Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, Новые верхние оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ и их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 1, 138–147

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10352>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 14:56:59

Новые верхние оценки

чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$

и их приложения в задачах

о хроматических числах дистанционных графов

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский

Улучшены верхние оценки чисел независимости в графах с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$. Рассмотрены их приложения в задачах о хроматических числах дистанционных графов.

Библиография: 32 названия.

DOI: 10.4213/mzm10352

1. Введение. Напомним, что *гиперграфом* называется пара $H = (V, E)$, где V – произвольное конечное множество, называемое множеством *вершин*, а E – совокупность некоторых подмножеств множества V , называемая множеством *ребер*. Гиперграф называется *k-однородным*, если в каждом его ребре ровно k вершин. Говорят также, что у гиперграфа *запрещены пересечения ребер* данной величины, если для любых $F_1, F_2 \in E$ величина мощности $|F_1 \cap F_2|$ не принадлежит заданному наперед множеству чисел. Например, H – гиперграф с запрещенным пересечением l , если мощность пересечения любых двух его ребер не равна l .

В 1981 г. в своей работе [1], ставшей классической, Франкл и Уилсон доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $H = (V, E)$ – k -однородный гиперграф (т.е. в каждом его ребре ровно k вершин) на n вершинах, причем для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$ и $k - l$ – степень простого числа, которую мы обозначим q . Тогда имеют место два случая:

1) если $2l < k$, то

$$|E| \leq \sum_{i=0}^{q-1} C_n^i;$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683), гранта Президента РФ МД-6277.2013.1 и гранта НШ-2519.2012.1 поддержки ведущих научных школ.

2) если $2l \geq k$, то при $d = k - 2q + 1 = 2l - k + 1$

$$|E| \leq \frac{C_n^d}{C_k^d} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{n-d}^i \right).$$

Недавно (см. [2]) мы значительно усилили пункт 2 этого результата. Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $H = (V, E)$ – k -однородный гиперграф на n вершинах, причем $k \leq n/2$, для любых $F_1, F_2 \in E$ выполнено $|F_1 \cap F_2| \neq l$, $2l \geq k$ и $q = k - l$ – степень простого числа. Положим $d = 2l - k + 1$. Пусть, далее, $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ таковы, что $d_1 + d_2 = d$. Положим $n_1 = n - d_1$, $k_1 = k - d_1$. Определим натуральное число r из соотношения

$$(k_1 - d_2 + 1) \left(2 + \frac{d_2 - 1}{r + 1} \right) \leq n_1 < (k_1 - d_2 + 1) \left(2 + \frac{d_2 - 1}{r} \right).$$

Тогда

$$|E| \leq \frac{C_{n_1}^{d_2+2r} C_n^{d_1}}{C_{k_1}^{d_2+r} C_{n_1-k_1}^r C_k^{d_1}} \left(\sum_{i=0}^{q-1} C_{n_1}^i \right).$$

Задача об отыскании верхних оценок числа ребер в однородном гиперграфе с запрещенными пересечениями исключительно важна не только с точки зрения самой теории гиперграфов, но и с точки зрения комбинаторной геометрии (см. [3]–[13], а также раздел 4), и с точки зрения теории кодирования (см. [14]). В последних двух случаях говорят обычно о $(0, 1)$ -векторах с запрещенными скалярными произведениями или, что то же самое, о равновесных кодах с запрещенными Хэмминговыми расстояниями. В следующем разделе мы поставим аналогичную задачу для $(-1, 0, 1)$ -векторов и сформулируем аналоги теорем 1 и 2. В дальнейших разделах мы докажем новую теорему, а также опишем ее весьма неожиданные следствия в задаче о хроматическом числе пространства.

