Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Н. Иванов, Адамаровы алгебры, *Матем. заметки*,
2014, том 96, выпуск 2, 207–211

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10350>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 07:30:09

Адамаровы алгебры

Д. Н. Иванов

Исследуется проблема существования адамаровых разложений в полупростых ассоциативных конечномерных комплексных алгебрах. В предположении справедливости известной гипотезы о матрицах Адамара получено исчерпывающее решение этой проблемы для алгебр, изоморфных прямой сумме матричной алгебры 2-го порядка и полупростой коммутативной алгебры.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10350

1. Введение. Матрицей Адамара порядка n называется квадратная $(n \times n)$ -матрица с коэффициентами ± 1 , строки которой попарно ортогональны. Несложно показать, что при $n > 2$ порядок матрицы Адамара делится на 4. Хорошо известная гипотеза утверждает, что для любого натурального n кратного 4 существует матрица Адамара порядка n [1]. В [2] матрица Адамара порядка n интерпретируется как ортогональное разложение коммутативной полупростой алгебры размерности n в сумму двумерных подалгебр. Такие разложения, как и алгебры их допускающие, называются адамаровыми. Как показано в [2], [3], понятия коммутативной адамаровой алгебры и матрицы Адамара эквивалентны. Естественный интерес представляет проблема описания адамаровых алгебр. Конечно, в полной общности эта проблема чрезмерно сложна. Это подтверждается отсутствием ее решения, несмотря на значительные усилия многих математиков, уже в случае коммутативных алгебр. Также, можно проследить возрастание сложности задач при переходе от коммутативных алгебр к произвольным на примере теоремы о делимости размерности адамаровой алгебры на 4 [4]. Учитывая вышесказанное, имеет смысл ограничивать проблему существования адамаровых разложений на определенные классы алгебр. В данной работе получено решение этой проблемы для класса алгебр, все неприводимые представления которых имеют степень не выше 2. Такие алгебры представимы в виде прямой суммы нескольких экземпляров алгебры матриц порядка 2 и коммутативной полупростой алгебры. Основной результат опирается на три теоремы. В первой выводятся соотношения ортогональности для неприводимых характеров адамаровой алгебры. Во второй доказывается, что размерность адамаровой алгебры, допускающей линейное и нелинейное неприводимые представления, делится на 8. В третьей приводится конструкция адамаровых разложений для указанного

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00234а).

класса алгебр. Этот результат обобщает анонсированную в [5] теорему о существовании адамаровых разложений в алгебрах, изоморфных прямой сумме матричной алгебры 2-го порядка и коммутативной полупростой алгебры.

2. Определения и обозначения, вспомогательные результаты. Напомним основные определения. Термин “алгебра” будет обозначать ассоциативную конечномерную над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ полупростую алгебру. Как известно, в силу теоремы Веддербарна–Молина такая алгебра изоморфна прямой сумме матричных алгебр. Через Tr_A будем обозначать след регулярного представления алгебры A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Семейство $\mathcal{D} = \{B_i, i = 1, \dots, r\}$ неединичных собственных подалгебр алгебры A образует ее *ортогональное разложение* (ОР), если все подалгебры B_i полупросты, содержат единичный элемент 1_A алгебры A и выполняется условие ортогональности: алгебра A является прямой суммой попарно ортогональных относительно формы следа $\text{Tr}_A xy$ подпространств:

$$A = \langle 1_A \rangle \oplus B_1^\circ \oplus \dots \oplus B_r^\circ, \quad \text{где } B_i^\circ = \{x \in B_i \mid \text{Tr}_A x = 0\}.$$

Через $M_n(\mathbb{C}) = M_n$ будем обозначать алгебру матриц n -го порядка, kB – прямая сумма k экземпляров алгебры B , tr – след матрицы, E_n – единичная матрица порядка n . Пусть $A = M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}$, $X = (X_1, \dots, X_k) \in A$, $\chi_i(X) = \text{tr } X_i$ – неприводимый характер, $\deg \chi_i = \chi_i(1_A) = n_i$ – степень характера, $i = 1, \dots, k$. Неприводимый характер степени 1 называется *линейным*. Очевидно, линейный характер является гомоморфизмом алгебр. Положим $\text{Irr } A = \{\chi_i, i = 1, \dots, k\}$ – множество всех неприводимых характеров алгебры A . Имеем

$$\text{Tr}_A = \sum_{\chi \in \text{Irr } A} \deg \chi \cdot \chi, \quad \dim A = \sum_{\chi \in \text{Irr } A} (\deg \chi)^2.$$

Если все подалгебры в $\mathcal{D}$ изоморфны алгебре B , то $\mathcal{D}$ называется *однородным ОР типа B*. Однородное ОР типа $2M_1$ называется *адамаровым разложением*. Алгебра, допускающая адамарово разложение, называется *адамаровой*.

