Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Костромина, Ортогональность модулей двойственных групп, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 80–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10355>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:32:42

Ортогональность модулей двойственных групп

Ю. В. Костромина

В статье рассматривается двойственность Уордланда для локально свободных групп и двойственность Арнольда для факторно делимых групп. Показывается, что соответствующие модули взаимно двойственных как по Уорфилду, так и по Арнольду групп являются взаимно ортогональными.

Библиография: 5 названий.

DOI: 10.4213/mzm10355

1. Ортогональные модули. Пусть p – простое число, $0 \leq s \in \mathbb{Z}$, $0 < r \in \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Рассмотрим декартову степень $M = (\mathbb{Z}_{p^s})^r$ как модуль над кольцом классов вычетов по модулю p^s . Элементами модуля M являются векторы $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r)$, где $\gamma_i \in \mathbb{Z}_{p^s}$, $i = 1, \dots, r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $M = \mathbb{Z}_{p^s}^r$, N – подмодуль модуля M . Элемент $c = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) \in M$ называется *ортогональным подмодулю* $N \subset M$, если

$$\gamma_1\beta_1 + \gamma_2\beta_2 + \dots + \gamma_r\beta_r = 0$$

для всякого элемента $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \in N$. Множество всех элементов, ортогональных подмодулю N , само является $\mathbb{Z}_{p^s}$ -подмодулем модуля M . Этот подмодуль обозначается $N^\perp$ и называется *ортогональным дополнением модуля* N .

2. Матрицы Мальцева. Пусть G – абелева группа без кручения конечного ранга r . Максимальную линейно независимую систему элементов $x_1, x_2, \dots, x_r$ группы G будем называть *базисом* группы G . Пусть $F = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$ – свободная подгруппа ранга r группы G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. p -Примитивной подгруппой группы без кручения G при данном базисе $x_1, x_2, \dots, x_r$ называется подгруппа $G^{(p)} = \{g \in G \mid p^\alpha g \in F, \alpha \in \mathbb{N}\}$. Зафиксируем натуральное число s . Группа $G_{(p^s)} = \{g \in G \mid p^s g \in F\}$ называется s -м слоем подгруппы $G^{(p)}$.

Рассмотрим целочисленную квадратную матрицу порядка r : $A_s = (a_{ij})$, $i, j = 1, \dots, r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Матрица A_s называется *матрицей слоя* $G_{(p^s)}$, если элементы $(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ir}x_r)/p^s$, $i = 1, \dots, r$, порождают группу $G_{(p^s)}$.

Запишем в компактном виде последовательность матриц $A_1, A_2, \dots, A_s, \dots$ [1].

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{1} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \dots \\ \hat{\mathbb{Z}}_p \\ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_n}} \end{matrix} \quad (2.1)$$

Элементы из первых m строк матрицы A определяют целые p -адические числа. Через $\hat{\mathbb{Z}}_p$ обозначим кольцо целых p -адических чисел. Заметим, что количество p -адических строк – это инвариант группы G , совпадающий с числом $r(G) - r_p(G)$, где $r(G)$ – ранг группы G (мощность максимальной линейно независимой системы факторгруппы $G/t(G)$, рассматриваемой как модуль над кольцом $\mathbb{Z}$), $r_p(G)$ – p -ранг группы G (размерность факторгруппы G/pG , рассматриваемой в качестве векторного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$). Элементы n_{ij} последних n строк принадлежат кольцу классов вычетов по модулю p^{α_i} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Матрицы вида (2.1) мы будем называть p -матрицами Мальцева группы G , матрицу A_s – s -й компонентой матрицы A .

Группы $G^{(p_1)}, G^{(p_2)}, \dots$ – это p_i -примитивные подгруппы группы G , $i = 1, 2, \dots$. p_i -Матрицы этих групп $A^{(p_1)}, A^{(p_2)}, \dots$ определяют набор характеристик: $\chi_1 = (\alpha_1^{(p_1)}, \alpha_1^{(p_2)}, \dots)$, $\chi_2 = (\alpha_2^{(p_1)}, \alpha_2^{(p_2)}, \dots)$, $\dots$, $\chi_r = (\alpha_r^{(p_1)}, \alpha_r^{(p_2)}, \dots)$, где $[\chi_r] = IT(G)$ и $[\chi_1] = OT(G)$, соответственно, внутренний и внешний типы группы G .

Мы рассматриваем матрицы Мальцева для локально свободных групп, введенных Уорфилдом [2]. Для дальнейшего изложения напомним определение локально свободной группы и введем некоторые обозначения.