2. Постановка задачи и формулировка результата. Пусть n – натуральное число и k_{-1}, k_0, k_1 – натуральные числа, в сумме дающие n . Пусть

$$V_n(k_{-1}, k_0, k_1) = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = -1\}| = k_{-1}, \\ |\{i : x_i = 0\}| = k_0, |\{i : x_i = 1\}| = k_1 \}.$$

Разумеется,

$$|V_n(k_{-1}, k_0, k_1)| = \frac{n!}{k_{-1}! k_0! k_1!}.$$

И, в частности, при $k_{-1} = 0$, $k_1 = k$ имеем совокупность $(0, 1)$ -векторов веса k или, что то же самое, совокупность ребер полного k -однородного гиперграфа на n вершинах. В общем случае работаем с $(-1, 0, 1)$ -векторами, т.е. с тройными кодами в терминах теории кодирования.

Пусть теперь t – произвольное натуральное число. Нас будет интересовать величина

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) = \max\{|W| : W \subset V_n(k_{-1}, k_0, k_1), \mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \text{ для всех } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq t\},$$

т.е. максимальное количество векторов, которым запрещено иметь скалярные произведения, равные t . В такой постановке задача является обобщением именно комбинаторно-геометрической, а не теоретико-кодовой проблемы, так как скалярное произведение отвечает за евклидово, а не Хэммингово расстояние, которые для $(0, 1)$ -векторов по сути не различались. О приложениях в комбинаторной геометрии мы поговорим в четвертом разделе.

Очень много работ посвящено нижним оценкам величины $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$ (см. [15]–[19]), и их результатами мы еще воспользуемся, несмотря на то, что нынешняя наша цель – верхние оценки. Верхние же оценки изучены довольно плохо, и есть лишь одна теорема, служащая обобщением пункта 1 теоремы 1 и приведенная явно в книге [20]. Мы выпишем ее ниже для наиболее показательного случая (ср. [20]), когда $k_1 + k_{-1} \leq n/2$ и $k_{-1} \leq k_1$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть n, k_{-1}, k_0, k_1, t таковы, что $k_1 + k_{-1} \leq n/2$, $k_{-1} \leq k_1$, разность $k_1 + k_{-1} - t$ является степенью простого числа (обозначим ее $q = p^a$) и $k_1 + k_{-1} - 2q < -2k_{-1}$. Тогда

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i + j \leq n, i + 2j \leq q - 1\}.$$

Теорема 3 ничего не говорит о ситуации, когда $k_1 + k_{-1} - 2q \geq -2k_{-1}$. Именно поэтому мы и говорим о том, что теорема 3 служит обобщением пункта 1 теоремы 1. Новая теорема 4 закрывает этот пробел.

ТЕОРЕМА 4. Пусть n, k_{-1}, k_0, k_1, t таковы, что $k_1 + k_{-1} \leq n/2$, $k_{-1} \leq k_1$, разность $k_1 + k_{-1} - t$ является степенью простого числа (обозначим ее $q = p^a$) и $k_1 + k_{-1} - 2q \geq -2k_{-1}$. Положим $d = k_1 + k_{-1} - 2q + 1$. Пусть $\mathfrak{m} = (m_1, m_2, m_3)$,

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{-1,1} & m_{0,1} & m_{1,1} \\ m_{-1,2} & m_{0,2} & m_{1,2} \\ m_{-1,3} & m_{0,3} & m_{1,3} \end{pmatrix},$$

причем все элементы вектора и матрицы – натуральные числа,

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

$$\begin{aligned} m_{-1,1} + m_{0,1} + m_{1,1} &= m_1, & m_{-1,2} + m_{0,2} + m_{1,2} &= m_2, & m_{-1,3} + m_{0,3} + m_{1,3} &= m_3, \\ m_{-1,1} + m_{-1,2} + m_{-1,3} &= k_{-1}, & m_{0,1} + m_{0,2} + m_{0,3} &= k_0, & m_{1,1} + m_{1,2} + m_{1,3} &= k_1 \end{aligned}$$

