \int_0^T \|g(\tau)\|^2 d\tau \right)^{-4} \right\},$$

то получаем неравенства (2.13) при $x \in [0, 1]$, $t \in [0, t_0]$.

Оценки (2.15) позволяют выделить из последовательностей $\{s^n\}$, $\{v_1^n\}$, $\{v_2^n\}$, $\{\rho^n\}$, $\{\theta^n\}$ сходящиеся подпоследовательности. Из (2.15) и из уравнений (2.10), (2.12) следуют оценки для s_t , ρ_t , v_{1t} , v_{2t} , θ_t . Полученные равномерные оценки по n позволяют выделить слабо сходящиеся подпоследовательности:

$$\begin{aligned} v_1^n, v_2^n, \theta^n, v_{1x}^n, v_{2x}^n &\rightharpoonup v_1, v_2, \theta, v_{1x}, v_{2x} && \text{слабо в } L_2(0, t_0; L_2(\Omega)), \\ v_{1xx}^n, v_{2xx}^n, v_{1t}^n, v_{2t}^n &\rightharpoonup v_{1xx}, v_{2xx}, v_{1t}, v_{2t} && \text{слабо в } L_2(Q_{t_0}), \quad Q_{t_0} = (0, t_0) \times (0, 1). \end{aligned}$$

Из равномерных оценок v_1^n, v_2^n в $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$, $W_2^1(Q_T)$ и v_{1t}^n, v_{2t}^n в $L_2(Q_{t_0})$ можно выделить подпоследовательности v_1^n, v_2^n , сильно сходящиеся к v_1, v_2 в пространстве $L_2(0, t_0; L_2(\Omega))$. Из (2.14), (2.15) очевидно вытекает сильная сходимость s^n, ρ^n к s, ρ в $L_2(Q_{t_0})$ [8]. В качестве примера рассмотрим одно из нелинейных слагаемых в (2.1)

$$A = \int_{Q_{t_0}} s^n \mu_1(s^n) v_{1xx}^n F dx dt \rightarrow \int_{Q_{t_0}} s \mu_1(s) v_{1xx} F dx dt, \quad n \rightarrow \infty,$$

для всех $F \in L_2(Q_T)$. Предельный переход в данном слагаемом возможен ввиду слабой сходимости v_{1xx}^n , сильной сходимости s^n и непрерывности функции $\mu_1(s^n)$.

Предельным переходом в равенствах (2.4)–(2.7), (2.10) показывается, что предельные функции $s, v_1, v_2, \rho, \theta$ дают обобщенное решение задачи (1.1)–(1.6) на промежутке $[0, t_0]$. Теорема 1 доказана.

3. Случай несжимаемых сред. Глобальная разрешимость. Существование решения на малом промежутке времени $[0, t_0]$ для системы уравнений (1.7)–(1.10) доказывается с небольшими изменениями так же, как в теореме 1 данной статьи. Поэтому основная трудность связана с получением глобальных априорных оценок, не зависящих от величины t_0 . После этого локальное решение можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$.

Следует также отметить, что наличие g в уравнении (1.8) не вносит никаких принципиальных трудностей в дальнейшие исследования, если $g(x, t)$ – достаточно гладкая функция. Поэтому для краткости ограничимся случаем $g = 0$.

ЛЕММА 1. При выполнении условий теоремы 2 для решения задачи (1.7)–(1.11) для любого $t \in [0, T]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(su^2 + \frac{s_x^2}{s} + \frac{1}{s^\beta} + \frac{1}{(1-s)^\beta} + s\theta^2 \right) dx \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 \left(su_x^2 + \frac{Bu^2}{(1-s)^2} + \chi(s)\theta_x^2 \right) dx d\tau \leq C_1, \\ &0 < m \leq s(x, t) \leq M < 1, \quad 0 < m^1 \leq \theta(x, t) \leq M^1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где постоянные C_1, m, M, m^1, M^1 зависят только от данных задачи (1.7)–(1.11) и не зависят от t_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $sv_1 + (1-s)v_2 = 0$ для всех $x \in [0, 1], t \in [0, t_0]$, то полагая $v_1 \equiv u$ и учитывая (1.9), приходим к следующему уравнению для $u(x, t)$:

$$\rho_1^0 s \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_1 s \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -(sp_c)_x - \frac{B(s)u}{(1-s)^2}. \quad (3.2)$$

