Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Пухов, Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями преобразования Фурье–Стилтьеса, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 884–898

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10353>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 11:59:53

Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями преобразования Фурье–Стилтьеса

С. С. Пухов

В лебеговом пространстве на интервале $(-a, a)$ с весом в виде конечного произведения степенных функций рассматривается система экспонент, порожденная нулями преобразования Фурье–Стилтьеса финитной функции с разрывами на концах отрезка-носителя $[-a, a]$. Получено достаточное и в определенном смысле неулучшаемое условие базиса такой системы.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10353

1. Введение. Теория базисов из экспонент, т.е. систем вида $(e^{i\lambda_n t})$, $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, в функциональных пространствах началась в 1930-х гг. с книги Пэли и Винера [1], где исследовался вопрос о базисах Рисса такого вида в пространстве $L^2(-\pi, \pi)$. В первых работах по этой теме подобные базисы рассматривались как некоторое возмущение тригонометрической системы, т.е. точки λ_n выбирались достаточно близкими к n и вещественными; это направление завершилось теоремой Кадеца [2], согласно которой неравенство $\sup |\lambda_n - n| < 1/4$ влечет наличие базиса Рисса, причем, как следует из работы Левинсона [3], постоянную $1/4$ нельзя увеличить. При рассмотрении более общих последовательностей (λ_n) оказалось удобным трактовать их как последовательность корней некоторой целой функции. С помощью так называемого (A_p) -условия (см. (1.4)), накладываемого на такую функцию, в работах [4], [5] и [6] окончательно решен вопрос о безусловных базисах из экспонент в $L^2(-\pi, \pi)$ (безусловность базиса (e_n) в гильбертовом пространстве означает, что нормированная система $(e_n/\|e_n\|)$ образует в нем базис Рисса).

Начиная с 1970-х гг. Седлецким (а позже и другими авторами) стали рассматриваться базисы из экспонент в $L^p(-a, a)$ (здесь и всюду далее $1 < p < \infty$). Поскольку целая функция, описывающая поведение точек (λ_n) , может иметь кратные корни, им рассматривалась более общая система экспонент

$$(e^{i\lambda_n t}, te^{i\lambda_n t}, \dots, t^{m_n-1}e^{i\lambda_n t})_{n=0}^\infty, \quad m_n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n \in \mathbb{C}, \quad |\lambda_{n+1}| \geq |\lambda_n|. \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (грант № 14.В37.21.0370).

Заменой понятия базиса Рисса в банаховых пространствах служит так называемое *свойство Рисса* – ограниченность оператора

$$\sum_{\lambda_n} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t} \mapsto \sum_{\operatorname{Re} \lambda_n > 0} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t}. \quad (1.2)$$

Мы приведем лишь результат из статьи [7], к которому восходят излагаемые в данной работе теоремы. Если (λ_n) – отделямая ($|\lambda_n - \lambda_m| \geq \operatorname{const} > 0$, $n \neq m$) последовательность всех корней функции

$$L(z) = \int_{-a}^a e^{izt} d\sigma(t), \quad \operatorname{var} \sigma < \infty, \quad \sigma(\pm a) \neq \sigma(\pm a \mp 0), \quad (1.3)$$

причем каждый корень λ_n имеет кратность m_n , то система (1.1) образует базис со свойством Рисса в пространстве $L^p(-a, a)$. Происхождение условий (1.3) объясняется, в частности, тем, что задание функции $L(z)$ как преобразования Фурье–Стилтьеса некоторой финитной функции σ позволяет рассматривать систему (1.1) как систему собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования с краевым условием вида

$$\int_{-a}^a y(t) d\sigma(t) = 0$$

(см., например, [8]). Условие же наличия у функции σ разрывов на концах отрезка $[-a, a]$ обеспечивает достаточно регулярное поведение как последовательности (λ_n) , в частности, ее расположение в некоторой горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq H$, так и самой функции $L(z)$. Очевидно, положив $a = \pi$ и взяв функцию σ постоянной на $(-\pi, \pi)$ и имеющей равные по модулю, но противоположные по знаку скачки в точках $\pm\pi$, мы придем к функции $L(z) = k \sin \pi z$, порождающей тригонометрическую систему (e^{int}) , $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому приведенный результат Седлецкого содержит в себе известную теорему Рисса о базисе этой системы в $L^p(-\pi, \pi)$.

Следующим этапом теории стало рассмотрение базисов из экспонент в весовых пространствах

$$L_\omega^p = L^p((-a, a), \omega(t) dt), \quad 1 < p < \infty,$$

т.е. пространствах, состоящих из определенных на интервале $(-a, a)$ измеримых функций с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_{-a}^a |f(t)|^p \omega(t) dt \right)^{1/p},$$

где вес $\omega(t)$ есть неотрицательная измеримая функция. В работе [9] показано, что для базиса тригонометрической системы $(e^{i\pi n t/a})$, $n \in \mathbb{Z}$, в L_ω^p необходимо и достаточно, чтобы вес $\omega(t)$, периодически продолженный на всю числовую ось, удовлетворял так называемому (A_p) -условию:

$$\sup_{(b,c) \subset \mathbb{R}} \left(\frac{1}{c-b} \int_b^c \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{c-b} \int_b^c (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} < +\infty. \quad (1.4)$$

Исследования базисов из экспонент общего вида в весовых пространствах проводятся в последние годы; укажем на работы [10]–[14], где рассматривается вес в виде

конечного произведения степенных функций. Наиболее общий вид веса таков:

$$\omega(t) = \prod_{j=1}^s |t - b_j|^{\alpha_j}, \quad (1.5)$$

$$-a = b_1 < \dots < b_s = a, \quad -1 < \alpha_1, \quad \dots, \quad \alpha_s < p - 1, \quad \alpha_1 = \alpha_s = \alpha.$$

Ограничения, наложенные на показатели степеней, не случайны: они необходимы и достаточны для того, чтобы периодически продолженный вес удовлетворял (A_p) -условию (что, как отмечено выше, равносильно наличию базиса тригонометрической системы). Достаточность доказана в [14], ограничения $-1 < \alpha_1, \dots, \alpha_s < p - 1$, очевидно, необходимы для сходимости интегралов в (1.4); наконец, при невыполнении равенства $\alpha_1 = \alpha_s$ (для определенности пусть $\alpha_1 > \alpha_s$) условие (1.4) нарушается:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \omega(t) dt \right) \left(\frac{1}{2\delta} \int_{a-\delta}^{a+\delta} (\omega(t))^{-1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \\ & \geq \frac{C}{(2\delta)^p} \left(\int_{a-\delta}^a (a-t)^{\alpha_s} dt + \int_a^{a+\delta} (t-a)^{\alpha_1} dt \right) \\ & \quad \times \left(\int_{a-\delta}^a (a-t)^{-\alpha_s/(p-1)} dt + \int_a^{a+\delta} (t-a)^{-\alpha_1/(p-1)} dt \right)^{p-1} \\ & \sim \frac{C}{(2\delta)^p} \cdot \frac{\delta^{\alpha_s+1}}{\alpha_s+1} \cdot \frac{\delta^{p-1-\alpha_1}}{(1-\alpha_1/(p-1))^{p-1}} = C_0 \delta^{\alpha_s-\alpha_1} \rightarrow +\infty, \quad \delta \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Отметим также, что неравенства $-1 < \alpha_1, \dots, \alpha_s < p - 1$ обеспечивают вложения $L^\infty(-a, a) \hookrightarrow L_\omega^p \hookrightarrow L^1(-a, a)$.