и выполнено еще одно условие, для формулировки которого нам потребуются дополнительные обозначения и термины. А именно, пусть множество $\{1, \dots, n\}$ представлено в виде объединения трех непересекающихся частей M_1, M_2, M_3 , мощности которых равны m_1, m_2, m_3 соответственно. Скажем, что вектор $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$ удовлетворяет разбиению $T(M_1, M_2, M_3)$, если

$$\begin{aligned} |\{i \in M_1 : x_i = -1\}| &= m_{-1,1}, & |\{i \in M_1 : x_i = 0\}| &= m_{0,1}, & |\{i \in M_1 : x_i = 1\}| &= m_{1,1}, \\ |\{i \in M_2 : x_i = -1\}| &= m_{-1,2}, & |\{i \in M_2 : x_i = 0\}| &= m_{0,2}, & |\{i \in M_2 : x_i = 1\}| &= m_{1,2}, \\ |\{i \in M_3 : x_i = -1\}| &= m_{-1,3}, & |\{i \in M_3 : x_i = 0\}| &= m_{0,3}, & |\{i \in M_3 : x_i = 1\}| &= m_{1,3}. \end{aligned}$$

Еще одно условие, которому подчиняются параметры $\mathbf{m}, \mathfrak{M}$, состоит в том, что у любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, удовлетворяющих одному и тому же разбиению, скалярное произведение не меньше d . Тогда

$$m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t) \leq \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!} \cdot \frac{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!}{k_{-1}!} \cdot \frac{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!}{k_0!} \\ \times \frac{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}{k_1!} \cdot \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j \right),$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i + j \leq n, i + 2j \leq q - 1\}.$$

Теорему 4 мы докажем в разделе 3. А в разделе 4 мы поговорим об ее неожиданных следствиях в комбинаторной геометрии.

3. Доказательство теоремы 4. Пусть фиксированы числа $n, k_{-1}, k_0, k_1, t, q, p, a, d$, удовлетворяющие условию теоремы, а также вектор $\mathbf{m}$ и матрица $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathcal{T}$ – множество всех разбиений $T(M_1, M_2, M_3)$. Разумеется, $|\mathcal{T}| = n!/(m_1!m_2!m_3!)$. Обозначим $\mathbb{I}(A)$ индикатор того или иного свойства A . Пусть, наконец, $W \subset V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$ – произвольное множество без скалярного произведения t . Рассмотрим величину

$$S = \sum_{\mathbf{x} \in W} \sum_{T(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{T}} \mathbb{I}(\mathbf{x} \text{ удовлетворяет разбиению } T(M_1, M_2, M_3)).$$

При текущем порядке суммирования видно, что

$$S = |W| \cdot \frac{k_{-1}!}{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!} \cdot \frac{k_0!}{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!} \cdot \frac{k_1!}{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}.$$

Значит, если переставить суммы местами, то получится, что существует разбиение $T(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{T}$, которому удовлетворяет не менее

$$\frac{|W| \cdot \frac{k_{-1}!}{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!} \cdot \frac{k_0!}{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!} \cdot \frac{k_1!}{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}}{\frac{n!}{m_1!m_2!m_3!}} \\ = |W| \cdot \frac{k_{-1}!}{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!} \cdot \frac{k_0!}{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!} \cdot \frac{k_1!}{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!} \cdot \frac{m_1!m_2!m_3!}{n!}$$

векторов из W . Обозначим W' множество всех таких векторов. В нем скалярные произведения любых двух векторов больше либо равны d и не равны t . При этом максимальное скалярное произведение векторов из W' – это скалярный квадрат любого из них, т.е. $k_1 + k_{-1}$. Таким образом, скалярное произведение любых двух различных векторов из W' не сравнимо с $k_1 + k_{-1}$ по модулю q . Воспользуемся этим для получения верхней оценки мощности W' .