Стандартным образом из (3.2) получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \rho_1^0 s u^2 dx + \int_0^t \int_0^1 \left[\frac{3}{2} \mu_1 s u_x^2 + \frac{B u^2}{(1-s)^2} \right] dx d\tau \\ & \leq \int_0^1 \rho_1^0 s^0 (u^0)^2 dx + \frac{2}{\mu_1} \int_0^t \int_0^1 s p_c^2 dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В уравнении (3.2) производную u_x заменим из уравнения (1.7). Умножим преобразованное уравнение (3.2) на s_x/s . После несложных преобразований, учитывая оценку

$$\rho_1^0 u s_s \leq \frac{\mu_1}{4s} s_x + \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} s u^2,$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\mu_1}{s} s_x^2 dx - \rho_1^0 \int_0^t \int_0^1 s u_x^2 dx d\tau \\ & \leq \int_0^1 \left[\frac{3\mu_1}{4s^0} (s_x^0)^2 + \frac{(\rho_1^0)^2}{2\mu_1} s^0 (u^0)^2 \right] dx + \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} \int_0^1 s u^2 dx \\ & \quad - \int_0^t \int_0^1 \frac{s_x}{s} (sp_c)_x dx d\tau + I_1(t), \end{aligned}$$

в котором

$$I_1(t) = - \int_0^t \int_0^1 \frac{s_x}{s(1-s)^2} B(s)u dx d\tau.$$

В силу (1.7) для любой достаточно гладкой функции $\psi_\beta(s)$ справедливо равенство вида

$$s\psi_\beta''(s)v_1 s_x = (\psi_\beta(s))_t + (s\psi_\beta'(s)v_1)_x.$$

В качестве ψ_β возьмем решение уравнения

$$\psi_\beta'' = K_0(s)s^{-2-\beta}(1-s)^{-3-\beta}, \quad \psi_\beta' \equiv \frac{d\psi_\beta}{dx}.$$

При $\beta \geq 1$ и $K_0 \in [k_0^{-1}, k_0], k_0 = \text{const} > 0$, имеем

$$\psi_\beta(s) \geq C_2(s^{-\beta} + (1-s)^{-1-\beta}).$$

Кроме того,

$$I_1(t) = - \int_0^1 \psi_\beta(s(x, t)) dx + \int_0^1 \psi_\beta(s^0(x)) dx.$$

Учитывая оценку

$$\frac{s_x}{s}(sp_c)_x \leq \frac{s_x^2}{s}|(sp_c)'_s| + \frac{\varepsilon_1|(p_c)'_\theta|^2}{2\chi} \frac{s_x^2}{s} + \frac{1}{2\varepsilon_1} \chi \theta_x^2,$$

получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\frac{\mu_1}{s} s_x^2 + \psi_\beta(s(x, t)) \right) dx \\ & \leq \int_0^1 \left[\frac{3\mu_1}{s^0(x)} (s_x^0(x))^2 + 2 \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} s^0(x) (u^0(x))^2 + 4\psi_\beta(s^0(x)) \right] dx \\ & \quad + 4 \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} \int_0^1 s u^2 dx + 4\rho_1^0 \int_0^t \int_0^1 s u_x^2 dx d\tau + 2\varepsilon_1 \int_0^t \int_0^1 \frac{s_x^2 |(p_c)'_\theta|^2}{\chi s} dx d\tau \\ & \quad + \frac{2}{\varepsilon_1} \int_0^t \int_0^1 \chi \theta_x^2 dx d\tau + 4 \int_0^t \int_0^1 \frac{|(sp_c)'_s| s_x^2}{s} dx d\tau. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Уравнение (1.10) умножим на функцию

$$(\theta^k)^{2n-1}, \quad \theta^k(x, t) = \max\{\theta(x, t) - k, 0\}, \quad k = \max_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x),$$

затем полученное равенство проинтегрируем по Q_t . Получим

$$\frac{1}{2n} \int_0^1 (s^{1/(2n)} \theta^k)^{2n} dx + (2n-1) \int_0^t \int_0^1 \chi(s) (\theta^k)^{2n-2} \left(\frac{\partial \theta^k}{\partial x} \right)^2 dx d\tau = 0$$

