Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Мешков, И. П. Половинкин, Признак компактности носителя обобщенной функции в терминах преобразования Фурье–Лапласа, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 83–87

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10351>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 11:48:04

Признак компактности носителя обобщенной функции в терминах преобразования Фурье–Лапласа

В. З. Мешков, И. П. Половинкин

С помощью принципа Фрагмена–Линделефа доказано, что в теореме Пэли–Винера–Шварца условие, накладываемое на функцию, можно заменить двумя условиями, выполнение которых в ряде случаев проще проверить.

Библиография: 2 названия.

DOI: 10.4213/mzm10351

Классическая теорема Пэли–Винера–Шварца (см., например, [1; с. 220, теорема 7.3.1]) о носителе обобщенной функции предполагает выполнение одного условия (см. ниже, условие (7)), которое во многих конкретных случаях нелегко проверить. В настоящей работе показано, что, пользуясь принципом Фрагмена–Линделефа (см. [2; с. 336]) это условие можно заменить на два более простых условия. Начнем с классического принципа Фрагмена–Линделефа для прямого угла.

ТЕОРЕМА 1. Пусть аналитическая функция $f(z) = f(x + iy)$ в первой четверти комплексной плоскости $x \geq 0$, $y \geq 0$ удовлетворяет неравенству $|f(z)| \leq Ce^{a|z|^\alpha}$, где C , a , α суть положительные постоянные, причем $\alpha < 2$. Тогда неравенства $|f(x)| \leq 1$ и $|f(iy)| \leq 1$, выполняемые на сторонах угла, влекут за собой неравенство $|f(z)| \leq 1$ всюду в первой четверти.

Следуя классической методике получения таких результатов, мы докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости $y \geq 0$ и удовлетворяет там неравенству

$$|f(z)| \leq Ce^{\lambda|z|}, \quad (1)$$

где C , λ суть положительные постоянные. Пусть, кроме того, всюду на вещественной оси выполняется неравенство

$$|f(x)| \leq h, \quad (2)$$

а на мнимой оси – соотношение

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow 0} |f(iy)|e^{-Ry} = M < +\infty, \quad (3)$$

где $R > 0$ и, без ограничения общности, для удобства будем предполагать, что $M \geq h$. Тогда всюду в верхней полуплоскости

$$|f(z)| \leq (M + \sigma)e^{Ry}, \quad (4)$$

где число $\sigma > 0$ можно взять сколь угодно малым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем число b таким образом, чтобы при $y \geq b$ выполнялось неравенство

$$|f(iy)|e^{-Ry} \leq M + \varepsilon, \quad y \geq b.$$

Пусть $B = \max_{y \in [0, b]} |f(iy)|e^{-Ry}$. Вообще говоря, может оказаться, что $B > M$. Это нежелательное обстоятельство мы исправим посредством умножения на некоторую функцию $g(z)$, которую будем искать в виде

$$g(z) = \frac{z}{iA + z},$$

где A – большое положительное число. Функция $g(iy) = y/(A + y)$ монотонно возрастает на промежутке $[0, +\infty)$ от 0 до 1, причем $g(b) = b/(A + b)$. Зафиксируем число A настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $bB/(A + b) \leq M$. Попутно отметим, что всюду на вещественной оси $|g(z)| \leq 1$. Рассмотрим функцию

$$F(z) = f(z)e^{iRz}g(z).$$

Для этой функции выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq h, & x &\in (-\infty, +\infty), \\ |F(iy)| &\leq M + \varepsilon, & y &\in [0, +\infty). \end{aligned}$$

Применяя классический принцип Фрагмена–Линделёфа к прямым углам, на которые мнимая ось делит верхнюю полуплоскость, получим всюду в верхней полуплоскости

$$|f(z)e^{iRz}g(z)| \leq M + \varepsilon.$$

В силу того, что $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 1$, можно выбрать число $D > 0$ так, чтобы в полуплоскости $y \geq D$ выполнялось неравенство

$$|g(z)| \geq 1 - \varepsilon.$$

Тогда в полуплоскости $y \geq D$

$$|f(z)e^{iRz}| \leq \frac{M + \varepsilon}{1 - \varepsilon}.$$

Для любого, сколь угодно малого, $\sigma > 0$ найдется такое значение ε_0 , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ будет иметь место неравенство

$$\frac{M + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \leq M + \sigma,$$