Пусть $W' = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\}$. Поставим каждому вектору $\mathbf{x}_i$ с $i \in \{1, \dots, s\}$ в соответствие некоторый многочлен $F_{\mathbf{x}_i}$. А именно, пусть I – множество, полученное из множества $\{0, 1, \dots, q-1\}$ удалением вычета числа $k_1 + k_{-1}$ по модулю q . Пусть,

далее, b – степень, в которой простое число p входит в каноническое разложение числа

$$\prod_{\nu \in I} (\nu - (k_1 + k_{-1})).$$

Положим

$$F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = \frac{1}{p^b} \prod_{\nu \in I} (\nu - (\mathbf{x}_i, \mathbf{y})).$$

Многочлен рассматривается как элемент пространства $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, т.е. это многочлен от n переменных, а

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n).$$

Рассмотрим невырожденную линейную комбинацию

$$c_1 F_{\mathbf{x}_1} + \dots + c_s F_{\mathbf{x}_s}, \quad c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Q}.$$

Если она равна нулю в $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, то и для любого $\mathbf{y} \in V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$

$$c_1 F_{\mathbf{x}_1}(\mathbf{y}) + \dots + c_s F_{\mathbf{x}_s}(\mathbf{y}) = 0. \quad (1)$$

Нетрудно проверить (ср. [3] и [20]), что в нашем случае всегда $F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) \in \mathbb{Z}$. Поэтому можно считать, что все коэффициенты в (1) целые и что, более того, один из этих коэффициентов не делится на p .

Подставим в (1) в качестве аргумента $\mathbf{y} = \mathbf{x}_i$ с произвольным i . С одной стороны,

$$F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{p^b} \prod_{\nu \in I} (\nu - (\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i)) = \frac{1}{p^b} \prod_{\nu \in I} (\nu - (k_1 + k_{-1})) \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

С другой стороны, легко проверить, что поскольку при $j \neq i$ выполнено $(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \not\equiv (k_1 + k_{-1}) \pmod{p}$, то

$$F_{\mathbf{x}_j}(\mathbf{x}_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Выходит, что $c_i \equiv 0 \pmod{p}$ для любого i . Противоречие с невырожденностью, т.е. многочлены

$$F_{\mathbf{x}_1}, \dots, F_{\mathbf{x}_s}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Преобразуем каждый из многочленов следующим образом. Запишем многочлен в виде линейной комбинации одночленов, и в каждом одночлене заменим сомножители вида $y_\nu^{\alpha_\nu}$, $\alpha_\nu \geq 1$, сомножителями $y_\nu^{\beta_\nu}$, где $\beta_\nu = 1$, если α_ν нечетно, и $\beta_\nu = 2$, если α_ν четно. Например, одночлен $y_1^4 y_5^{17} y_n$ превратится в $y_1^2 y_5 y_n$. Новые многочлены как функции от векторов из $V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$ тождественно равны исходным многочленам (очевидно, что $y_\nu^3 = y_\nu$, коль скоро $y_\nu \in \{-1, 0, 1\}$). Следовательно, новые многочлены также линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Это многочлены степени $q - 1$ от n переменных, и каждая переменная входит в них в степени 0, 1 или 2. Все такие многочлены заведомо порождаются базисом из $\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j$ элементов. Таким образом,

$$|W'| = s \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

откуда

$$\begin{aligned}
 |W| &\leq \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!} \cdot \frac{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!}{k_{-1}!} \cdot \frac{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!}{k_0!} \cdot \frac{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}{k_1!} \cdot |W'| \\
 &\leq \frac{n!}{m_1!m_2!m_3!} \cdot \frac{m_{-1,1}!m_{-1,2}!m_{-1,3}!}{k_{-1}!} \cdot \frac{m_{0,1}!m_{0,2}!m_{0,3}!}{k_0!} \cdot \frac{m_{1,1}!m_{1,2}!m_{1,3}!}{k_1!} \\
 &\quad \times \left(\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j \right),
 \end{aligned}$$

и теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Структура разбиений из формулировки теоремы 4 и множества $\mathcal{T}$ обусловлена тем, что именно на таких разбиениях достигается, по-видимому, асимптотический максимум логарифма мощности совокупности $(-1, 0, 1)$ -векторов с запрещенным скалярным произведением (см. [15]–[20], а также [21]–[25]).