и, следовательно, $\theta^k(x, t) = 0$, т.е.

$$\theta(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x).$$

Рассматривая функцию

$$\theta^l(x, t) = \max\{-\theta(x, t) - l, 0\}, \quad l = -\min_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x),$$

выводим оценку

$$\theta(x, t) \geq \min_{0 \leq x \leq 1} \theta^0(x).$$

Наконец, уравнение (1.10) умножим на $\theta(x, t)$ и результат проинтегрируем по Q_t с учетом граничных условий (1.11). Получим

$$\int_0^1 s \theta^2 dx + 2 \int_0^t \int_0^1 \chi(s) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx d\tau = \int_0^1 s^0 (\theta^0)^2 dx. \quad (3.5)$$

Неравенство (3.3) умножим на $\lambda = \text{const} > 0$ и сложим с неравенствами (3.4) и (3.5). В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left(\rho_1^0 s u^2 + \frac{\mu_1}{s} (s_x)^2 + \psi_\beta(s(x, t)) + s \theta^2 \right) dx + \int_0^t \int_0^1 s (u_x)^2 \left(\frac{3\mu_1 \lambda}{2} - 4\rho_1^0 \right) dx d\tau \\ & \quad + \int_0^t \int_0^1 \left(\frac{B u^2}{(1-s)^2} + \left(2 - \frac{2}{\varepsilon_1} \right) \chi(s) \theta_x^2 \right) dx d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^1 \left(\lambda \rho_1^0 s^0 (u^0)^2 + \frac{3\mu_1}{s^0(x)} (s_x^0(x))^2 + 2 \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} s^0(x) (v^0)^2 + 4\psi_\beta(s^0(x)) + s^0(\theta^0)^2 \right) dx \\
&\quad + \frac{\lambda}{\mu_1} \int_0^t \int_0^1 s p_c^2 dx d\tau + \frac{4(\rho_1^0)^2}{\mu_1} \int_0^t \int_0^1 s u^2 dx d\tau + 4 \int_0^t \int_0^1 \frac{(s p_c)'_s s_x^2}{s} dx d\tau \\
&\quad + 2\varepsilon_1 \int_0^t \int_0^1 \frac{(p_c)'_\theta s_x^2}{\chi s} dx d\tau.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Выберем $\varepsilon_1 = 2$, $\lambda = 3\rho_1^0/\mu_1$ и положим

$$y(t) = \int_0^1 \left(\rho_1^0 s u^2 + \frac{\mu_1}{s} s_x^2 + \psi_\beta + s\theta^2 \right) dx.$$

Тогда из (3.6) получим неравенство

$$y(t) \leq C_3 \left(1 + \int_0^t y(\tau) d\tau \right)$$

и, следовательно, $y(t) \leq C_3 e^{C_3 t}$. Поэтому первая часть леммы 1 доказана. Тем самым, функция

$$F(s) = \int_{s(a(t),t)}^{s(x,t)} \left(\frac{\Psi_\beta(\tau)}{\tau} \right)^{1/2} d\tau, \quad \text{где } s(a(t),t) = s^0(a(t)), \quad \Psi_\beta = \tau^{-\beta}(1-\tau)^{-\beta-1},$$

ограничена. Следовательно, при $\beta \geq 1$ существуют числа m и M , зависящие от данных задачи и T , но не зависящие от t_0 и такие, что

$$0 < m \leq s(x,t) \leq M < 1, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Тем самым, лемма 1 доказана.

Уравнение для температуры (1.10) умножим на θ_{xx}/s и проинтегрируем по Ω . Имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\theta_x\|^2 + \int_0^1 \frac{\chi(s)}{s} \theta_{xx}^2 dx = \int_0^1 u \theta_x \theta_{xx} dx - \int_0^1 \frac{\chi'_s}{s} s_x \theta_x \theta_{xx} dx.$$

Для правой части справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 u \theta_x \theta_{xx} dx \right| + \left| \int_0^1 \frac{\chi'_s}{s} s_x \theta_x \theta_{xx} dx \right| \leq \varepsilon_2 \|\theta_{xx}\|^2 + \frac{C_4}{\varepsilon_2} \|\theta_x\|^2.$$

Выбирая ε_2 достаточно малым, выводим

$$\frac{d}{dt} \|\theta_x\|^2 + \|\theta_{xx}\|^2 d\tau \leq C_5 (1 + \|\theta_x\|^2 d\tau) \leq C_6, \tag{3.7}$$

где C_6 не зависит от t .