Выделим следующие результаты. В [10] (при более частном весе) и [12] (для веса общего вида (1.5)) получен критерий базиса системы

$$1, \quad e^{i(1+\Delta)t}, \quad e^{-i(1+\Delta)t}, \quad e^{i(2+\Delta)t}, \quad e^{-i(2+\Delta)t}, \quad \dots, \quad \Delta \in \mathbb{C}, \quad (1.6)$$

в L_ω^p , заключающийся в выполнении неравенств

$$\frac{1+\alpha}{2p} - \frac{1}{2} < \operatorname{Re} \Delta < \frac{1+\alpha}{2p}.$$

При ограничении $\alpha_1 = \dots = \alpha_s \geq 0$ на вес (1.5) в [11] доказана базисность со свойством Рисса в L_ω^p системы (1.1), порожденной отделимыми нулями функции вида (1.3).

Цель настоящей статьи – исследовать случай (1.3) в общей ситуации веса (1.5). Заметим, что (см. [15; § 6.1, теорема 1 и § 1.3]) отделимость последовательности (λ_n) является необходимым условием базиса системы (1.1) в L_ω^p с весом (1.5).

ТЕОРЕМА 1. Пусть отделима последовательность (λ_n) нулей (каждый кратности m_n) функции (1.3). Если в (1.5) $\alpha \geq 0$ и для любого $j \in 2, \dots, s-1$ выполнено $\alpha_j \leq \alpha$, то система (1.1) образует базис со свойством Рисса в L_ω^p .

Скажем, что вес $\omega(t)$ имеет особенность порядка β в точке t_0 , если существуют $c, C > 0$ такие, что

$$c|t - t_0|^\beta \leq \omega(t) \leq C|t - t_0|^\beta \quad \text{при} \quad 0 < |t - t_0| < \delta, \quad t \in (-a, a).$$

В частности, у веса $\omega(t)$ вида (1.5) есть особенности порядка α_i в точках b_i и порядка 0 во всех остальных. В следующей теореме функция $\sigma_0(t)$ является “погрешностью”, расширяющей класс рассматриваемых функций. Существо дела ярче выявляется при $\sigma_0(t) \equiv 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отделима последовательность (λ_n) нулей (каждый кратности m_n) функции (1.3), причем $\sigma(t) = \sigma_0(t) + \sigma_1(t)$, где $\sigma_0(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_q^1(-a, a)$,

$$q \geq \frac{p}{p-1}, \quad q > \frac{p}{1+\alpha}, \quad q > \frac{p}{p-1-\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (1.7)$$

а $\sigma_1(t)$ – кусочно-постоянная функция со скачками в точках c_i , $-a = c_1 < \dots < c_m = a$. Тогда система (1.1) является базисом пространства L_ω^p с весом (1.5) (и тогда обладает свойством Рисса) в том и только том случае, когда

$$\nu_i \leq \alpha, \quad i = 2, \dots, m-1,$$

где ν_i – порядок особенности веса $\omega(t)$ в точке c_i .

Теорема 2 показывает, что в теореме 1 нельзя отказаться от дополнительных условий на показатели веса. Действительно, при их нарушении положим $c = b_j$, если существует $\alpha_j > \alpha$, и $c \notin \{b_j\}$, если $\alpha < 0$. По теореме 2 система экспонент, соответствующая функции $\sigma(t)$ с единственным (помимо скачков на концах интервала) скачком в точке c , не будет базисом в L_ω^p . Таким образом, для систем экспонент, задаваемых нулями функции (1.3), дело обстоит сложнее, чем для упомянутых систем (1.6), для базисности которых значения некрайних показателей $\alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}$ не играли роли.

В случае кусочно-постоянной функции σ со скачками в точках c_i точки λ_n задаются уравнением $k_1 e^{ic_1 z} + \dots + k_m e^{ic_m z} = 0$. В частности, можно рассмотреть нули уравнения $\sin az = \tau$. Для любых $\tau \neq 0$ соответствующая система экспонент по теореме 2 не будет образовывать базис, скажем, в весовом пространстве $L^p((-a, a), (a+t)^\alpha(a-t)^\alpha dt)$ при $-1 < \alpha < 0$, в то время как отвечающая уравнению $\sin az = 0$ тригонометрическая система $(e^{i\pi n t/a})$, $n \in \mathbb{Z}$, как мы отмечали выше, образует базис во всех пространствах L_ω^p .

Отметим, что доказательство наличия базиса, хотя и может вызывать значительные технические трудности, основано на весьма естественных приемах. Для доказательства отсутствия базиса (при наличии общих необходимых для базиса свойств – полноты и т.п.) требуются более оригинальные рассуждения. В нашем случае основным аналитическим средством для достижения этой цели послужила доказанная нами лемма 3 о возможной расходимости частичного обратного преобразования Фурье в более сильной весовой норме, чем норма пространства исходной функции.

Результаты данной статьи получены в [16], но в журнальной литературе не публиковались, поэтому мы воспроизводим рассуждения из той работы с исправлением допущенных неточностей.

2. Вспомогательные утверждения из [15]. Доказательства теорем о базисе некоторой системы зачастую основываются на сходимости биортогональных рядов по этой системе к породившим их функциям. Напомним, что биортогональной

к системе (e_n) элементов банахова пространства X называют систему функционалов (f_k) из сопряженного пространства X' такую, что (f_k, e_n) равно 1 при $k = n$ и 0 в противном случае. Ряд $\sum (f_n, f) e_n$ называют *биортогональным рядом* элемента $f \in X$. Если речь идет о системе экспонент, то биортогональный ряд называют также *негармоническим рядом Фурье*. Как хорошо известно, сходимость такого ряда для всякого $f \in X$ к f в норме пространства X эквивалентна базисности системы (e_n) в X .