4. Приложения в задаче Нелсона–Эрдеша–Хадвигера. Задача Нелсона–Эрдеша–Хадвигера, появившаяся в середине XX века, состоит в отыскании хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n)$ евклидова пространства:

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{\chi : \mathbb{R}^n = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_\chi, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1 \text{ для всех } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \text{ для всех } i\}.$$

В разные годы этой задачей занимались многие специалисты в комбинаторной геометрии, теории кодирования и теории графов (см. [3]–[5], [9], [13], [20], [26]–[30]).

Сейчас известно, что

$$(1.239 \dots + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n.$$

Нижняя оценка получена в работе [13], а верхняя – в статье [31].

С понятием хроматического числа пространства тесно связано понятие дистанционного графа. Граф $G = (V, E)$ называется *дистанционным*, если $V \subseteq \mathbb{R}^n$, а E – это множество пар точек, отстоящих друг от друга на одно и то же расстояние $a > 0$. Ясно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geq \chi(G)$ для любого дистанционного графа G в $\mathbb{R}^n$ ($\chi(G)$ – это обычное хроматическое число графа). Более того, по теореме Эрдеша–де Брёйна (см. [32]) существует конечный дистанционный граф, на котором достигается значение $\chi(\mathbb{R}^n)$.

Дистанционный граф, на котором достигается оценка $\chi(\mathbb{R}^n) \geq (1.239 \dots + o(1))^n$, (вернее, последовательность графов G_n) строится следующим образом. В качестве множества вершин берется $V_n = V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$, а ребра проводятся тогда и только тогда, когда скалярное произведение вершин равно t . Таким образом, число независимости $\alpha(G_n)$ этого графа (максимальная мощность множества попарно не смежных вершин) в точности равно величине $m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)$. При этом ясно, что

$$\chi(G_n) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} = \frac{n!}{k_{-1}!k_0!k_1!} \cdot \frac{1}{m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)}.$$

Теорема 3 (известная ранее) позволяет дать верхнюю оценку знаменателя в некоторых специальных допущениях. С учетом этих допущений берется максимум дроби

Таблица 1

$k'_1 \backslash k'_{-1}$	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
0.05	1.10292 1.06192 t' : 0.1334				
0.1	1.14483 1.13563 t' : 0.155	1.16044 1.10902 t' : 0.2667			
0.15	1.18141 1.18523 t' : 0.1516	1.18873 1.16574 t' : 0.2916	1.20536 1.14034 t' : 0.4583		
0.2	1.21458 1.21715 t' : 0.1766	1.20842 1.20386 t' : 0.3033	1.21320 1.18112 t' : 0.415	1.22726 1.15419 t' : 0.6	
0.25	1.23275 1.23427 t' : 0.2016	1.22388 1.22614 t' : 0.2766	1.22247 1.20560 t' : 0.44	1.22654 1.17900 t' : 0.6334	1.22231 1.14853 t' : 0.74
0.3	1.23788 1.23832 t' : 0.2266	1.23312 1.23425 t' : 0.3016	1.22496 1.21529 t' : 0.4816	1.22305 1.18861 t' : 0.6733	1.21137 1.15679 t' : 0.7767
0.35	1.23383 1.23051 t' : 0.27	1.22936 1.22937 t' : 0.3283	1.22006 1.21132 t' : 0.6033	1.21583 1.18404 t' : 0.71	1.19573 1.15041 t' : 0.8116
0.4	1.22866 1.21184 t' : 0.32	1.21871 1.21250 t' : 0.3767	1.21748 1.19459 t' : 0.6466	1.20408 1.16612 t' : 0.7483	1.17440 1.13017 t' : 0.8483
0.45	1.22311 1.18318 t' : 0.3683	1.21293 1.18451 t' : 0.5683	1.21066 1.16596 t' : 0.6866	1.18667 1.13565 t' : 0.7933	1.15214 1.09675 t' : 0.8933
0.5	1.21701 1.14532 t' : 0.42	1.21250 1.14623 t' : 0.6133	1.19829 1.12621 t' : 0.7283	1.16239 1.09335 t' : 0.8333	1.11769 1.05079 t' : 0.8833

