Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Игнатъев, Об использовании аналога функции Ляпунова со знакопеременной производной при исследовании глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 2, 212–216

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10356>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:08:37

Об использовании аналога функции Ляпунова со знакопеременной производной при исследовании глобальной асимптотической устойчивости положения равновесия

А. О. Игнатьев

В статье рассматривается задача о глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения системы автономных дифференциальных уравнений. Предложен метод исследования с помощью вспомогательной определенно-положительной функции, производная которой в силу системы может быть знакопеременной.

Библиография: 16 названий.

DOI: 10.4213/mzm10356

1. Введение. Классический метод функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости предполагает существование определенно-положительной функции Ляпунова, производная которой в силу системы дифференциальных уравнений возмущенного движения определенно-отрицательна. Однако в приложениях часто встречаются системы, для которых возможно построить определенно-положительную функцию, производная которой является не определенно-отрицательной, а лишь неположительной. Именно для таких систем Барбашиным и Красовским [1] получен эффективный критерий асимптотической устойчивости для случая автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В дальнейшем, используя эту идею, аналогичные теоремы были доказаны для периодических и почти периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений [2]–[5], для систем функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием [6]–[12], для стохастических дифференциальных уравнений [13], для дифференциальных включений [14], для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве [15] и для исследования устойчивости относительно части переменных [16]. Во всех перечисленных работах существенным было то, что производная вспомогательной определенно-положительной функции была неположительной. В настоящей заметке не предполагается неположительность производной вспомогательной функции (она может быть знакопеременной).

Пусть система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет вид

$$\dot{x} = X(x), \quad X(0) = 0, \quad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $X = (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$, $\dot{x} = dx/dt$, t – время. Функцию $X: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ будем считать достаточно гладкой. Система (1) допускает тривиальное решение

$$x = 0. \quad (2)$$

Пусть $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – достаточно гладкая функция. Для дальнейшего изложения понадобятся понятия ее производной в силу уравнений (1) и производных высших порядков. Они определяются согласно рекуррентным формулам

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} X_i(x), \quad (3)$$

$$V^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V^{(j-1)}}{\partial x_i} X_i(x), \quad j = 2, 3, \dots, m. \quad (4)$$

Отметим, что все эти производные, вычисленные согласно формулам (3) и (4), обладают свойством

$$V^{(j)}(0) = 0. \quad (5)$$

2. Основные результаты. В дальнейшем будем предполагать, что решения системы (1) определены при любых начальных условиях и при любых $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$.

Функцию $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ будем называть *определенно-положительной*, если $V(0) = 0$ и справедлива оценка $V(x) \geq \omega(\|x\|)$, где $\omega(r)$ – некоторая непрерывная скалярная монотонно возрастающая функция такая, что $\omega(0) = 0$, а $\|x\|$ – евклидова норма x . При этом функцию $-V(x)$ будем называть *определенно-отрицательной*.

ТЕОРЕМА. Если система дифференциальных уравнений (1) такова, что в $\mathbb{R}^n$ существуют определено-положительные функции $V(x)$ и $U(x)$ (причем $V \in C^m$) и неотрицательные числа $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ такие, что

$$\dot{V}(x) + a_1 \ddot{V} + a_2 V^{(3)}(x) + \dots + a_{m-1} V^{(m)}(x) = -U(x),$$

то решение (2) системы (1) глобально асимптотически устойчиво¹; при этом в качестве функции Ляпунова может быть выбрана функция

$$W(x) = V(x) + a_1 \dot{V}(x) + \dots + a_{m-1} V^{(m-1)}(x). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 0$ сводится к классической теореме Ляпунова, поэтому в дальнейшем будем рассматривать случай, когда среди констант $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ имеются ненулевые, причем считаем $a_{m-1} > 0$.

Рассмотрим произвольное решение $x(t) = x(t, x_0)$, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Покажем, что для него справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0. \quad (7)$$

Предположим противное, т.е. будем предполагать, что существует $\eta > 0$ и последовательность моментов времени $\{t_k\} \rightarrow +\infty$ такая, что $\|x(t_k)\| \geq 2\eta$. Это означает,

¹В русскоязычной литературе глобальную асимптотическую устойчивость часто называют *асимптотической устойчивостью в целом*.

