Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Тюрин, К обратимости линейных дифференциальных операторов с замкнутой областью значений и пуассоновскими коэффициентами, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 143–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1035>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 16:37:40

УДК 517

К ОБРАТИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТЬЮ ЗНАЧЕНИЙ И ПУАССОНОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. М. Тюрин

Изучаются свойства обратимости и инъективности линейных дифференциальных операторов с замкнутой областью значений и пуассоновскими коэффициентами с позиции их эквивалентности в некоторых пространствах векторфункций на оси.

Библиография: 6 названий.

Пусть X – банахово пространство; $C = C(\mathbb{R}, X)$ – нормированное пространство непрерывных ограниченных функций $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ с $\sup$ -нормой; $M^p = M^p(\mathbb{R}, X)$ – нормированное пространство сильно измеримых функций $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ с нормой

$$\|u\|_{M^p} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \|u(s)\|^p ds \right)^{1/p} < \infty, \quad p \geq 1;$$

$L^p = L^p(\mathbb{R}, X)$ – пространство Лебега сильно измеримых функций $u: \mathbb{R} \rightarrow X$ с обычной нормой ($1 \leq p \leq \infty$); $A(t) \in C(\mathbb{R}, \text{Hom}(X, X))$, где $\text{Hom}(X, X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X , с равномерной топологией; $F = F(\mathbb{R}, X)$ – одно из пространств C, M^p, L^p ; $F_* = F(\mathbb{R}, X^*)$ (X^* – сопряженное пространство к X).

Рассмотрим выражение $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$. Ему отвечает замкнутый неограниченный дифференциальный оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$, если область определения задается равенством

$$D(\mathcal{L}, F) = \{u \mid u \in F, \mathcal{L}u \in F\}.$$

Следуя [1], оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ будем называть *корректным*, если существует постоянная $k > 0$ такая, что для любого $u \in D(\mathcal{L}, F)$ справедлива оценка

$$\|u\|_F \leq k \|\mathcal{L}u\|_F. \quad (1)$$

Если оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ обратим, т.е. уравнение $\mathcal{L}u = f$ однозначно разрешимо в F при любом $f \in F$, то по теореме Банаха обратный оператор $\mathcal{L}^{-1}: F \rightarrow D(\mathcal{L}, F)$ непрерывен и, следовательно, имеет место оценка (1), т.е. оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ корректен. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Из корректности оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$, вообще говоря, не следует его обратимость (см. [1], [2, с. 174, 176]).

В конечномерном пространстве X для оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ с устойчивым по Пуассону коэффициентом $A(t)$ обратимость эквивалентна его корректности [1], [2, с. 176]. В данной заметке изучается обратимость дифференциальных операторов такого вида, имеющих замкнутую область значений $\text{Im } \mathcal{L}$. Отметим, что конкретные условия обратимости линейных дифференциальных операторов $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ приведены в [3].

Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ назовем Φ_0 -оператором, если область значений $\text{Im } \mathcal{L}$ и линейное многообразие

$$X_{0F} = \{u(0) \mid \mathcal{L}u = 0, u \in F\} \subseteq X$$

замкнуты.

Отметим, что многообразие X_{0F} может быть незамкнутым [4, с. 118]. В дальнейшем всюду считаем $A(t)$ устойчивой по Пуассону функцией.

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ является Φ_0 -оператором тогда и только тогда, когда он корректен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ есть Φ_0 -оператор. Так как область значений $\text{Im } \mathcal{L}$ замкнута и многообразие X_{0F} также замкнуто, из теоремы Банаха об открытом отображении вытекает существование постоянной $\gamma > 0$ такой, что для любой функции $u \in D(\mathcal{L}, F)$ с условием $u(-\xi) = 0$ ($\xi \in \mathbb{R}$) имеет место неравенство

$$\|u\|_F \leq \gamma \|\mathcal{L}_\xi u\|_F, \quad \mathcal{L}_\xi = \frac{d}{dt} - A(t + \xi) \quad (2)$$

(подробнее см. [4, с. 117, 147]).

Возьмем $u \in D(\mathcal{L}, F)$, $-\xi \neq \omega \in \mathbb{R}$ и положим

$$v(t) = (u(t + \xi) - u(t + \xi - \omega)) \varphi(t, \omega, T) \sin \frac{\pi(t + \xi)}{2(\omega + \xi)},$$

где $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ есть гладкое отображение с носителем $\text{supp } \varphi \subseteq [\omega - 2T, \omega + 2T]$, причем $\varphi(t, \omega, T) = 1$ при $|t - \omega| \leq T$, а производная по t удовлетворяет неравенству $|\dot{\varphi}| \leq 2/T$ ($T > 0$). Очевидно, $v \in D(\mathcal{L}, F)$ и $v(-\xi) = 0$. Поэтому для функции v справедлива оценка (2), из которой при $F = L^p$ ($p \geq 1$) имеем