по всем k_{-1} , k_0 , k_1 и t , и он оказывается равным $(1.239 \dots + o(1))^n$ (см. [20]). Более того, он соответствует параметрам $k_{-1} \sim k'_{-1}n$, $k_0 \sim k'_0n$, $k_1 \sim k'_1n$, $t \sim t'n$ при $n \rightarrow \infty$ и $k'_{-1} \approx 0.06$, $k'_1 \approx 0.3$, $t' = (k'_1 + 3k'_{-1})/2$.

В итоге мотивирована следующая постановка задачи. Пусть даны числа $k'_{-1}, k'_0, k'_1 \in (0, 1)$, в сумме дающие единицу. Пусть

$$k_{-1} = [k'_{-1}n] \sim k'_{-1}n, \quad k_1 = [k'_1n] \sim k'_1n, \quad k_0 = n - k_{-1} - k_1 \sim k'_0n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Чему равен

$$\max_t \frac{|V_n(k_{-1}, k_0, k_1)|}{m(n, k_{-1}, k_0, k_1, t)}?$$

Разумеется, его известные нижние оценки по-прежнему имеют вид

$$(\chi(k'_{-1}, k'_0, k'_1) + o(1))^n.$$

Например, при $k'_{-1} \approx 0.06$, $k'_1 \approx 0.3$ выполнено $\chi(k'_{-1}, k'_0, k'_1) \approx 1.239$. Однако до сих пор в нашем распоряжении была только теорема 3, а теперь есть еще и дополняющая ее теорема 4. Замечательно то, что теорема 4 действительно дает значимое улучшение теоремы 3 с точки зрения описанной постановки. Ниже мы приводим таблицу значений величины $\chi(k'_{-1}, k'_0, k'_1)$. В каждой клетке, отвечающей паре чисел (k'_{-1}, k'_1) , по которой k'_0 находится однозначно, мы пишем оценку, полученную за счет теоремы 3 (ниже), и оценку, полученную за счет теоремы 4 (выше). Если новая оценка лучше, мы выделяем обе оценки жирным шрифтом. Кроме того, мы приводим в каждой клетке то значение t' , на котором получена лучшая из двух оценок. В случае, когда сильнее теорема 3, величина t' всегда равна $(k'_1 + 3k'_{-1})/2$, т.е. середине между минимальным и максимальным скалярным произведением (при $k_{-1} \leq k_1$ и $k_1 + k_{-1} \leq n/2$ минимальное скалярное произведение векторов из $V_n(k_{-1}, k_0, k_1)$ равно $-2k_{-1}$, а максимальное скалярное произведение – это всегда скалярный квадрат, т.е. $k_1 + k_{-1}$). Удивительно именно то, что зачастую сильнее теорема 4, в которой t' просто по условию правее середины указанного отрезка. К сожалению, глобальный максимум по всей таблице дает все же теорема 3, т.е. оценку хроматического числа пространства улучшить не удается.