что либо существует момент времени τ_1 такой, что $\|x(t)\| \geq \eta$ при $t \geq \tau_1$, либо последовательность моментов времени $\{\tau_k\} \rightarrow +\infty$ такая, что

$$\tau_{2k-1} < t_k < \tau_{2k}, \quad \|x(\tau_{2k-1})\| = \|x(\tau_{2k})\| = \eta, \quad \|x(t)\| \geq \eta \quad \text{при} \quad \tau_{2k-1} \leq t \leq \tau_{2k}.$$

Учитывая гладкость (и, следовательно, ограниченность на любом компакте) правых частей системы (1), заключаем, что существует положительное число ξ такое, что $\tau_{2k} - \tau_{2k-1} \geq \xi > 0$. Следовательно, предположив, что предельное соотношение (7) не выполняется, заключаем, что решение $x(t)$ обладает свойством, которое назовем свойством А.

Свойство А. Для некоторого $\eta > 0$ существует интервал $(\tau_1, +\infty)$ или интервалы (τ_1, τ_2) , (τ_3, τ_4) , $\dots$, (τ_{2k-1}, τ_{2k}) такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} (\tau_{2k} - \tau_{2k-1}) = +\infty$, на которых $\|x(t)\| \geq \eta$.

Рассмотрим $W(x(t))$. Функция $U(x)$ определенно-положительна и

$$\dot{W}(x) = -U(x). \quad (8)$$

Учитывая свойство А, можно сделать вывод, что существует момент времени $T_1 \geq 0$ такой, что

$$W(x(t)) = V(x(t)) + a_1 \dot{V}(x(t)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-1)}(x(t)) < 0$$

при $t \geq T_1$. Отсюда получаем

$$\frac{d}{dt} [a_1 V(x(t)) + a_2 \dot{V}(x(t)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-2)}(x(t))] < -V(x(t)) \quad (9)$$

при $t \geq T_1$. Из неравенства (9) имеем

$$\begin{aligned} & a_1 V(x(t)) + a_2 \dot{V}(x(t)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-2)}(x(t)) \\ & < a_1 V(x(T_1)) + a_2 \dot{V}(x(T_1)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-2)}(x(T_1)) - \int_{T_1}^t V(x(s)) ds \\ & = -v_1(t), \end{aligned} \quad (10)$$

причем в силу определенной положительности функции V и свойства А существует момент времени T_2 , $T_2 > T_1$, такой, что $v_1(t) > 0$ при $t > T_2$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = +\infty$. Из неравенства (10) получаем

$$\frac{d}{dt} [a_2 V(x(t)) + a_3 \dot{V}(x(t)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-3)}(x(t))] < -a_1 V(x(t)) - v_1(t),$$

откуда

$$\begin{aligned} & a_2 V(x(t)) + a_3 \dot{V}(x(t)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-3)}(x(t)) \\ & < a_2 V(x(T_2)) + a_3 \dot{V}(x(T_2)) + \dots + a_{m-1} V^{(m-3)}(x(T_2)) - \int_{T_2}^t [a_1 V(x(s)) + v_1(s)] ds \\ & = -v_2(t), \end{aligned}$$

причем существует момент времени T_3 , $T_3 > T_2$, такой, что $v_2(t) > 0$ при $t > T_3$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = +\infty$. Продолжая аналогичные рассуждения, получаем

$$a_{m-1}V(x(t)) < -v_{m-1}(t) < 0, \quad (11)$$

где $v_{m-1}(t) > 0$ при $t > T_m$ и некотором T_m , и $\lim_{t \rightarrow \infty} v_{m-1}(t) = +\infty$. Неравенство (11) противоречит определенной положительности функции V . Полученное противоречие доказывает справедливость предельного соотношения (7). Так как решение $x(t) = x(t, x_0)$ было выбрано произвольным, предельное соотношение (7) означает, что нулевое решение системы (1) глобально притягивающее. Покажем теперь, что оно также устойчиво по Ляпунову. Для этого достаточно доказать, что функция $W(x)$ является определенно-положительной.