откуда

$$|f(z)e^{iRz}| \leq M + \sigma, \quad D \leq \operatorname{Im} z \leq +\infty.$$

В оставшейся полосе функция $f(z)e^{iRz}$ будет ограничена; следовательно, там к ней можно применить принцип максимума:

$$|f(z)e^{iRz}| \leq \max\{h, M + \sigma\} = M + \sigma.$$

Таким образом, всюду в верхней полуплоскости

$$|f(z)e^{iRz}| \leq M + \sigma,$$

что доказывает соотношение (4), а вместе с ним и теорему.

Пусть теперь $\mathbb{C}^m$ означает m -мерное комплексное пространство точек

$$\zeta = \xi + \eta = (\xi_1 + \eta_1, \dots, \xi_m + \eta_m),$$

где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ суть точки арифметического пространства $\mathbb{R}^m$, т.е. $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m + i\mathbb{R}^m$. Пусть

$$|\xi| = (\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2)^{1/2}, \quad |\eta| = (\eta_1^2 + \dots + \eta_m^2)^{1/2}, \\ |\zeta| = (\zeta_1^2 + \dots + \zeta_m^2)^{1/2} = (|\xi|^2 + |\eta|^2)^{1/2}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(\zeta)$ – целая аналитическая функция в $\mathbb{C}^m$, удовлетворяющая там оценке

$$|f(\zeta)| \leq Me^{R|\zeta|}, \quad (5)$$

где M, R – положительные постоянные. Пусть, кроме того, функция $f(\xi)$ на $\mathbb{R}^m$ удовлетворяет оценке

$$|f(\xi)| \leq H(1 + |\xi|^2)^N, \quad (6)$$

где H и N – некоторые положительные числа. Тогда функция f является преобразованием Фурье–Лапласа некоторой обобщенной функции с носителем в шаре $|x| \leq R$.

Для сравнения приведем классическую теорему Пэли–Винера–Шварца, применимую к случаю шара $|x| < R$.

ТЕОРЕМА 4 (классическая теорема Пэли–Винера–Шварца). Пусть целая аналитическая функция $f(\zeta)$ всюду в $\mathbb{C}^m$, удовлетворяющая неравенству

$$|f(\zeta)| \leq Ce^{R|\eta|}(1 + |\xi|^2)^N, \quad (7)$$

где C, N – некоторые положительные постоянные. Тогда функция $f(\zeta)$ является преобразованием Фурье–Лапласа некоторой обобщенной функции с носителем в шаре $|x| \leq R$.

Очевидно, что выполнение условия (7) влечет за собой выполнение условий (5) и (6) с несущественной заменой R на $R + \varepsilon$. Но оказывается, что с помощью принципа Фрагмена–Линделефа можно доказать и обратное: из условий (5) и (6) вытекает условие (7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\xi' \in \mathbb{R}_\xi^m$, $\eta \in \mathbb{R}_\eta^m$. Пусть $\mathbf{e} = \eta/|\eta|$, $\mathbf{l}$ – прямая в $\mathbb{R}_\xi^m$, состоящая из точек $\xi = \xi' + t\mathbf{e}$. Пусть ξ_0 – точка прямой $\mathbf{l}$, ближайшая к началу координат. Тогда вектор μ , идущий из начала координат в точку ξ_0 , перпендикулярен вектору $\mathbf{e}$.