Нам потребуется ряд фактов, используемых в [15] при доказательстве теоремы о базисе со свойством Рисса в пространстве L_ω^p в случае $\alpha_1 = \dots = \alpha_s \geq 0$.

Благодаря расположению точек λ_n в горизонтальной полосе $|\operatorname{Im} z| \leq H$ (см. [15; § 8.1]) и их отделимости можно подобрать последовательность $X = (x_k)$ со свойствами

$$0 < x_k \uparrow +\infty, \quad x_{k+1} - x_k = O(1), \quad \operatorname{dist}((\lambda_n), \{z \mid \pm \operatorname{Re} z \in X\}) > 0. \quad (2.1)$$

В силу этих же свойств последовательности (λ_n) ее можно при необходимости сдвинуть так, чтобы она оказалась отделена от мнимой оси (но сохранив каждую точку в левой или правой полуплоскости). Такой сдвиг будет означать умножение всех функций системы (1.1) на функцию $g(t)$ такую, что $0 < c \leq |g(t)| \leq C$, что не изменит аппроксимационных свойств системы, а сохранение точек в полуплоскостях гарантирует одновременное выполнение или невыполнение свойства Рисса для исходной и сдвинутой системы.

Произведя при необходимости такой сдвиг и выбрав последовательность (x_k) , выпишем формулы из [15; § 7.1]:

$$\begin{aligned} S_k(t, f) &= \sum_{|\operatorname{Re} \lambda_n| < x_k} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t}, & S_k^+(t, f) &= \sum_{0 < \operatorname{Re} \lambda_n < x_k} \left(\sum_{j=0}^{m_n-1} c_{nj} t^j \right) e^{i\lambda_n t}, \\ R_k(t, f) &= S_k(t, f) - \int_{-x_k}^{x_k} \widehat{f}(u) e^{iut} du, & R_k^+(t, f) &= S_k^+(t, f) - \int_0^{x_k} \widehat{f}(u) e^{iut} du, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где c_{nj} – коэффициенты биортогонального ряда функции f , а $\widehat{f}(u)$ – ее преобразование Фурье, и согласно формулам (12) из [15; § 8.1]

$$R_k(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz, \quad R_k^+(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k^+} e^{izt} \frac{F(z)}{L(z)} dz. \quad (2.3)$$

Здесь Γ_k (соответственно Γ_k^+) – пара прямых $\operatorname{Re} z = \pm x_k$ (соответственно $\operatorname{Re} z = 0, x_k$), проходимых первая вниз, вторая вверх, а $F(z)$ может быть задана формулами (23) и (28) из [15; § 7.1]:

$$\begin{aligned} F(z) &= i \cdot \begin{cases} \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_{-a}^u e^{iz(u-v)} f(v) dv = \int_{-2a}^0 e^{-izu} F(\sigma, u) du, & \operatorname{Im} z > 0, \\ - \int_{-a}^a d\sigma(u) \int_u^a e^{iz(u-v)} f(v) dv = - \int_0^{2a} e^{-izu} F(\sigma, u) du, & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \\ F(\sigma, u) &= \int_{-a}^a f(t+u) d\sigma(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

(функцию f считаем продолженной нулем вне интервала $(-a, a)$). Поскольку прямые $\operatorname{Re} z = 0, \pm x_k$ отделены от последовательности (λ_n) , то на этих прямых верна оценка [15; § 8.1, формула (10)]

$$|L(z)| \geq c e^{a|\operatorname{Im} z|}, \quad c = \operatorname{const} > 0. \quad (2.5)$$

Выполнение этой оценки на мнимой оси влечет по следствию 2 из [15; § 4.3] полноту системы (1.1) во всех пространствах L_ω^p .

Благодаря свойствам последовательности (λ_n) (расположение в горизонтальной полосе и упорядоченность по неубыванию модулей) величины $S_k(t, f)$ при достаточно больших k образуют подпоследовательность частичных сумм биортогонального ряда. В теореме 2 из [15; § 7.2] указано, что коэффициенты $c_{nk} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и $\sup m_n < \infty$. Эти свойства вместе с условиями $|\operatorname{Im} \lambda_n| \leq H$ и $x_{k+1} - x_k = O(1)$ приводят к тому, что общий член биортогонального ряда стремится к 0 в норме L_ω^p , а всякая частичная сумма этого ряда отличается от величины $S_k(t, f)$ для некоторого k на равномерно ограниченное число слагаемых. Значит, сходимость $S_k(t, f) \rightarrow f(t)$, $k \rightarrow \infty$, по норме L_ω^p равносильна сходимости к f всего биортогонального ряда по этой норме, т.е. наличию базиса системы (1.1). Аналогичные рассуждения показывают, что сходимость величины $S_k^+(t, f)$ при $k \rightarrow \infty$ равносильна сходимости ряда из правой части (1.2).

Если сходимость $S_k(t, f) \rightarrow f(t)$, $k \rightarrow \infty$, для всякой $f \in L_\omega^p$ имеет место, то по принципу равномерной ограниченности операторы S_k ограничены равномерно по k в норме L_ω^p . Если же нам известна такая равномерная ограниченность, то в силу отмеченной выше полноты системы экспонент и теоремы Банаха–Штейнгауза мы приходим к сходимости $S_k(t, f) \rightarrow f(t)$ для всякой $f \in L_\omega^p$. Действительно, для всякой линейной комбинации функций системы такая сходимость заведомо верна: $S_k(t, f)$ просто совпадает в этом случае с $f(t)$ для достаточно больших k . А множество линейных комбинаций функций системы плотно в L_ω^p в силу полноты системы. Из теоремы Банаха–Штейнгауза и предположенной равномерной ограниченности теперь следует сходимость $S_k(t, f) \rightarrow f(t)$ для всех $f \in L_\omega^p$.

Итак, сходимость $S_k(t, f) \rightarrow f(t)$, $k \rightarrow \infty$, а значит, и базисность системы экспонент эквивалентна равномерной по k ограниченности операторов S_k . Из равномерной сходимости величины $S_k^+(t, f)$ с частичными суммами ряда из правой части (1.2) аналогичным образом следует, что для выполнения свойства Рисса необходимо и достаточно равномерной по k ограниченности операторов S_k^+ .

3. Прочие вспомогательные утверждения. Обозначим через $\widehat{f}(u)$ преобразование Фурье, через $f_x(t)$ – частичное обратное преобразование Фурье функции f , а через $f_x^+(t)$ – такое преобразование с интегралом только по положительным аргументам:

$$\widehat{f}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i u \tau} d\tau, \quad f_x(t) = \int_{-x}^x \widehat{f}(u) e^{i u t} du, \quad f_x^+(t) = \int_0^x \widehat{f}(u) e^{i u t} du. \quad (3.1)$$

Если функция f изначально определена лишь на конечном интервале, при взятии преобразования Фурье полагаем ее продолженной нулем на числовую ось.