Из уравнения (3.2) умножением на u_{xx} , поступая аналогично доказательству (3.7), нетрудно получить оценку

$$\frac{d}{dt} \|u_x\|^2 dx + \|u_{xx}\|^2 dx \leq C_7 (1 + \|u_x\|^2) \leq C_8, \tag{3.8}$$

где C_8 не зависит от t .

ЛЕММА 2. В условиях леммы 1 для всех $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |R(x, t)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \leq C_9 \left[\sup_{0 \leq x \leq 1} |R^0(x)| + \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)| \right], \quad (3.9)$$

где C_9 зависит только от $m, M, \mu_1, \beta, \rho_1^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.7), (1.8) следует, что функция $R \equiv \rho_1^0 u + (\mu_1/s)s_x$ удовлетворяет уравнению

$$sR_t + suR_x = -(sp_c)_x - \frac{Bu}{(1-s)^2}. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) умножим на $R^{2n-1}(x, t)$, $n > 0$, и полученное равенство проинтегрируем по $x \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{d}{dt} \int_0^1 sR^{2n} dx = & - \int_0^1 \frac{BR^{2n-1}u}{(1-s)^2} dx - \int_0^1 \frac{s}{\mu_1} (sp_c)'_s R^{2n} dx \\ & + \int_0^1 \frac{\rho_1^0 s}{\mu_1} (sp_c)'_s R^{2n-1} u dx - \int_0^1 (sp_c)'_{\theta} \theta_x R^{2n-1} dx, \end{aligned}$$

в котором каждое слагаемое правой части оценивается с помощью неравенства Гёльдера. В результате приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \frac{d}{dt} \int_0^1 sR^{2n} dx \leq & C_{10} \left[\left(\int_0^1 |sR|^{2n} dx \right)^{(2n-1)/(2n)} \left(\int_0^1 |u|^{2n} dx \right)^{1/(2n)} \right. \\ & + \left(\int_0^1 |sR|^{2n} dx \right)^{(2n-1)/(2n)} \left(\int_0^1 |\theta_x|^{2n} dx \right)^{1/(2n)} \\ & \left. + \left(\int_0^1 |sR|^{2n} dx \right)^{(2n-1)/(2n)} \left(\int_0^1 |R|^{2n} dx \right)^{1/(2n)} \right]. \end{aligned}$$

Для функции $y(t) = \left(\int_0^1 sR^{2n} dx \right)^{1/2n}$ получим неравенство вида

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq C_{10} \left[\left(\int_0^1 |u|^{2n} dx \right)^{1/(2n)} + \left(\int_0^1 |\theta_x|^{2n} dx \right)^{1/(2n)} + y(t) \right].$$

Аналогично доказывается неравенство для $u(x, t)$. Из имеющихся оценок в результате получаем неравенство (3.9).

Следовательно, $u(x, t)$, $R(x, t)$ и $\theta(x, t)$ являются ограниченными функциями. Следствием оценок (3.1), (3.6), (3.9) является результат теоремы 2.

Стабилизация решения. Пусть в системе (1.7)–(1.11) дополнительно имеем $p_c=0$. В этом случае набор постоянных $u = 0$, $\theta = b = \text{const} > 0$, $s = c = \text{const}$, $0 < c < 1$, является стационарным решением.