Уместно отметить, что помимо матриц Адамара понятие ОР обобщает такие известные понятия как конечные аффинные плоскости, конечные расщепляемые группы, ортогональные разложения простых алгебр Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр [6], [2]. Именно,

- (1) конечная аффинная плоскость порядка n соответствует однородному ОР типа nM_1 коммутативной алгебры n^2M_1 ;
- (2) если подгруппы $\{H_i\}$ расщепляют группу G , то подалгебры $\{CH_i\}$ образуют ОР групповой алгебры $\mathbb{C}G$;
- (3) ортогональное разложение простой алгебры Ли типа A_n в сумму картановских подалгебр соответствует однородному ОР типа $(n+1)M_1$ алгебры матриц M_{n+1} .

ЛЕММА 1 [2], [3]. (1) Алгебра A адамарова тогда и только тогда, когда в A существует базис из попарно ортогональных инволюций, содержащий единичный элемент алгебры A .

(2) Пусть инволюции $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_n$ попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbb{A}$. Тогда для любого $X \in \mathbb{A}$

$$n \operatorname{Tr}_A X^2 = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Tr}_A X A_i)^2. \quad (1)$$

ЛЕММА 2 [4]. Степени нелинейных неприводимых характеров адамаровой алгебры четны.

3. Основные результаты. Следующая теорема представляет соотношения ортогональности для неприводимых характеров адамаровой алгебры.

ТЕОРЕМА 1. Пусть инволюции $A_1 = \mathbf{1}_A, A_2, \dots, A_n$ попарно ортогональны и образуют базис алгебры $\mathbb{A}$. Тогда

(1) выполнено равенство

$$\dim \mathbb{A} = n = \sum_{i=1}^n (\chi(A_i))^2 \quad (2)$$

для любого $\chi \in \operatorname{Irr} \mathbb{A}$;

(2) выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^n \chi(A_i) \cdot \lambda(A_i) = 0 \quad (3)$$

для любых $\chi, \lambda \in \operatorname{Irr} \mathbb{A}, \chi \neq \lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\mathbb{A} = M_{n_1} \oplus \dots \oplus M_{n_k}, \quad X = (X_1, \dots, X_k) \in \mathbb{A},$$

$\chi, \lambda \in \operatorname{Irr} \mathbb{A}, \chi \neq \lambda$, и $\chi(X) = \operatorname{tr} X_s, \lambda(X) = \operatorname{tr} X_t$. Положим

$$\mathcal{E}_l = (0, \dots, 0, E_{n_l}, 0, \dots, 0)$$

— единичная матрица стоит на l -й позиции.

Подставим в (1) вместо X последовательно $\mathcal{E}_s, \mathcal{E}_t, \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t$, учитывая при этом, что

$$\operatorname{Tr} \mathcal{E}_l^2 = \operatorname{Tr} \mathcal{E}_l = n_l^2, \quad \operatorname{Tr}(\mathcal{E}_s A_i) = n_s \chi(A_i), \quad \operatorname{Tr}(\mathcal{E}_t A_i) = n_t \lambda(A_i)$$

и

$$(\mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t)^2 = \mathcal{E}_s + \mathcal{E}_t.$$

Имеем

$$\begin{aligned} n \cdot n_s^2 &= \sum_{i=1}^n n_s^2 (\chi(A_i))^2, & n \cdot n_t^2 &= \sum_{i=1}^n n_t^2 (\lambda(A_i))^2, \\ n \cdot (n_s^2 + n_t^2) &= \sum_{i=1}^n (n_s \chi(A_i) + n_t \lambda(A_i))^2. \end{aligned}$$

После сокращения первого равенства на n_s^2 получим равенство (2). Вычитая из третьего равенства первые два и деля на $2n_s n_t$, получим (3). Теорема доказана.

Следующая теорема обобщает теорему 1 из [5].

ТЕОРЕМА 2. *Если адамарова алгебра имеет линейный и нелинейный неприводимые характеры, то ее размерность делится на 8.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть инволюции $A_1 = 1_A, A_2, \dots, A_n$ образуют ортогональный базис адамаровой алгебры $\mathbb{A}$, $\chi, \lambda \in \text{Irr}(\mathbb{A})$, $\deg \chi > 1$, $\deg \lambda = 1$.

Так как $\lambda(A_i)$ – инволюция в поле $\mathbb{C}$, то $\lambda(A_i) = \pm 1$. Очевидно, что умножение некоторых инволюций на -1 сохраняет свойство быть ортогональным базисом из инволюций. Поэтому можем считать, что $\lambda(A_i) = 1$ для всех $A_i, i = 1, \dots, n$.

Далее, так как в силу леммы 2 степень χ четна и так как A_i – инволюции, то $\chi(A_i)$ – четные целые числа.

