Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Илюшечкин, Об одном экстремальном свойстве нормальных матриц, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 67–73

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10354>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:47:57

Об одном экстремальном свойстве нормальных матриц

Н. В. Илюшечкин

Рассматривается объем параллелепипеда, натянутого на функции от квадратной комплексной матрицы, определенные на ее спектре. Находится наилучшая нижняя граница такого объема.

Библиография: 4 названия.

DOI: 10.4213/mzm10354

1. Введение. Обозначим через $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ пространство квадратных комплексных матриц порядка n , которое мы будем рассматривать как унитарное пространство размерности n^2 . Напомним вкратце, что такое функция матрицы, определенная на спектре этой матрицы [1; гл. V]. Пусть матрица $Z \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ имеет ровно p различных собственных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, причем минимальный многочлен $\psi(\lambda)$ матрицы Z равен

$$\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}.$$

Разумеется, если m – степень минимального многочлена, то $m \leq n$.

Пусть также $f(\zeta)$ – комплекснозначная функция комплексного аргумента, определенная и голоморфная в некоторых окрестностях всех точек $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. Тогда эта функция называется определенной на спектре матрицы Z . В частности, определены все производные $f^{(j)}(\lambda_s)$ при $s = 1, \dots, p$ и $j = 0, 1, \dots, m_s - 1$. Эти m чисел называются значениями функции f на спектре матрицы Z . Как известно, существует единственный многочлен $h_f(\zeta)$ степени менее m (интерполяционный многочлен Эрмита), принимающий на спектре Z те же самые значения

$$h_f^{(j)}(\lambda_s) = f^{(j)}(\lambda_s)$$

при тех же самых значениях s и j .

Значением функции f от матрицы Z называется значение соответствующего интерполяционного многочлена

$$f(Z) = h_f(Z).$$

Таким образом, для любой матрицы $Z \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ определенная на ее спектре функция выражается многочленом степени не более $n - 1$.

При этом имеет место весьма содержательный факт. Пусть функция $f(\zeta)$ определена в области, содержащей все точки $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, и представляется там сходящимся степенным рядом

$$f(\zeta) = f_0 + f_1\zeta + f_2\zeta^2 + \cdots.$$

Тогда значение функции f от матрицы Z может быть получено подстановкой Z вместо ζ в этот ряд:

$$f(Z) = f_0 + f_1 Z + f_2 Z^2 + \dots$$

Приведем примеры, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

– вещественная матрица с $a \neq 0$ и $f(\zeta) = \sin \zeta$. Нетрудно видеть, что

$$Z^2 = a^2 E,$$

где E – единичная матрица, так что для любого натурального l

$$Z^{2l} = a^{2l} E, \quad Z^{2l+1} = a^{2l} Z.$$

Рассматриваемая функция целая:

$$\sin \zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + \frac{\zeta^5}{5!} - \dots,$$

так что

$$\sin Z = \left(1 - \frac{a^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \dots \right) Z = \frac{\sin a}{a} Z.$$

Аналогично

$$\cos Z = (\cos a) E.$$

Любую квадратную комплексную матрицу W порядка n , рассматриваемую как вектор пространства $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$, мы будем обозначать символом $\widehat{W}$. Координаты этого вектора (элементы матрицы W) мы будем располагать в порядке

$$11, 12, \dots, 1n, 21, 22, \dots, 2n, \dots, n1, n2, \dots, nn, \quad (1.1)$$

т.е. по строкам. Тем самым мы отличаем матрицы как весьма содержательные алгебраические объекты от перечней их элементов.

Теперь пусть $f_1(\zeta), \dots, f_k(\zeta)$ – функции, определенные на спектре матрицы Z . Значения $f_1(Z), \dots, f_k(Z)$ этих функций являются векторами $\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}$ пространства $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$. Нас будет интересовать объем $V(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)})$ параллелепипеда размерности k , натянутого на эти векторы. При этом, поскольку любое значение $f_\nu(Z)$ может быть найдено как многочлен степени менее n от Z , то при $k > n$ рассматриваемые векторы линейно зависимы и объем натянутого на них параллелепипеда равен нулю. Следовательно, нам достаточно ограничиться рассмотрением значений $k \leq n$.

2. Основные результаты. В случае, если Z – нормальная матрица и $k = n$, упомянутый объем найден в [2; с. 121]. Настоящая работа посвящена оценке объема снизу в общем случае.