Рассмотрим комплексную плоскость $\pi \in \mathbb{C}^m$ точек вида $\xi_0 + z\mathbf{e}$, где $z = x + iy$, а функцию $F(z) = f(\xi_0 + z\mathbf{e})$ будем рассматривать на этой плоскости π . Вещественная ось $\xi_0 + x\mathbf{e}$ этой плоскости лежит в $\mathbb{R}_\xi^m$, а в силу ортогональности векторов μ и $\mathbf{e}$

$$|\xi_0 + x\mathbf{e}|^2 = |\mu|^2 + |x|^2.$$

Кроме того,

$$|\xi_0 + iy\mathbf{e}| = (|y|^2 + |\mu|^2)^{1/2} = |y| \left(1 + \frac{|\mu|^2}{|y|^2} \right)^{1/2} = |y| + O\left(\frac{1}{|y|} \right).$$

Тогда

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} |F(iy)| e^{-R|y|} \leq \overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} M e^{-Ry} \leq M. \quad (8)$$

Пусть $\gamma = \sqrt{|\mu|^2 + 1}$. Положительное число N в неравенстве (6) без ограничения общности можно считать натуральным. Рассмотрим многочлен $P(z) = (z + i\gamma)^{2N}$. Тогда на вещественной оси Ox имеет место равенство

$$(1 + |\xi_0 + x\mathbf{e}|^2)^N = (\gamma^2 + |x|^2)^N = |P(z)|.$$

Отсюда из условия (6) получаем, что

$$\left| \frac{F(z)}{P(z)} \right| \leq H.$$

На мнимой полуоси, очевидно, $|P(z)| \geq 1$, так как $\gamma \geq 1$. Поэтому

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \left| \frac{F(iy)}{P(iy)} e^{-Ry} \right| \leq M.$$

В силу доказанного ранее принципа Фрагмена–Линделёфа всюду в верхней полуплоскости, взяв $2M$ вместо $M + \sigma$, получим

$$|F(z)| \leq 2M e^{Ry} |P(z)|, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} |P(z)| &= |(x + i\gamma) + iy|^{2N} \leq (|x + i\gamma|^2 + y^2)^N = \sum_{k=0}^N 2^N C_N^k (x^2 + \gamma^2)^{N-k} y^{2k} \\ &\leq 2^N (x^2 + \gamma^2)^N \sum_{k=0}^N C_N^k |y|^{2k} = 2^N (x^2 + \gamma^2)^N (1 + |y|^2)^N. \end{aligned}$$

Далее отметим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторая постоянная $K_{\varepsilon, N}$ такая, что для всех $y > 0$ выполняется неравенство

$$(1 + |y|^2)^N \leq K_{\varepsilon, N} e^{\varepsilon y},$$

причем постоянная $K_{\varepsilon, N}$ зависит только от ε и N . Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Тогда неравенство (9) преобразуется к следующему:

$$|F(z)| \leq 2^N K_{\varepsilon, N} e^{(R+\varepsilon)y} (x^2 + \gamma^2)^N (1 + |y|^2)^N. \quad (10)$$

Для произвольной точки $\xi' + i\eta \in \mathbb{C}^m$, которую мы выбрали в начале доказательства, имеем

$$\xi' + i\eta = \xi_0 + (x + iy)\mathbf{e},$$

причем

$$(x^2 + \gamma^2)^N = (1 + |\xi'|^2)^N, \quad \eta = y \cdot \mathbf{e}, \quad y = |\eta|.$$

Неравенство (10) можно переписать в виде

$$f(\xi' + i\eta) \leq M K_{\varepsilon, N} e^{(R+\varepsilon)|\xi'|} (1 + |\xi'|^2)^N.$$

Последнее неравенство идентично неравенству (7) из классической теоремы Пэли–Винера–Шварца. Поэтому $f(\zeta)$ является преобразованием Фурье обобщенной функции с носителем в шаре $|x| < R + \varepsilon$. Поскольку ε можно взять сколь угодно малым, отсюда вытекает заключение теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье, Мир, М., 1986.
- [2] М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, М., 1991.

В. З. Мешков

Воронежский государственный университет
E-mail: meshkov.v.z.pde@yandex.ru

Поступило

01.08.2013

И. П. Половинкин

Воронежский государственный университет
Старооскольский технологический институт
E-mail: polovinkin@yandex.ru