Покажем, что $W(x)$ определенно-положительна. Предположим противное: пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ существует точка x_0 , не совпадающая с началом координат, такая, что $W(x_0) \leq 0$, и рассмотрим решение $x(t) = x(t, x_0)$ с начальным значением $x(0) = x_0$. Учитывая, что $U(x)$ положительно определена, получаем $W(x(T)) < 0$ при любом произвольном $T > 0$. При всех $t > T$ имеем

$$W(x(t)) < W(x(T)) < 0. \quad (12)$$

С другой стороны, функция W является непрерывно-дифференцируемой, причем в силу (5) и (6) имеем $W(0) = 0$, следовательно, в силу свойства (7) получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(x(t)) = W(0) = 0,$$

что противоречит неравенству (12). Полученное противоречие доказывает определенную положительность функции W , что в свою очередь в силу равенства (8) доказывает устойчивость решения (2) уравнений (1). Учитывая, что глобальное притяжение нулевого решения системы (1) было доказано ранее, получаем, что это решение глобально асимптотически устойчиво, что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. В качестве иллюстрации доказанной теоремы рассмотрим систему

$$\dot{x} = -2x + 3y, \quad \dot{y} = -x + y. \quad (13)$$

Выберем функцию $V = (x^2 + y^2)/2$. Ее производная в силу системы (13) равна $\dot{V} = -2x^2 + 2xy + y^2$. Производная знакопеременна, следовательно, мы не можем воспользоваться ни теоремой Ляпунова, ни теоремой Барбашина–Красовского. Найдем вторую и третью производные функции V в силу уравнений (13):

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= 6x^2 - 16xy + 8y^2, \\ V^{(3)} &= -8x^2 + 36xy - 32y^2. \end{aligned}$$

Функция

$$\dot{V} + \frac{1}{2}\ddot{V} + \frac{1}{4}V^{(3)} = -x^2 + 3xy - 3y^2$$

является определенно-отрицательной, следовательно, согласно доказанной теореме нулевое решение системы (13) является асимптотически устойчивым, и в качестве функции Ляпунова может быть выбрана функция

$$W(x, y) = V(x, y) + \frac{1}{2}\dot{V}(x, y) + \frac{1}{4}\ddot{V}(x, y) = x^2 - 3xy + 3y^2,$$

которая является определенно-положительной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Н. Барбашин, Е. А. Красовский, “Об устойчивости движения в целом”, *Докл. АН СССР*, **86**:6 (1952), 453–456.
- [2] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959.
- [3] А. О. Игнат'ев, “Некоторые обобщения теоремы Барбашина–Красовского”, *Матем. физика*, **34** (1983), 19–22.
- [4] А. О. Игнат'ев, “Об устойчивости почти периодических систем относительно части переменных”, *Дифференц. уравнения*, **25**:8 (1989), 1446–1448.
- [5] A. O. Ignatyev, “On the stability of equilibrium for almost periodic systems”, *Nonlinear Anal. Theory Methods Appl.*, **29**:8 (1997), 957–962.
- [6] A. O. Ignatyev, “On the asymptotic stability in functional differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **127**:6 (1999), 1753–1760.
- [7] A. O. Ignatyev, “On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **268**:2 (2002), 615–628.
- [8] А. С. Андреев, “Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения”, *Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением*, Наука, Новосибирск, 1991.
- [9] А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений*, Изд-во УлГУ, Ульяновск, 2005.
- [10] С. В. Павликов, “Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных”, *Уч. зап. Ульяновск. гос. ун-та. Сер. Фундамент. пробл. матем. и мех.*, **1**:13 (2003), 63–74.
- [11] С. В. Павликов, *Метод функционалов Ляпунова в задачах устойчивости*, Институт управления, Набережные Челны, 2006.
- [12] А. С. Андреев, “Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Автомат. и телемех.*, 2009, № 9, 4–55.
- [13] O. A. Ignatyev, V. Madrekar, “Barbashin–Krasovskii theorem for stochastic differential equations”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**:11 (2010), 4123–4128.
- [14] Е. Л. Панасенко, Е. А. Тонков, “Распространение теорем Е. А. Барбашина и Н. Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **15**, 2009, 185–201.
- [15] G.-Q. Xu, S. P. Yung, “Lyapunov stability of abstract nonlinear dynamic system in Banach space”, *IMA J. Math. Control Inform.*, **20**:1 (2003), 105–127.
- [16] О. А. Игнат'ев, “On equiasymptotic stability with respect to part of the variables”, *J. Appl. Math. Mech.*, **63**:5 (1999), 821–824.

А. О. Игнат'ев

Институт прикладной математики и механики НАН

Украины

E-mail: aoignat@mail.ru,

ignat@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило

11.07.2013

Исправленный вариант

18.10.2013