ТЕОРЕМА 1. Если $Z \in \text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$ – произвольная матрица, а комплекснозначные функции $f_1(\zeta), \dots, f_k(\zeta)$ определены на ее спектре $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, то имеет место оценка

$$V^2(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}) \geq \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left\| \begin{pmatrix} f_1(\lambda_{i_1}) & \dots & f_k(\lambda_{i_1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_{i_k}) & \dots & f_k(\lambda_{i_k}) \end{pmatrix} \right\|^2. \quad (2.1)$$

Неравенство обращается в равенство, если матрица Z нормальна.

В случае $k = n$ неравенство будет строгим при одновременном выполнении двух условий: его правая часть отлична от нуля и матрица Z не является нормальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычисление объема начнем с одного простого замечания.

Пусть $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$ – векторы унитарного пространства размерности $m \geq l$. Объем параллелепипеда, натянутого на эти векторы, обозначим через $V(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$. Если все $\mathbf{w}_j$ мыслить как векторы-столбцы $\mathbf{w}_j = (w_{1j}, \dots, w_{mj})^T$, то из их координат можно составить матрицу $W = (w_{ij})$, где $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, l$. Обозначим через $\mathfrak{M}_r(W)$ сумму квадратов абсолютных величин всех миноров порядка r матрицы W . Тогда, как известно [1; формула (26), с. 216],

$$V^2(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l) = \mathfrak{M}_l(W). \quad (2.2)$$

Заметим, что объем не изменится, если все векторы $\mathbf{w}_j$ подвергнуть одному и тому же унитарному преобразованию Q , т.е.

$$V(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l) = V(Q\mathbf{w}_1, \dots, Q\mathbf{w}_l). \quad (2.3)$$

Действительно, квадрат объема $V^2(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l)$ совпадает с определителем матрицы Грама, порожденной векторами $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_l$, а скалярные произведения $(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k) = (Q\mathbf{w}_j, Q\mathbf{w}_k)$, которые суть элементы матрицы Грама, не изменяются при унитарном преобразовании всего пространства.

Снова обратимся к вычислению объема $V(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)})$. Из элементов матриц $f_1(Z), \dots, f_k(Z)$ можно образовать новую матрицу $\Phi(Z)$ размера $n^2 \times k$, в столбце которой с номером $\nu = 1, \dots, k$ стоят элементы матрицы $f_\nu(Z)$, взятые в порядке (1.1).

Таким образом, строки $(n^2 \times k)$ -матрицы $\Phi(Z)$ мы будем нумеровать двумя числами j, q , которые соответствуют j -й строке и q -му столбцу матриц $f_\nu(Z)$.

Рассматривая матрицы $f_\nu(Z)$ как векторы пространства $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$, в силу (2.2) будем иметь

$$V^2(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}) = \mathfrak{M}_k(\Phi(Z)). \quad (2.4)$$

Заметим, что преобразование подобия $N = U^{-1}MU$, где переменные M, N взяты из $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$, а U – постоянная унитарная матрица, сохраняет сумму квадратов абсолютных величин всех элементов матрицы. Поэтому его можно рассматривать как линейное преобразование

$$\widehat{N} = U_\wedge \widehat{M}$$

с унитарной матрицей $U_\wedge$ порядка n^2 .

Выберем матрицу U в соответствии с теоремой Шура [1; с. 228], т.е. так, чтобы матрица $L = U^{-1}ZU = (l_{jq})$ стала верхнетреугольной:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

причем все элементы над диагональю могут быть равны нулю, если и только если матрица Z нормальна.

Тогда, разумеется, $f_\nu(L) = U^{-1}f_\nu(Z)U$ и

$$f_\nu(L) = \begin{pmatrix} f_\nu(\lambda_1) & * & \dots & * \\ 0 & f_\nu(\lambda_2) & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_\nu(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Рассматривая матрицы как векторы из $\text{Mat}_{\mathbb{C}}(n)$, для всех $\nu = 1, \dots, k$ имеем равенство

$$\widehat{f_\nu(L)} = U_\wedge \widehat{f_\nu(Z)},$$

и из (2.3) с унитарной матрицей $Q = U_\wedge$ получаем

$$V(\widehat{f_1(Z)}, \dots, \widehat{f_k(Z)}) = V(\widehat{f_1(L)}, \dots, \widehat{f_k(L)}).$$

Вследствие (2.4) для определения искомого объема нам остается найти величину $\mathfrak{M}_k(\Phi(L))$. В матрице $\Phi(L)$ есть подматрица Λ размера $n \times k$ (впоследствии будем называть ее главной подматрицей), образованная строками с номерами $11, 22, \dots, nn$, т.е. состоящая из диагональных элементов матриц $f_\nu(L)$:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} f_1(\lambda_1) & \dots & f_k(\lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(\lambda_n) & \dots & f_k(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Тогда, естественно,

$$\mathfrak{M}_k(\Phi(L)) \geq \mathfrak{M}_k(\Lambda),$$

что и доказывает неравенство (2.1), т.е. первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что если матрица Z нормальна, то все ненулевые элементы матрицы $\Phi(L)$ содержатся в главной подматрице.