Таблица 2

$k_1 \backslash k_{-1}$	0.3	0.35	0.4	0.45
0.3	1.18718 1.12093 t' : 0.8816			
0.35	1.17914 1.11169 t' : 0.9233	1.13842 1.06838 t' : 1.0316		
0.4	1.16063 1.08805 t' : 0.98	1.11212 1.04025 t' : 1.0566	1.045732 0.98663 t' : 1.1016	
0.45	1.11468 1.05058 t' : 1.005	1.05925 0.99748 t' : 1.0816	0.98987 0.93698 t' : 1.1483	0.90522 0.86746 t' : 1.2166
0.5	1.07135 0.99973 t' : 1.0133	1.00444 0.94017 t' : 1.0966	0.90547 0.87082 t' : 1.155	0.81212 0.78765 t' : 1.2566

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Frankl, R. Wilson, “Intersection theorems with geometric consequences”, *Combinatorica*, **1** (1981), 357–368.
- [2] Е.И. Пономаренко, А.М. Райгородский, “Улучшение теоремы Франкла–Уилсона о числе ребер гиперграфа с запретами на пересечения”, *Докл. РАН*, **454**:3 (2014), 268–269.
- [3] А.М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.

- [4] А. М. Райгородский, “О хроматических числах сфер в евклидовых пространствах”, *Докл. РАН*, **432**:2 (2010), 174–177.
- [5] A. M. Raigorodskii, “On the chromatic numbers of spheres in $\mathbb{R}^n$ ”, *Combinatorica*, **32**:1 (2012), 111–123.
- [6] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.
- [7] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247.
- [8] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.
- [9] A. M. Raigorodskii, “Coloring Distance Graphs and Graphs of Diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, Berlin, 2013, 429–460.
- [10] А. М. Райгородский, “Контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса”, *Докл. РАН*, **434**:2 (2010), 161–163.
- [11] А. М. Райгородский, “О размерности в проблеме Борсука”, *УМН*, **52**:6 (1997), 181–182.
- [12] А. М. Райгородский, “Об одной оценке в проблеме Борсука”, *УМН*, **54**:2 (1999), 185–186.
- [13] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148.
- [14] L. Bassalygo, G. Cohen, G. Zémor, “Codes with forbidden distances”, *Discrete Math.*, **213**:1-3 (2000), 3–11.
- [15] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, “О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 794–796.
- [16] А. Э. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, А. С. Усачев, “О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к проблемам Нельсона–Эрдеша–Хадвигера и Борсука”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил.*, **65**, ВИНТИ, М., 2009, 82–100.
- [17] В. К. Любимов, А. М. Райгородский, “О нижних оценках чисел независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Докл. РАН*, **427**:4 (2009), 458–460.
- [18] В. Ф. Москва, А. М. Райгородский, “Новые нижние оценки чисел независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ ”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 319–320.
- [19] А. М. Райгородский, А. А. Харламова, “О совокупностях $(-1, 0, 1)$ -векторов с запрещенными значениями попарных скалярных произведений”, *Труды по векторному и тензорному анализу*, **29**, Изд-во Моск. ун-та, М., 2013.
- [20] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [21] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов”, *Докл. РАН*, **371**:5 (2000), 600–603.
- [22] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для целочисленных многогранников”, *Матем. сб.*, **193**:10 (2002), 139–160.
- [23] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука для $(0, 1)$ -многогранников и кросс-политопов”, *Докл. РАН*, **384**:5 (2002), 593–597.
- [24] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для некоторых классов многогранников и графов”, *Докл. РАН*, **388**:6 (2003), 738–742.
- [25] А. М. Райгородский, “Проблемы Борсука и Грюнбаума для решетчатых многогранников”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:3 (2005), 81–108.
- [26] P. K. Agarwal, J. Pach, *Combinatorial Geometry*, Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [27] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.

- [28] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and his Mathematics, II Bolyai Series Budapest*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [29] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*, Springer, New York, 2009.
- [30] V. Klee, S. Wagon, *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory*, Dolciani Math. Exp., **11**, Math. Assoc. America, Washington, DC, 1991.
- [31] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [32] N. G. de Bruijn, P. Erdős, “A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations”, *Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A*, **54**:5 (1951), 371–373.

Е. И. Пономаренко

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: kathrinponomarenko@gmail.com

Поступило

08.08.2013

Исправленный вариант

26.11.2013

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: mraigor@yandex.ru