ЛЕММА 1 [13]. Для всякой $f \in L_\omega^p$ существуют в норме L_ω^p пределы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_x(t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_x^+(t).$$

В силу этой леммы операторы, сопоставляющие функции f величины $f_x(t)$ и $f_x^+(t)$, ограничены равномерно по x в норме L_ω^p . Поэтому и в силу формул (2.2) выводы, сделанные в конце предыдущего пункта, можно переформулировать в виде следующей леммы.

ЛЕММА 2. При условии (1.3) и отделимости (λ_n) базисность системы (1.1) в L_ω^p эквивалентна равномерной по k ограниченности в L_ω^p операторов R_k (см. (2.2) и (2.1)). Если система является базисом, то для выполнения свойства Рисса необходимо и достаточно равномерной по k ограниченности в L_ω^p операторов R_k^+ .

ЛЕММА 3. Пусть $1 < p < \infty$, $-1 < \alpha < \alpha' < p - 1$, $\varepsilon_0 > 0$. Тогда найдется $f(t) \in L^p((0, \varepsilon_0), t^{\alpha'} dt)$ такая, что

$$\|f_x(t)\|_{L^p((-\varepsilon, 0), |t|^\alpha dt)} \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \text{для любого } \varepsilon > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $f(t) = t^\beta \chi_{(0, \varepsilon_0)}(t)$, где

$$-\frac{1 + \alpha'}{p} < \beta < -\frac{1 + \alpha}{p}. \quad (3.2)$$

Согласно известной формуле частичного обратного преобразования Фурье

$$f_x(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \frac{\sin x(v-u)}{v-u} dv.$$

Покажем, что при $-\delta/x < u < 0$ (где $\delta > 0$ – постоянная, выбор которой опишем далее) $f_x(u)$ оценивается снизу величиной $C_0 x^\beta$ (C_0 – положительная постоянная). Для этого рассмотрим разность между $f_x(u)$ и величиной

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \frac{\sin xv}{v} dv.$$

Для оценки этой разности применим теорему Лагранжа к функции $(\sin xt)/t$ аргумента t :

$$\Delta = \frac{\sin x(v-u)}{v-u} - \frac{\sin xv}{v} = \frac{x\tau \cos x\tau - \sin x\tau}{\tau^2} |u|, \quad v < \tau < v-u.$$

Рассмотрим два случая: $v < 1/x$ и $v > 1/x$. В первом из них достаточно оценить

$$|\Delta| \leq x^2 \left| \frac{x\tau \cos x\tau - \sin x\tau}{(x\tau)^2} \right| \frac{\delta}{x} \leq C\delta x$$

(ведь функция $(t \cos t - \sin t)/t^2$ ограничена на $\mathbb{R}$, а $|u| < \delta/x$), и тогда (отметим, что $-1 < \beta < 0$)

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{1/x} f(v) \left(\frac{\sin x(v-u)}{v-u} - \frac{\sin xv}{v} \right) dv \right| \leq \frac{C\delta x}{\pi} \int_0^{1/x} v^\beta dv = \frac{C\delta}{(1+\beta)\pi} x^{-\beta}.$$

А во втором случае, оценивая синус и косинус единицей и применяя неравенства $|u| < \delta/x$, $1 < xv < x\tau$ и $\tau > v$, имеем

$$|\Delta| \leq \frac{x\tau + 1}{\tau^2} \frac{\delta}{x} \leq \frac{2x\tau}{\tau^2} \frac{\delta}{x} = \frac{2\delta}{\tau} < \frac{2\delta}{v},$$

откуда

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_{1/x}^{\varepsilon_0} f(v) \left(\frac{\sin x(v-u)}{v-u} - \frac{\sin xv}{v} \right) dv \right| \leq \frac{2\delta}{\pi} \int_{1/x}^{\varepsilon_0} v^{\beta-1} dv < \frac{2\delta}{|\beta|\pi} x^{-\beta}.$$

Сложив две полученные оценки для интегралов, получаем, что при условии $-\delta/x < u < 0$ найдется (зависящая только от β) константа $C_1 = C/(1+\beta)\pi + 2/|\beta|\pi$ такая, что

$$I_0 = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \left(\frac{\sin x(v-u)}{v-u} - \frac{\sin xv}{v} \right) dv \right| \leq C_1 \delta x^{-\beta}.$$

Тогда в силу сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{1-\beta}} dt = A > 0$$

при больших x имеем

$$\begin{aligned} f_x(u) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \frac{\sin x(v-u)}{v-u} dv \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \left(\frac{\sin x(v-u)}{v-u} - \frac{\sin xv}{v} \right) dv + \frac{1}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0} f(v) \frac{\sin xv}{v} dv \\ &\geq -I_0 + \frac{x^{-\beta}}{\pi} \int_0^{\varepsilon_0 x} \frac{\sin t}{t^{1-\beta}} dt > -C_1 \delta x^{-\beta} + \frac{A}{2\pi} x^{-\beta}. \end{aligned}$$

Выбирая теперь $\delta < A/2\pi C_1$, получим нужную оценку $f_x(u) > C_0 x^{-\beta}$ при $-\delta/x < u < 0$, из которой сразу следует расходимость $f_x(u)$ в норме $L^p((-\varepsilon, 0), t^\alpha dt)$ при $x \rightarrow +\infty$, так как

$$\int_{-\delta/x}^0 (f_x(u))^p |u|^\alpha du > C_0^p x^{-\beta p} \int_{-\delta/x}^0 |u|^\alpha du = C_2 x^{-1-\alpha-\beta p},$$

а последний показатель степени больше нуля по второму неравенству (3.2). А по первому неравенству (3.2) $t^\beta \in L^p((0, \varepsilon_0), t^{\alpha'} dt)$. Лемма доказана.