Из доказательства леммы 1 следуют равномерные по времени оценки

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(su^2 + \frac{s_x^2}{s} + \psi_\beta(s(x, t)) + s\theta^2 \right) dx + \int_0^t \int_0^1 \left(su_x^2 + \frac{Bu^2}{(1-s)^2} + \chi(s)\theta_x^2 \right) dx d\tau \\ \leq \int_0^t \int_0^1 \left(\rho_1^0 s^0 (u^0)^2 + \frac{3\mu_1}{s^0(x)} (s_x^0(x))^2 \right. \\ \left. + 2 \frac{(\rho_1^0)^2}{\mu_1} s^0(x) (v^0)^2 + 4\psi_\beta(s^0(x)) + s^0(\theta^0)^2 \right) dx \leq C_{11}, \quad (3.11) \end{aligned}$$

где

$$0 < m \leq s(x, t) \leq M < 1, \quad x \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad 0 < m^1 \leq \theta(x, t) \leq M^1.$$

Далее, из уравнения (3.2) с $p_c = 0$ легко получить неравенство вида

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |u(x, t)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |u^0(x)|.$$

После этого из уравнения (3.10) с $p_c = 0$ получим неравенство

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |R(x, t)| \leq \sup_{0 \leq x \leq 1} |R^0(x)| + \int_0^t \sup_{0 \leq x \leq 1} |u| d\tau.$$

Оценим норму скорости $u(x, t)$. Из неравенства (3.11) легко следует

$$\int_0^1 u^2 dx \leq e^{-C_{12}t}, \quad (3.12)$$

где C_{12} не зависит от t . Поэтому

$$\int_0^t \sup_{0 \leq x \leq 1} |u| d\tau \leq \sqrt{2} \int_0^t \|u\|^{1/2} \|u_x\|^{1/2} d\tau \leq C_{13} \int_0^t e^{-C_{12}\tau} \|u_x\|^{1/2} d\tau < \frac{\sqrt{C_9 C_{13}}}{C_{12}}.$$

Добавим, что из (3.7) и (3.8) следует оценка

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \int_0^1 |\theta_x|^2 dx \right| dt \leq C_{14}, \quad \int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \int_0^1 |u_x|^2 dx \right| dt \leq C_{15}.$$

Учитывая неравенства (3.11) и (3.12), получим, что

$$\int_0^1 |\theta_x|^2 dx \rightarrow 0, \quad \int_0^1 |u_x|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

т.е. $u(x, t) \rightarrow 0$, $\theta(x, t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \infty$.

Из уравнения (3.10) с $p_c = 0$ получим

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 s R^2 dx = - \int_0^1 \frac{B u R}{(1-s)^2} dx.$$

Затем, используя оценку (3.12) и равномерную ограниченность $\sup_{0 \leq x \leq 1} |R(x, t)|$ по t , нетрудно показать, что

$$\int_0^\infty \left| \frac{d}{dt} \int_0^1 s R^2 dx \right| dt \leq C_{16}.$$

Так как $R \equiv \rho_1^0 u + (\mu_1/s) s_x$ и $u(x, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то $\int_0^1 |s_x|^2 dx \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $s(x, t) \rightarrow c$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, решение (s, u, θ) нестационарной задачи (1.7)–(1.11) с $p_c = 0$, $g = 0$ сходится при $t \rightarrow \infty$ к решению стационарной задачи

$$u = 0, \quad s = c = \int_0^1 s^0(x) dx, \quad \theta = b = \left(\int_0^1 s^0(x) (\theta^0(x))^2 dx \right) \left(\int_0^1 s^0(x) dx \right)^{-1}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. K. Gard, J. W. Pritchett, “Dynamics of gas-fluidized beds”, *J. Appl. Phys.*, **46**:10 (1975), 4493–4500.
- [2] А. А. Папин, И. Г. Ахмерова, “Разрешимость системы уравнений одномерного движения теплопроводной двухфазной смеси”, *Матем. заметки*, **87**:2 (2010), 246–261.
- [3] M. Göz, “Existence and uniqueness of time-dependent spatially periodic solutions of fluidized bed equations”, *Z. Angew. Math. Mech.*, **71**:6 (1991), 750–751.
- [4] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Изд-во «Наука», Сиб. отд., Новосибирск, 1983.
- [5] Я. И. Канель, “Об одной модельной системе уравнений одномерного движения газа”, *Дифферен. уравнения*, **4**:4 (1968), 721–734.
- [6] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970.
- [7] И. Г. Ахмерова, “Разрешимость краевой задачи для уравнений одномерного движения двухфазной смеси”, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, **5**:1 (2012), 25–35.
- [8] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol. 2. Compressible Models*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

И. Г. Ахмерова

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: iakhmerova@mail.ru

Поступило

12.07.2013

А. А. Папин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: papin@math.asu.ru