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p} &\leq \gamma \left(\int_{-2T}^{2T} \|f(t + \xi + \omega) - f(t + \xi)\|^p dt \right)^{1/p} + \frac{4\gamma}{T} \|u\|_{L^p} + \frac{\pi\gamma}{|\omega + \xi|} \|u\|_{L^p} \\ &\quad + \gamma \sup_{|t| \leq 2T} \|A(t + \xi + \omega) - A(t + \xi)\| \cdot \|u\|_{L^p}, \quad f = \mathcal{L}u. \end{aligned} \quad (3)$$

Далее воспользуемся известным неравенством для решения линейного дифференциального уравнения

$$\|u(t)\| \leq \left(l^{-1} \int_I \|u(t)\| dt + \int_I \|f(t)\| dt \right) \exp \left(\int_I \|A(t)\| dt \right), \quad (4)$$

где I – интервал длины l , содержащий точку $t \in \mathbb{R}$. Применение оценок (3), (4) к функции v приводит к формуле

$$\begin{aligned} \|u(\xi + \omega) - u(\xi)\| &\leq \left(\frac{s_1}{T} + \frac{s_2}{|\omega + \xi|} \right) \|u\|_{L^p} \\ &\quad + s_3 \left(\int_{-2T}^{2T} \|f(t + \xi + \omega) - f(t + \xi)\|^p dt \right)^{1/p} \\ &\quad + s_3 \sup_{|t| \leq 2T} \|A(t + \xi + \omega) - A(t + \omega)\| \cdot \|u\|_{L^p}, \quad (5) \\ s_1 &= 4\gamma + 4 \exp(\|A\|_C), \quad s_2 = \frac{\pi}{4} s_1, \quad s_3 = \frac{s_1}{4}. \end{aligned}$$

Положив в (5) $f = 0$, $\xi = 0$, имеем

$$\|u(\omega) - u(0)\| \leq \left(\frac{s_1}{T} + \frac{s_2}{|\omega|} \right) \|u\|_{L^p} + s_3 \sup_{|t| \leq 2T} \|A(t + \omega) - A(t)\| \cdot \|u\|_{L^p}. \quad (6)$$

Предположим, что $X_{0L^p} \neq 0$, т.е. однородное уравнение $\mathcal{L}u = 0$ имеет ненулевое решение $u \in L^p$. Поскольку $A(t)$ – устойчивая по Пуассону операторная функция, существует последовательность $\omega_j \in \mathbb{R}$ такая, что $\omega_j \rightarrow \infty$ и $A(t + \omega_j)$ локально сходится к $A(t)$ в $C(\mathbb{R}, \text{Hom}(X, X))$ при $j \rightarrow \infty$. Так как функция $v_j = u(t) \sin(\pi t / (2\omega_j))$ принадлежит $D(\mathcal{L}, L^p)$ и $v_j(0) = 0$, согласно (2)

$$\|v_j\|_{L^p} \leq \frac{\pi\gamma}{2\omega_j} \|u\|_{L^p}.$$

Отсюда по формуле (4) имеем

$$\|v_j(\omega_j)\| \leq \left(\|v_j\|_{L^p} + \frac{\pi}{2\omega_j} \|u\|_{L^p} \right) \exp(\|A\|_C) \leq \left(\frac{\pi\gamma}{2\omega_j} + \frac{\pi}{2\omega_j} \right) \|u\|_{L^p} \exp(\|A\|_C). \quad (7)$$

В силу замкнутости X_{0L^p} с некоторой постоянной $s > 0$ на основе (6), (7) получаем неравенства

$$\begin{aligned} s^{-1} \|u\|_{L^p} \leq \|u(0)\| &\leq \left(\frac{s_1}{T} + \frac{s_2}{\omega_j} \right) \|u\|_{L^p} + s_3 \sup_{|t| \leq 2T} \|A(t + \omega_j) - A(t)\| \cdot \|u\|_{L^p} \\ &\quad + \left(\frac{\pi\gamma}{2\omega_j} + \frac{\pi}{2\omega_j} \right) \|u\|_{L^p} \exp(\|A\|_C). \quad (8) \end{aligned}$$

Предельный переход по $j \rightarrow \infty$ в (8) дает $T \leq ss_1$ при любом $T > 0$, а это невозможно. Следовательно, $X_{0L^p} = 0$ и $\ker(\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p)$. Так как область значений оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ замкнута, по теореме Банаха он корректен.

Случаи $F = M^p$ ($p \geq 1$), $F = L^\infty$, $F = C$ рассматриваются аналогично.

Если оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ корректен, то его область значений, очевидно, замкнута, а многообразие $X_{0F} = 0$, т.е. $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ является Φ_0 -оператором. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Сюръективный оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ обратим, если и только если множество X_{0F} замкнуто в X .