Пусть G – абелева группа, будем говорить, что p делит G , если $pG = G$. Если G – группа без кручения, то через $R(G)$ обозначим подкольцо поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, порожденное числами 1 и p^{-1} для всех простых p , таких, что $pG = G$. Обозначим через $G_p = G \otimes \mathbb{Q}_p$, где $\mathbb{Q}_p$ – кольцо рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Группа без кручения G называется локально свободной над $R(G)$ тогда и только тогда, когда G_p свободна (как $\mathbb{Q}_p$ -модуль) для всех простых p со свойством $pG \neq G$.

Для локально свободных групп p -матрицы Мальцева устроены особенно просто: их элементами являются классы вычетов по модулю степени простого числа.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{n}_{12} & \dots & \bar{n}_{1r} \\ 0 & \bar{1} & \dots & \bar{n}_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{1} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \mathbb{Z}_{p^{\alpha_1}} \\ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_2}} \\ \dots \\ \mathbb{Z}_{p^{\alpha_r}} \end{matrix}.$$

Также мы рассматриваем матрицы Мальцева для факторно делимых групп, введенных Бьюмонтом и Пирсом [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Группа без кручения G называется *факторно делимой*, если она содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F – делимая периодическая группа.

p -Матрица факторно делимой группы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \hat{a}_{m1} & \hat{a}_{m2} & \dots & \hat{a}_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} \in \hat{\mathbb{Z}}_p, \\ \in \hat{\mathbb{Z}}_p, \\ \dots \\ \in \hat{\mathbb{Z}}_p. \end{matrix}$$

Заметим, что данная p -матрица является квадратной, но так как последние n строк нулевые, мы их опускаем из рассмотрения.

3. Ортогональность модулей двойственных по Уорфилду групп. Мы рассматриваем группу гомоморфизмов $\text{Hom}(G, R)$, где G – группа без кручения конечного ранга с фиксированным базисом $x_1, \dots, x_r$, R – группа без кручения ранга 1. Группа $\text{Hom}(G, R)$ называется *двойственной группе G в смысле Уорфилда* [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть G – локально свободная группа с базисом $x_1, x_2, \dots, x_r$, $F = \langle x_1, x_2, \dots, x_r \rangle$, p – простое число такое, что G не является p -делимой, $0 \leq s \in \mathbb{Z}$, $G_{(p^s)}$ – s -й слой группы G . Тогда подмодуль $N = G_{(p^s)}/F$ модуля $M = (p^{-s}F)/F \cong \mathbb{Z}_{p^s}^r$ будем называть p^s -модулем группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2 [2]. Пусть $\tau = [(m_p)]$ некоторый тип. Группа без кручения конечного ранга G принадлежит классу $\mathfrak{M}_\tau$, если G является p -делимой для всякого простого p с $m_p = \infty$ и $OT(G) \leq \tau$. Заметим, что группы класса $\mathfrak{M}_\tau$ являются локально свободными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $A_s = (b_{ij})$, $i, j = 1, \dots, r$, – p -матрица s -го слоя группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$, $\beta_{ij} \in \mathbb{Z}_{p^s}$ – класс вычетов элемента матрицы b_{ij} по модулю p^s . Тогда p^s -модуль группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$ совпадает с подмодулем модуля $\mathbb{Z}_{p^s}^r$, порожденным строками $(\beta_{11}, \dots, \beta_{1r})$, $\dots$, $(\beta_{r1}, \dots, \beta_{rr})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как элементы $(b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{ir}x_r)/p^s$, $i = 1, \dots, r$, порождают слой $G_{(p^s)}$, то векторы $(\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ir})$, $i = 1, \dots, r$, порождают p^s -модуль $N_{p^s}(G) = G_{(p^s)}/F$, где элементы b_{ij} являются представителями классов вычетов β_{ij} , $i, j = 1, \dots, r$, по модулю p^s .

Следующая теорема показывает, что соответствующие модули взаимно двойственных по Уорфилду групп являются взаимно ортогональными. При доказательстве теоремы учитывается тот факт, что ортогональное дополнение ортогонального дополнения есть исходный модуль [4].