Отметим также следующее неравенство. Для всякого $\rho \in (-1, 0)$ верно

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 e^t |t - t_0|^\rho dt &= \int_{\mathbb{R}_- \cap [t_0-1, t_0+1]} e^t |t - t_0|^\rho dt + \int_{\mathbb{R}_- \setminus [t_0-1, t_0+1]} e^t |t - t_0|^\rho dt \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{dt}{|t|^\rho} + \int_{-\infty}^0 e^t dt = C(\rho). \end{aligned} \quad (3.3)$$

4. Доказательство теоремы 1. Докажем при помощи представления $F(z)$ повторными интегралами в (2.4) оценку

$$|F(x + iy)| \leq C \|f\| |y|^{(1+\alpha)/p-1}, \quad y \neq 0, \quad C \neq C(x, y, f). \quad (4.1)$$

Из (2.4) ясно, что в силу ограниченности вариации функции σ для этого достаточно доказать для всех $u \in (-a, a)$ и $y > 0$ оценку

$$\left| \int_{-a}^u e^{i(x+iy)(u-v)} f(v) dv \right| \leq C_0 \|f\| y^{(1+\alpha)/p-1}, \quad C_0 \neq C_0(u, x, y, f) \quad (4.2)$$

(та же оценка для случая $y < 0$ может быть получена аналогично). Используя неравенство Гёльдера, левую часть (4.2) оценим как

$$\begin{aligned} \left| \int_{-a}^u e^{i(x+iy)(u-v)} f(v) dv \right| &= \left| \int_{-a}^u e^{i(x+iy)(u-v)} \omega^{-1/p}(v) \cdot f(v) \omega^{1/p}(v) dv \right| \\ &\leq \|f\| \left(\int_{-a}^u e^{-(py(u-v))/(p-1)} \omega^{-1/(p-1)}(v) dv \right)^{(p-1)/p}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь запасемся покрытием отрезка $[-a, a]$ отрезками I_j , содержащими каждый ровно одну точку b_j из формул для веса (1.5), и заметим, что, раз все $\alpha_j \leq \alpha$ и $\omega(t) \geq A_j |t - b_j|^{\alpha_j}$, $A_j > 0$, на отрезке I_j , то

$$\begin{aligned} \omega^{-1/(p-1)}(v) &\leq \sum_{j=1}^s \chi_{I_j}(v) \omega^{-1/(p-1)}(v) \\ &\leq \sum_{j=1}^s B_j |v - b_j|^{-\alpha_j/(p-1)} \leq \sum_{j=1}^s C_j |v - b_j|^{-\alpha/(p-1)}. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать для произвольного b оценку

$$\int_{-a}^u e^{-(py(u-v))/(p-1)} |v - b|^{-\alpha/(p-1)} dv \leq c y^{\alpha/(p-1)-1}, \quad c \neq c(u, y), \quad (4.4)$$

и из нее будет следовать оценка

$$\begin{aligned} \int_{-a}^u e^{-(py(u-v))/(p-1)} \omega^{-1/(p-1)}(v) dv \\ \leq \sum_{k=1}^s C_k \int_{-a}^u e^{-y(u-v)} |v - b_k|^{-\alpha/(p-1)} dv \leq c_0 y^{\alpha/(p-1)-1} \end{aligned}$$

и, значит (см. (4.3)), оценка (4.2). Имеем после замены $w = -py(u - v)/(p - 1)$

$$\begin{aligned} \int_{-a}^u e^{-(py(u-v))/(p-1)} |v - b|^{-\alpha/(p-1)} dv \\ = A y^{\alpha/(p-1)-1} \int_{-(py(u+a))/(p-1)}^0 e^w \left| w + \frac{py(u-b)}{p-1} \right|^{-\alpha/(p-1)} dw \\ < A y^{\alpha/(p-1)-1} \int_{-\infty}^0 e^w |w + d|^{-\alpha/(p-1)} dw, \quad d = \frac{py(u-b)}{p-1}. \end{aligned}$$

А последний интеграл ограничен равномерно по d в силу неравенства (3.3).

Итак, оценка (4.4), а с ней и (4.1) доказана, а из последней вместе с (2.3), (2.5) и оценкой $|e^{i(x+iy)t}| \leq e^{|y|t}$ сразу следует, что для всех $t \in (-a, a)$

$$\begin{aligned} |R_k(t, f)|, |R_k^+(t, f)| &\leq \frac{C}{\pi c} \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|(a-|t|)} |y|^{(1+\alpha)/p-1} dy \\ &= \frac{C}{\pi c} (a - |t|)^{-(1+\alpha)/p} \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|u|} |u|^{(1+\alpha)/p-1} du \\ &= K \|f\| (a - |t|)^{-(1+\alpha)/p}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $K \neq K(f, x, t)$. Из первой оценки следует, что операторы R_k имеют слабый тип (p, p) в пространстве с мерой $\mu(A) = \int_A \omega(t) dt$ при одной и той же константе M :

$$\mu(t : |R_k(t, f)| > y) \leq \mu\left(t : \frac{K\|f\|}{(a - |t|)^{(1+\alpha)/p}} > y\right) = \mu\left(t : |t| > a - \left(\frac{K\|f\|}{y}\right)^{p/(1+\alpha)}\right),$$

и для больших значений y эту цепочку неравенств можно продолжить, обозначив $b = (K\|f\|/y)^{p/(1+\alpha)}$,

$$\mu(t : |R_k(t, f)| > y) \leq C_1 \int_{a-b}^a (a - u)^\alpha du = C_2 b^{1+\alpha} = \left(\frac{M\|f\|}{y}\right)^p,$$

а для $y \leq y_0\|f\|$ последнее неравенство очевидно. Теперь, фиксируя p_1 и p_2 такими, что $1 + \max(0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) < p_1 < p < p_2$ и повторяя для них вместо p все вышесказанное, по интерполяционной теореме Марцинкевича заключаем, что операторы R_k равномерно ограничены в L_ω^p , что по лемме 2 дает базисность системы (1.1) в L_ω^p . Аналогично из второй оценки (4.5) выводится слабый тип, а затем и равномерная ограниченность операторов R_k^+ , что доказывает выполнение свойства Рисса.