СЛЕДСТВИЕ 2. В конечномерном пространстве X Φ_+ -оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ обратим.

Кроме теоремы 1 при доказательстве этого следствия нужно воспользоваться результатом работы [5] об эквивалентности свойств корректности для операторов $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ ($F \subset \{C, L^\infty, M^p, L^p\}$, $p \geq 1$).

СЛЕДСТВИЕ 3. Приводимые ниже условия равносильны:

- 1) оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ есть Φ_0 -оператор;
- 2) оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ корректен;
- 3) оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, F) \rightarrow F$ является Φ_+ -оператором.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если один из операторов $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^\infty) \rightarrow L^\infty$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, M^p) \rightarrow M^p$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ ($p \geq 1$) есть Φ_+ -оператор, то остальные тоже Φ_+ -операторы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ является Φ_+ -оператором. Согласно следствию 3 этот оператор корректен. Но тогда остальные дифференциальные операторы также корректны [5] (см. доказательство следствия 2), а следовательно, есть Φ_+ -операторы.

ТЕОРЕМА 2. В рефлексивном пространстве X дифференциальные Φ -операторы $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^\infty) \rightarrow L^\infty$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, M^p) \rightarrow M^p$, $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ обратимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО приведем с некоторыми сокращениями. Предположим, что оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ есть Φ -оператор. По следствию 3 этот оператор корректен. Вместе с ним корректен оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^2) \rightarrow L^2$. Двойственный оператор $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^2) \rightarrow L_*^2$ служит сопряженным оператором к оператору $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^2) \rightarrow L^2$ относительно пространства $L_*^2 = L^2(\mathbb{R}, X^*)$. По теореме Банаха область значений $\text{Im}(\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^2) \rightarrow L_*^2)$ совпадает с L_*^2 (напомним, что оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^2) \rightarrow L^2$ замкнут, а $D(\mathcal{L}, L^2)$ плотно в L^2). Ядро $\ker(\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^2) \rightarrow L_*^2)$ конечномерно, ибо оно входит в ядро оператора $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, C^*) \rightarrow C^*$. Поэтому многообразие $X_{0L_*^2}$ замкнуто. Согласно теореме 1 оператор $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^2) \rightarrow L_*^2$ корректен. Но тогда будет корректен и оператор $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, C_*) \rightarrow C_*$, что вместе с корректностью оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ влечет их обратимость [1], [6].

Пусть оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ является Φ -оператором. В силу следствия 3 он корректен. Рассмотрим в X^* оператор $\mathcal{L}^* = d/dt + A^*(t)$. Двойственным к нему будет оператор $\mathcal{L} = d/dt - A(t)$. Далее, из корректности оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$ следует корректность оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$. В этом случае оператор $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^p) \rightarrow L_*^p$ сюръективен. Так как ядро $\ker(\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^p) \rightarrow L_*^p)$ конечномерно, для оператора $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, L_*^p) \rightarrow L_*^p$ выполнены условия теоремы 1. Следовательно, этот оператор корректен.

Отсюда выводим, что оператор $\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, C_*) \rightarrow C_*$ также корректен. Как отмечалось выше, в такой ситуации оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ обратим, что эквивалентно обратимости оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^p) \rightarrow L^p$.

Если $F = M^p$, то доказательство проведем следующим образом. Согласно следствиям 3, 4 оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ корректен. Так как

$$\ker(\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, C_*) \rightarrow C_*) \subseteq \ker(\mathcal{L}^*: D(\mathcal{L}^*, M_*^p) \rightarrow M_*^p),$$

оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, C) \rightarrow C$ есть Φ -оператор. По доказанному такой дифференциальный оператор обратим. Вместе с ним будет обратим и оператор $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, M^p) \rightarrow M^p$.

Аналогично доказывается теорема для оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}, L^\infty) \rightarrow L^\infty$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Сходные результаты справедливы для разностного оператора вида

$$Rx(n) = x(n+1) - B(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жиков В. В. Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 6. С. 1380–1408.
- [2] Левитан Б. М., Жиков В. В. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
- [3] Баскаков А. Г. Некоторые условия обратимости линейных дифференциальных и разностных операторов // Докл. РАН. 1993. Т. 333. № 3. С. 282–284.
- [4] Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. М.: Мир, 1970.
- [5] Тюрин В. М. Об обратимости оператора $d/dt - A(t)$ в некоторых функциональных пространствах // Матем. заметки. 1979. Т. 25. № 4. С. 585–590.
- [6] Тюрин В. М. Об обратимости линейных дифференциальных операторов в некоторых функциональных пространствах // Сиб. матем. ж. 1991. Т. 32. № 1. С. 160–165.

Липецкий государственный технический университет

Поступило

28.10.96

Исправленный вариант

20.04.98