Переходим к третьему утверждению. При $k = n$ главная подматрица квадратна и ее можно назвать главным минором. Это главный минор является единственным слагаемым в правой части неравенства (2.1). Сначала докажем, что если матрица L не диагональна, а все матрицы $f_\nu(L)$ диагональны, то главный минор вырожден. Действительно, если матрица L не диагональна, то у нее есть элемент $l_{jq} \neq 0$ при $j \neq q$. Элементы матриц L^i при $i = 0, 1, \dots, n-1$, стоящие на пересечении j -й строки и q -го столбца, обозначим через $l_{jq}^{(i)}$. В частности, $l_{jq}^{(0)} = 0$, $l_{jq}^{(1)} = l_{jq}$.

3. Примеры. В заключение приведем некоторые примеры. Прежде всего, третье утверждение теоремы при $k < n$ неверно. Действительно, пусть $n = 3$, $k = 2$,

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_1(\zeta) = 1, \quad f_2(\zeta) = \zeta^2 - 2\zeta.$$

Тогда матрица Z не нормальна, а обе матрицы $f_1(Z)$ и $f_2(Z)$ диагональны с элементами на диагоналях соответственно $(1, 1, 1)$ и $(-1, 3, -1)$. Поэтому и левая и правая части неравенства (2.1) в данном случае равны $8 \neq 0$.

Далее покажем, что в случае $k = n$ при одновременном отсутствии нормальности матрицы Z и вырождении главного минора в оценке (2.1) может иметь место как случай неравенства, так и случай равенства.

Во-первых, пусть

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

– вещественная матрица и

$$f_1(\zeta) = 1, \quad f_2(\zeta) = \zeta.$$

Тогда собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = a$, т.е. главный минор вырожден. В то же время матрица

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \\ 0 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

имеет ровно два ненулевых максимальных минора, b и $-b$. Поэтому

$$V^2(\widehat{f_1(Z)}, \widehat{f_2(Z)}) = 2b^2,$$

и оценка (2.1) реализуется как неравенство.

Во-вторых, пусть

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix}$$

– также вещественная матрица с $a \neq 0$ и

$$f_1(\zeta) = \sin \zeta, \quad f_2(\zeta) = \cos \zeta.$$

Собственные числа здесь $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -a$, так что главный минор

$$\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\sin a & \cos a \end{vmatrix} = \sin 2a.$$

В то же время, как мы установили во введении,

$$\sin Z = \frac{\sin a}{a} Z, \quad \cos Z = (\cos a)E,$$

и, следовательно,

$$\Phi(Z) = \begin{pmatrix} \sin a & \cos a \\ \frac{b \sin a}{a} & 0 \\ 0 & 0 \\ -\sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

Ненулевые миноры здесь таковы (их три):

$$-\frac{b \sin 2a}{2a}, \quad \sin 2a, \quad \frac{b \sin 2a}{2a}.$$

Поэтому

$$V^2(\widehat{f_1(Z)}, \widehat{f_2(Z)}) = \left(1 + \frac{b^2}{2a^2}\right) \sin^2 2a,$$

т.е. при вырожденном главном миноре $\sin 2a = 0$ оценка (2.1) реализуется как равенство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, М., 1988.
- [2] Н. В. Илюшечкин, “О некоторых тождествах над элементами симметрической матрицы”, *Исследования по линейным операторам и теории функций*. 31, Зап. научн. сем. ПОМИ, **303**, ПОМИ, СПб., 2003, 119–144.
- [3] Н. В. Илюшечкин, “Дискриминант характеристического многочлена нормальной матрицы”, *Матем. заметки*, **51**:3 (1992), 16–23.
- [4] M.-F. Roy, “Subdiscriminants of symmetric matrices are sums of squares”, *Mathematics, Algorithms, Proofs*, Dagstuhl Seminar Proc., **05021**, IBFI, Dagstuhl, 2006.

Н. В. Илюшечкин

ОАО “Концерн “Моринформсистема – Агат”,

г. Москва

E-mail: ilyush55@mail.ru

Поступило

22.07.2013

Исправленный вариант

04.04.2014