5. Доказательство теоремы 2. Докажем прежде всего, что в условиях теоремы 2 для некоторого $\delta > 0$ выполняется оценка

$$\int_{(-a, -a+\delta)} e^{izt} d\sigma(t), \int_{(a-\delta, a)} e^{izt} d\sigma(t) = O(e^{a|y|}|y|^{(1+\alpha)/r-1}), \quad (5.1)$$

$$y = \operatorname{Im} z \neq 0, \quad r > p.$$

Выберем δ меньшим, чем a , $a - c_{m-1}$ и $c_2 + a$, тогда σ_1 будет константой как на $(-a, -a + \delta)$, так и на $(a - \delta, a)$. Поэтому она не даст вклада в интегралы в (5.1), и мы можем считать, что в них фигурирует σ_0 вместо σ . Рассмотрим первый из интегралов в (5.1) (второй оценивается по аналогии); можно считать, что $y > 0$, поскольку в противном случае оценка тривиальна: интеграл ограничен, а правая часть (5.1) отделена от нуля. Поскольку $q > p/(1 + \alpha) > 1$, по неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-a}^{-a+\delta} e^{izt} \sigma'_0(t) dt \right| &\leq \|\sigma_0\|_{W_q^1} \left(\int_{-a}^{-a+\delta} e^{-qyt/(q-1)} dt \right)^{(q-1)/q} \\ &\leq \|\sigma_0\|_{W_q^1} e^{ay} \left(\int_{-a}^{-a+\delta} e^{-qy(t+a)/(q-1)} dt \right)^{(q-1)/q} \\ &= \frac{\|\sigma_0\|_{W_q^1} e^{ay}}{y^{1-1/q}} \left(\int_0^{\delta y} e^{-qu/(q-1)} du \right)^{(q-1)/q} \\ &< C e^{ay} y^{(1+\alpha)/r-1}, \quad r = q(1 + \alpha) > p. \end{aligned}$$

Будем постепенно заменять величины $R_k(t, f)$ и $R_k^+(t, f)$ на другие таким образом, чтобы разность старых и новых величин была равномерно по k ограниченным оператором в L_ω^p . В силу леммы 2 равномерная ограниченность новых величин будет эквивалентна базисности системы (1.1) и выполнению свойства Рисса соответственно.

Здесь мы будем использовать представление функции $F(z)$ правой частью формул (2.4). Отметим вначале, что из этих формул и вложения $L_\omega^p \hookrightarrow L^1(-a, a)$ следует оценка

$$|F(z)| \leq \|F(\sigma, u)\|_{L^1(-2a, 2a)} = \text{var } \sigma \|f\|_{L^1(-a, a)} \leq C \|f\|. \quad (5.2)$$

Выбрав любое малое положительное $\varepsilon < \min(b_2 + a, a - b_{s-1})$ (см. (1.5)), заметим, что равномерная по k ограниченность $R_k(t, f)$ в L_ω^p равносильна такой же ограниченности всех трех величин

$$\begin{aligned} R_k^1(t, f) &= \chi_{(-a, -a+\varepsilon)}(t) R_k(t, f), & R_k^2(t, f) &= \chi_{[-a+\varepsilon, a-\varepsilon]}(t) R_k(t, f), \\ R_k^3(t, f) &= \chi_{(a-\varepsilon, a)}(t) R_k(t, f) \end{aligned}$$

соответственно в пространствах

$$\begin{aligned} L^p((-a, -a+\varepsilon), (a+t)^\alpha dt), & \quad L^p([-a+\varepsilon, a-\varepsilon], \omega(t) dt), \\ L^p((a-\varepsilon, a), (a-t)^\alpha dt). \end{aligned}$$

Ограниченность операторов $R_k^2(t, f)$ очевидна из формул (2.3) в силу оценок (2.5) и (5.2):

$$|R_k^2(t, f)| \leq c_1 \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|(a-|t|)} dy \leq c_1 \|f\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|\varepsilon} dy = \frac{c_1 \|f\|}{2\varepsilon}.$$

Рассмотрим величину $R_k^3(t, f)$, т.е. $t \in (a-\varepsilon, a)$. Тогда, согласно (2.3), (2.5) и (5.2) интегралы по лучам $\text{Re } z = \pm x$, $\text{Im } z > 0$ будут не больше чем

$$c_3 \|f\| \int_0^{+\infty} e^{-y(a+t)} dy \leq c_2 \|f\| \int_0^{+\infty} e^{-ya} dy = \frac{c_2 \|f\|}{a}.$$

Таким образом, равномерная ограниченность $R_k^3(t, f)$ эквивалентна равномерной ограниченности интеграла

$$R_k^4(t, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{e^{izt}}{L(z)} F(z) dz,$$

где интегрирование ведется по лучам $\text{Re } z = \pm x_k$, $\text{Im } z < 0$, проходимым в противоположных направлениях. Нам было достаточно оценить сами интегралы по верхним лучам, а не их норму, поскольку $L^\infty(a-\varepsilon, a)$ вложено в $L^p((a-\varepsilon, a), (a-t)^\alpha dt)$. Далее, покажем, что в интеграле $R_k^4(t, f)$ можно заменить $L(z)$ на e^{iaz} (это ключевая идея доказательства): для δ из (5.1), расписав по аддитивности интеграл в (1.3), имеем (через h обозначен скачок σ в точке a : $h = \sigma(a) - \sigma(a-0)$)

$$\begin{aligned} |L(z) - h e^{iaz}| &= \left| \int_{[-a, a-\delta]} e^{izs} d\sigma(s) + \int_{(a-\delta, a)} e^{izs} d\sigma(s) \right| \\ &\leq \text{var } \sigma e^{(a-\delta)|y|} + c_3 e^{a|y|} |y|^{(1+\alpha)/r-1} = e^{a|y|} (\text{var } \sigma e^{-\delta|y|} + c_3 |y|^{(1+\alpha)/r-1}) \\ &\leq c_4 e^{a|y|} |y|^{(1+\alpha)/r-1}, \quad y = \text{Im } z < 0. \end{aligned}$$

Поэтому разность между $R_k^4(t, f)$ и величиной

$$R_k^5(t, f) = \frac{1}{2\pi i h} \int_{\gamma_k} e^{iz(t-a)} F(z) dz$$

не превзойдет (пользуемся также оценками (2.5) и (5.2))

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} e^{izt} F(z) \left(\frac{1}{L(z)} - \frac{1}{h e^{iaz}} \right) dz \right| \\ & \leq c_5 \|f\| \int_{\gamma_k} e^{-t \operatorname{Im} z} \left| \frac{L(z) - h e^{iaz}}{h L(z) e^{iaz}} \right| |dz| \leq c_5 \|f\| \int_{-\infty}^0 e^{(a-t)y} |y|^{(1+\alpha)/r-1} dy \\ & = c_6 \|f\| (a-t)^{-(1+\alpha)/r} \int_{-\infty}^0 e^u |u|^{(1+\alpha)/r-1} du = c_7 \|f\| (a-t)^{-(1+\alpha)/r}. \end{aligned}$$

Подбирая p_1, p_2 : $1 + \max(0, \alpha_1, \dots, \alpha_s) < p_1 < p < p_2 < r$, видим, что оценка (5.1) верна и для p_1 или p_2 вместо r . Значит, и последняя оценка остается верной при замене r на p_1 или p_2 и $\|f\|$ на норму f в пространстве $L^{p_1}((-a, a), \omega(t) dt)$ или $L^{p_2}((-a, a), \omega(t) dt)$ соответственно. Как мы видели в конце предыдущего пункта, такие оценки влекут равномерную ограниченность рассматриваемых операторов (в данном случае – разности $R_k^5(t, f) - R_k^4(t, f)$, $t \in (a - \varepsilon, a)$).