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\tau = [(m_p)]$ – некоторый тип, R – группа ранга 1 типа τ такая, что характеристика единицы равна (m_p) , G – локально свободная группа класса $\mathfrak{M}_\tau$, $x_1, x_2, \dots, x_r$ – базис группы G , для которого $(\alpha_1^{(p)}) \leq (m_p)$. Тогда p^{m_p} -модули двойственной в смысле Уорфилда группы $\text{Hom}(G, R)$ относительно дуального базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ являются ортогональными дополнениями p^{m_p} -модулей группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$ для всех простых чисел p с $m_p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим m_p -й слой $G_{(m_p)}$ подгруппы $G^{(p)}$. Из условия $\alpha_1^{(p)} \leq m_p$ следует, что $G_{(m_p)} = G^{(p)}$.

Рассмотрим p -матрицу слоя $G_{(m_p)}$:

$$A_{m_p} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & \dots & b_{rr} \end{pmatrix}.$$

Строки этой матрицы порождают p^{m_p} -модуль $N_{p^{m_p}}(G) \subset \mathbb{Z}_{p^{m_p}}^r$ группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$.

Рассмотрим систему из r уравнений, составленную из строк p -матрицы слоя $G_{(m_p)}$. В теореме 8 [1] доказано, что множество решений данной системы является p^{m_p} -модулем группы $\text{Hom}(G, R)$ относительно базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$. Следовательно, p^{m_p} -модуль группы $\text{Hom}(G, R)$ относительно базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ ортогонален всем строкам p -матрицы слоя $G_{(m_p)}$. Так как строки p -матрицы слоя $G_{(m_p)}$ порождают модуль $N_{p^{m_p}}(G)$, то эти два модуля взаимно ортогональны.

4. Ортогональность модулей двойственных по Арнольду групп. Далее приведем результаты, показывающие связь двойственности Уорфилда для локально свободных групп [1] и двойственности Арнольда для факторно делимых групп [5], рассматриваемых на языке матриц Мальцева.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{a}_{r1} & \dots & \hat{a}_{rr} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \hat{\mathbb{Z}}_p, \\ \dots \\ \hat{\mathbb{Z}}_p \end{matrix}$$

– p -матрица группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$. Модуль N называется p -адическим модулем группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$ тогда и только тогда, когда N совпадает с подмодулем модуля $(\hat{\mathbb{Z}}_p)^r$, порожденным строками $(\hat{a}_{11}, \dots, \hat{a}_{1r}), \dots, (\hat{a}_{r1}, \dots, \hat{a}_{rr})$.

Следующая теорема показывает, что соответствующие модули взаимно двойственных по Арнольду групп являются взаимно ортогональными.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть G – факторно делимая группа, $x_1, x_2, \dots, x_r$ – базис факторно делимой группы G . Тогда p -адические модули двойственной в смысле Арнольда группы G^* относительно дуального базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ являются ортогональными дополнениями p -адических модулей группы G относительно базиса $x_1, x_2, \dots, x_r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим p -матрицу группы G , построенную на базисе $x_1, x_2, \dots, x_r$:

$$A = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \hat{a}_{r1} & \dots & \hat{a}_{rr} \end{pmatrix} \in \begin{matrix} \hat{\mathbb{Z}}_p, \\ \dots \\ \hat{\mathbb{Z}}_p. \end{matrix}$$

Строки этой матрицы порождают p -адический модуль $N(G)$ группы G при данном базисе.

В теореме 1 [1] доказано, что множество решений системы, составленной из строк p -матрицы группы G , является p -адическим модулем группы G^* относительно базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$.

Следовательно, p -адический модуль группы G^* относительно базиса $x_1^*, x_2^*, \dots, x_r^*$ ортогонален всем строкам p -матрицы группы G . Так как строки p -матрицы группы G порождают модуль $N(G)$, то эти два модуля взаимно ортогональны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. В. Костромина, “Двойственность Уорфилда и матрицы Мальцева”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:8 (2012), 77–94.
- [2] R. B. Warfield, “Homomorphisms and duality for torsion-free groups”, *Math. Z.*, **107** (1968), 189–200.
- [3] R. Beaumont, R. Pierce, “Torsion free rings”, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 61–98.
- [4] В. П. Елизаров, “Системы линейных уравнений над конечными кольцами”, Тр. по дискр. матем., **6**, Физматлит, М., 2002, 31–47.
- [5] Ю. В. Костромина, “Двойственность Арнольда и матрицы Мальцева”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2012, № 2, 23–28.

Ю. В. Костромина

Московский педагогический государственный
университет
E-mail: jykos@mail.ru

Поступило

11.07.2013

Исправленный вариант

14.01.2014