В силу (3) имеем

$$0 = \sum_{i=1}^n \chi(A_i) \cdot \lambda(A_i) = \sum_{i=1}^n \chi(A_i).$$

В силу (2)

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{A} = n &= \sum_{i=1}^n (\chi(A_i))^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \chi(A_i) \right)^2 - 2 \cdot \left(\sum_{i \neq j} \chi(A_i) \cdot \chi(A_j) \right) = -2 \cdot \left(\sum_{i \neq j} \chi(A_i) \cdot \chi(A_j) \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение делится на 8, так как $\chi(A_i)$ четны. Теорема доказана.

Следующая теорема обобщает теорему 2 из работы [5], приведенную там без доказательства.

ТЕОРЕМА 3. *Если размерность алгебры $\mathbb{A} = kM_2 \oplus mM_1$ делится на 8 и существует матрица Адамара порядка $\dim \mathbb{A}/2$, то алгебра $\mathbb{A}$ адамарова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $n = \dim \mathbb{A} = 4k + m$,

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

– матрица Адамара 2-го порядка. Пусть $H_{n/2} = (h_{ij})$ – матрица Адамара порядка $n/2$. Матрицы Адамара сохраняют свойство быть таковыми при умножении строки или столбца на -1 . Поэтому можем считать, что первая строка матрицы $H_{n/2}$ состоит из $+1$. Легко видеть, что матрица n -го порядка $H_n = H_{n/2} \otimes H_2$ также является матрицей Адамара [1].

Рассмотрим $(n \times 2)$ -подматрицу P_{ij} , образованную i -м и j -м столбцами матрицы $H_{n/2}$. Очевидно, для строк P_{ij} есть 4 возможности: $\pm(1, 1), \pm(1, -1)$. Тогда для строк матрицы $P_{ij} \otimes H_2$ есть 8 возможностей:

$$\begin{aligned} \pm S_1 &= \pm(1, 1, 1, 1), & \pm S_2 &= \pm(1, 1, -1, -1), \\ \pm S_3 &= \pm(1, -1, 1, -1), & \pm S_4 &= \pm(1, -1, -1, 1). \end{aligned}$$

Так как простая алгебра Ли типа A_1 допускает ОР в сумму картановских подалгебр [6], то алгебра M_2 адамарова [2]. В качестве ортогонального базиса можно взять следующие инволюции:

$$I_1 = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\mathrm{Tr}_{4M_1} S_i S_j = \mathrm{Tr}_{M_2} I_i I_j, \quad i, j = 1, \dots, 4. \quad (4)$$

Разобьем матрицу Адамара $H_n = H_{n/2} \otimes H_2$ на k подматриц размера $n \times 4$:

$$P_{12} \otimes H_2, \quad \dots, \quad P_{2k-1, 2k} \otimes H_2$$

и одну подматрицу размера $n \times m$. В подматрицах $P_{2i-1, 2i} \otimes H_2$, $i = 1, \dots, k$, заменим строки $\pm S_j$ на инволюции $\pm I_j$, $j = 1, \dots, 4$. В результате получим матрицу $\hat{H}_n$, первые k столбцов которой состоят из инволюций $\pm I_j$, $j = 1, \dots, 4$, а оставшиеся столбцы состоят из ± 1 . Рассматривая строки матрицы $\hat{H}_n$ как элементы алгебры $\mathbb{A} = kM_2 \oplus mM_1$, легко видеть в силу (4), что они образуют ортогональный базис из инволюций в $\mathbb{A}$. При этом первая строка является единичным элементом в $\mathbb{A}$. Значит, в силу леммы 1 п. (1) алгебра $\mathbb{A}$ адамарова. Теорема доказана.

В предположении справедливости гипотезы о матрицах Адамара из теорем 2 и 3 вытекает, что алгебра $\mathbb{A} = kM_2 \oplus mM_1$, $m \geq 1$, адамарова тогда и только тогда, когда $\dim \mathbb{A}$ делится на 8.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Холл, *Комбинаторика*, Мир, М., 1970.
- [2] Д. Н. Иванов, “Ортогональные разложения ассоциативных алгебр и сбалансированные системы идемпотентов”, *Матем. сб.*, **189**:12 (1998), 83–102.
- [3] Д. Н. Иванов, “Однородные ортогональные разложения коммутативных алгебр и матрицы Адамара”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **1**:4 (1995), 1107–1110.
- [4] Д. Н. Иванов, “Размерность адамаровой алгебры делится на 4”, *УМН*, **60**:2 (2005), 163–164.
- [5] Д. Н. Иванов, “Адамаровы алгебры с единственной некоммутативной простой компонентой”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2011, № 5, 46–48.
- [6] А. И. Кострикин, И. А. Кострикин, В. А. Уфнаровский, “Ортогональные разложения простых алгебр Ли (тип A_n)”, *Аналитическая теория чисел, математический анализ и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **158**, 1981, 105–120.

Д. Н. Иванов

Тверской государственный университет

E-mail: dni@tvcom.ru

Поступило

13.06.2013