В силу представления $F(z)$ правой нижней частью формул (2.4) величина $R_k^5(t, f)$ равна с точностью до умножения на константу

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \left(\exp(ix_k(t-a) - y(t-a)) \int_0^{2a} \exp(-ix_k u + yu) F(\sigma, u) du \right. \\ & \quad \left. - \exp(-ix_k(t-a) - y(t-a)) \int_0^{2a} \exp(ix_k u + yu) F(\sigma, u) du \right) dy \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2a} \sin((u - (t-a))x_k) F(\sigma, u) du \int_{-\infty}^0 \exp(y(u - (t-a))) dy \\ & = \frac{1}{\pi} \int_0^{2a} \frac{\sin((u - (t-a))x_k)}{u - (t-a)} F(\sigma, u) du, \end{aligned} \quad (5.3)$$

что совпадает с частичным обратным преобразованием Фурье функции $F(\sigma, u)$ (точнее, ее ограничения на $[0, 2a]$) в точке $t - a$. Нас интересует норма этой величины в $L^p((a - \varepsilon, a), (a - t)^\alpha dt)$. Делая сдвиг на a влево, мы сведем вопрос к ограниченности (равномерно по k) в норме $L^p((-\varepsilon, 0), |t|^\alpha dt)$ величин $(F(\sigma, u) \chi_{(0, 2a)}(u))_{x_k}(t)$ (напомним обозначения (3.1)).

Коротко рассмотрим и аналогичную оценку величины $R_k^1(t, f)$, для которой $t \in (-a, -a + \varepsilon)$. Основной вклад в нее будут вносить уже интегралы по верхним лучам, $L(z)$ в знаменателе заменится на e^{-iaz} , и вместо (5.3) получится величина

$$R_k^6(t, f) = \frac{1}{2\pi h' i} \int_{\gamma'_k} e^{iz(t+a)} F(z) dz = \frac{i}{\pi h'} \int_{-2a}^0 \frac{\sin((u - (t+a))x_k)}{u - (t+a)} F(\sigma, u) du.$$

Поэтому мы придем к тому, что равномерная по k ограниченность $R_k^1(t, f)$ равносильна такой же ограниченности нормы величины $(F(\sigma, u) \chi_{(-2a, 0)}(u))_{x_k}(t)$ в пространстве $L^p((0, \varepsilon), t^\alpha dt)$.

Итак, мы получили, что базисность системы (1.1) в L_ω^p равносильна одновременной равномерной по k ограниченности отображений

$$\begin{aligned} & (F(\sigma, u) \chi_{(0, 2a)}(u))_{x_k} : L_\omega^p \rightarrow L^p((-\varepsilon, 0), |t|^\alpha dt), \\ & (F(\sigma, u) \chi_{(-2a, 0)}(u))_{x_k} : L_\omega^p \rightarrow L^p((0, \varepsilon), t^\alpha dt). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Работая с формулой для $R_k^+(t, f)$ при $t \in (a - \varepsilon, a)$, придем вместо правой части (5.3) к

$$\int_0^{2a} \frac{e^{-ix_k(u-(t-a))} - 1}{u - (t-a)} F(\sigma, u) du = \frac{2\pi}{i} (F(\sigma, u)\chi_{(0,2a)}(u))_{x_k}^+(t-a),$$

откуда равномерная по k ограниченность $R_k^+ : L_\omega^p \rightarrow L^p((a - \varepsilon, a), (a - t)^\alpha dt)$ эквивалентна ограниченности отображений $(F(\sigma, u)\chi_{(0,2a)}(u))_{x_k}^+ : L_\omega^p \rightarrow L^p((-\varepsilon, 0), |t|^\alpha dt)$. И аналогично доказывается, что отображения $R_k^+ : L_\omega^p \rightarrow L^p((-a, -a + \varepsilon), (a + t)^\alpha dt)$ равномерно ограничены тогда и только тогда, когда равномерно ограничены отображения

$$(F(\sigma, u)\chi_{(-2a,0)}(u))_{x_k}^+ : L_\omega^p \rightarrow L^p((0, \varepsilon), t^\alpha dt).$$

Таким образом, выполнение свойства Рисса равносильно одновременной равномерной ограниченности отображений

$$\begin{aligned} (F(\sigma, u)\chi_{(0,2a)}(u))_{x_k}^+ : L_\omega^p &\rightarrow L^p((-\varepsilon, 0), |t|^\alpha dt), \\ (F(\sigma, u)\chi_{(-2a,0)}(u))_{x_k}^+ : L_\omega^p &\rightarrow L^p((0, \varepsilon), t^\alpha dt). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Докажем, что отображения (5.4) и (5.5) равномерно ограничены, если вместо функции σ в них фигурирует σ_0 (см. формулировку теоремы 2). Для этого достаточно доказать, что $|F(\sigma_0, u)| \leq C\|f\|$, ведь тогда и норма величины $F(\sigma_0, u)$ в пространстве $L^p((-\varepsilon, \varepsilon), |t|^\alpha dt)$ не превзойдет $C_0\|f\|$, что вкупе с леммой 1 и принципом равномерной ограниченности даст требуемое.

Если в первом неравенстве (1.7) знак строгий, то неравенство Гёльдера с тремя показателями p, q и $pq/(pq - p - q)$ дает (вне $(-a, a)$ считаем вес ω и функцию f продолженными нулем)

$$\begin{aligned} |F(\sigma_0, u)| &= \left| \int_{-a}^a (f(t+u)\omega^{1/p}(t+u))\sigma_0'(t)\omega^{-1/p}(t+u) dt \right| \\ &\leq \|f\| \|\sigma_0\|_{W_q^1} \left(\int_{-a}^a \omega^{-q/(pq-p-q)}(t+u) dt \right)^{(pq-p-q)/(pq)}, \end{aligned}$$

где последний интеграл конечен, так как его особенности имеют порядок

$$-\frac{q\alpha_j}{pq-p-q} > -1$$

в силу последних неравенств в (1.7). В случае же $q = p/(p-1)$ последние неравенства в (1.7) влекут $\alpha_j < 0$, а тогда выражение $\omega^{-1/p}(t+u)$ просто ограничено и достаточно применить неравенство Гёльдера с двумя показателями: p для $f(t+u)\omega^{1/p}(t+u)$ и q для $\sigma_0'(t)$.

Поскольку $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ и в силу линейности выражений в (5.4) по σ доказанная ограниченность этих выражений для σ_0 означает, что наличие базиса системы экспонент равносильно равномерной ограниченности отображений (5.4) для σ_1 в роли σ . Аналогично, выполнение свойства Рисса равносильно равномерной ограниченности отображений (5.5) для σ_1 в роли σ . Но (см. (2.4)) $F(\sigma_1, u)$ есть линейная комбинация сдвигов функции f :

$$F(\sigma_1, u) = \sum_{i=1}^m h_i f(u + c_i)$$

(h_i – скачок σ_1 в точке c_i). Поэтому в случае, когда для любого $i = 2, \dots, m-1$ выполнено $\nu_i \leq \alpha$, при достаточно малом ε согласно неравенству Минковского

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |F(\sigma_1, u)|^p |u|^\alpha du \right)^{1/p} &\leq \sum_{i=1}^m |h_i| \left(\int_{c_i-\varepsilon}^{c_i+\varepsilon} |f(u)|^p |u - c_i|^\alpha du \right)^{1/p} \\ &\leq \sum_{i=1}^m |h_i| \left(\int_{c_i-\varepsilon}^{c_i+\varepsilon} |f(u)|^p |u - c_i|^{\nu_i} du \right)^{1/p} \\ &\leq C \sum_{i=1}^m \left(\int_{c_i-\varepsilon}^{c_i+\varepsilon} |f(u)|^p \omega(u) du \right)^{1/p} \leq Cm \|f\|, \end{aligned}$$

что по лемме 1 и принципу равномерной ограниченности дает ограниченность нужных отображений и, тем самым, наличие базиса со свойством Рисса.

Если же $\nu_j > \alpha$ в некоторой точке скачка c_j , $j = 2, \dots, m-1$, то по лемме 3 найдется функция $f \in L^p((0, \varepsilon_0), u^{\alpha'} du)$ такая, что $f_{x_k}(u)$ расходится при $k \rightarrow \infty$ в норме $L^p((-\varepsilon, 0), |u|^\alpha du)$. Здесь α' выбрано большим α и меньшим $p-1$ и ν_j , а функция f равна нулю вне $(0, \varepsilon_0)$. Теперь в качестве контрпримера к равномерной ограниченности $(F(\sigma_1, u)\chi_{(0, 2a)}(u))_{x_k}$ подойдет функция $f(u - c_j)$, лежащая в L_ω^p при достаточно малом ε_0 по определению ν_j и неравенству $\nu_j > \alpha'$:

$$\begin{aligned} \left(\int_{c_j}^{c_j+\varepsilon_0} |f(u - c_j)|^p \omega(u) du \right)^{1/p} &\leq C_1 \left(\int_{c_j}^{c_j+\varepsilon_0} |f(u - c_j)|^p (u - c_j)^{\nu_j} du \right)^{1/p} \\ &\leq C_1 \left(\int_{c_j}^{c_j+\varepsilon_0} |f(u - c_j)|^p (u - c_j)^{\alpha'} du \right)^{1/p} \\ &= C \left(\int_0^{\varepsilon_0} |f(u)|^p u^{\alpha'} du \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Действительно, тогда

$$F(\sigma_1, u)\chi_{(0, 2a)}(u) = \sum_{i=1}^m h_i f(u + c_i - c_j)\chi_{(0, 2a)}(u), \quad (5.6)$$

и при $i \neq j$ носитель $f(u + c_i - c_j)$ отделен от интервала $(-\varepsilon, 0)$ для достаточно малого ε_0 , поэтому частичное обратное преобразование Фурье соответствующего слагаемого равномерно ограничено даже в норме $L^\infty(-\varepsilon, 0)$. А при $i = j$ такое преобразование слагаемого $h_j f(u)\chi_{(0, 2a)}(u) = h_j f(u)$ (f сосредоточена на $(0, \varepsilon_0)$) расходится при $k \rightarrow \infty$ в норме $L^p((-\varepsilon, 0), |u|^\alpha du)$ по выбору f . Значит, частичное обратное преобразование Фурье всей суммы (5.6) неограничено в этой норме, и система экспонент базиса не образует.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. E. A. C. Paley, N. Wiener, *Fourier Transforms in the Complex Domain*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **19**, Amer. Math. Soc., New York, 1934.
- [2] М. И. Кадец, “Точное значение постоянной Палая–Винера”, *Докл. АН СССР*, **155** (1964), 1253–1254.

- [3] N. Levinson, *Gap and Density Theorems*, Amer. Math. Soc., New York, 1940.
- [4] Б. С. Павлов, “Базисность системы экспонент и условие Макенхоупта”, *Докл. АН СССР*, **247** (1979), 37–40.
- [5] S. V. Hruščev, N. K. Nikolskii, B. S. Pavlov, “Unconditional bases of exponentials and of reproducing kernels”, *Lecture Notes in Math.*, **864** (1981), 214–235.
- [6] А. М. Минкин, “Отражение показателей и безусловные базисы из экспонент”, *Алгебра и анализ*, **3:5** (1991), 109–134.
- [7] А. М. Седлецкий, “Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси”, *УМН*, **37:5** (1982), 51–95.
- [8] В. А. Молоденков, А. П. Хромов, “Разложение по собственным функциям одной краевой задачи для оператора дифференцирования”, *Дифференц. уравнения и вычислит. матем.*, **1** (1972), 17–26.
- [9] R. Hunt, B. Muckenhoupt, R. Wheeden, “Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **176** (1973), 227–251.
- [10] Е. И. Моисеев, “О базисности систем синусов и косинусов в весовом пространстве”, *Дифференц. уравнения*, **34:1** (1998), 40–44.
- [11] A. Boivin, A. M. Sedletsii, “Bases of exponentials in weighted L^p -spaces”, *Spectral and Evolution Problems*, 14, Proc. 14 Crimean Autumn Math. School-Symp. (September 2003, Sevastopol, Laspi), Simferopol, 2004, 41–43.
- [12] С. С. Пухов, А. М. Седлецкий, “Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале”, *Докл. АН СССР*, **425:4** (2009), 452–455.
- [13] С. С. Пухов, “Базисы из экспонент, синусов и косинусов в весовых пространствах на конечном интервале”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75:2** (2011), 195–224.
- [14] А. М. Седлецкий, “Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями функций типа синуса”, *Матем. заметки*, **89:6** (2011), 894–913.
- [15] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [16] С. С. Пухов, *Базисы из экспонент в весовых пространствах, порожденные нулями функции типа синуса специального вида*, Деп. в ВИНТИ № 724-B2010, М., 2011.

С. С. Пухов

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: spukhov@mail.ru

Поступило

09.07.2013

Исправленный вариант

24.11.2013