Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Р. Каюмов, К сходимости рядов в пространствах интегрируемых функций, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 6, 836–841

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10358>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 14:01:28

К сходимости рядов в пространствах интегрируемых функций

И. Р. Каюмов

В работе получено достаточное условие сходимости рядов в пространствах L_p на множестве бесконечной меры.

Библиография: 3 названия.

DOI: 10.4213/mzm10358

1. Введение. Пусть X – произвольное пространство с σ -аддитивной мерой μ . Рассмотрим произвольную последовательность измеримых функций $\{f_k\} \subset L_\infty(X)$ и обозначим

$$M_k = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_k(x)|.$$

Исследуем теперь вопрос о сходимости ряда $\sum f_k$ в пространстве $L_p(X)$. Если $\mu(X) < \infty$, то наилучшее достаточное условие сходимости такого ряда в терминах M_k может быть записано в виде

$$\sum M_k < +\infty. \quad (1.1)$$

В случае же $\mu(X) = \infty$, условие (1.1) не гарантирует сходимости ряда $\sum f_k$ в пространстве $L_p(X)$; более того, информации лишь о M_k недостаточно для выяснения вопроса сходимости этого ряда. Это связано с тем, что интеграл по множеству бесконечной меры от сколь угодно малой функции может равняться бесконечности. Вполне естественно ввести такое ограничение:

$$\int_X |f_k| d\mu \leq K \quad (1.2)$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. К сожалению, и в этом случае условие (1.1) недостаточно для сходимости ряда $\sum f_k$ в $L_p(X)$. В самом деле, условие (1.1) в случае $\mu(X) < \infty$ получается простой оценкой

$$\int_X \left(\sum f_k \right)^p d\mu \leq \left(\sum M_k \right)^p \mu(X).$$

Если же $\mu(X) = \infty$, то придется усиливать условие (1.1) для того, чтобы использовать (1.2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 12-01-97013-р_поволжье_а, 14-01-00351).

Протасовым [1] было получено такое достаточное условие сходимости ряда $\sum f_k$ в $L_p(X)$, $p > 1$:

$$\sum M_k^{(p-1)/p} < \infty. \quad (1.3)$$

Его рассуждения касались мнимых частей наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$; по существу, условие сходимости (1.3) следует из двух неравенств:

$$\left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\|_p \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^n K^{1/p} M_k^{(p-1)/p}.$$

Оба этих неравенства неулучшаемы по отдельности. По этой причине условие сходимости (1.3) близко к оптимальному; более того, оно является оптимальным с точки зрения абсолютной сходимости ряда $\sum f_k$ в $L_p(X)$. Тем не менее, оказывается, что это условие сходимости может быть усилено. В нашей работе мы обоснуем (и покажем его оптимальность) такое условие сходимости:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k M_k)^{p-1} < \infty \quad (1.4)$$

в предположении, что функции f_k удовлетворяют (1.2).

Условие типа (1.4) в частном случае, когда $X = \mathbb{R}$ и функции f_k имеют вид

$$f_k(t) = \frac{y_k}{(t - x_k)^2 + y_k^2},$$

было получено в работе автора [2].

То, что ограничение (1.4) является более слабым по сравнению с (1.3), показывает простой пример $M_k = (k \ln k)^{p/(1-p)}$. Заметим, что в силу того, что сходимость положительных функций эквивалентна безусловной сходимости, условие (1.4) желательно применять, предварительно упорядочив M_k в порядке убывания. В этом случае из (1.3) следует (1.4) (см. теорему 2 ниже). Важно также отметить, что наше условие (1.4), в отличие от (1.3), не гарантирует абсолютной сходимости ряда $\sum f_k$ в $L_p(X)$. Здесь проявляется еще одно различие между пространствами с конечной и бесконечной мерами, поскольку в пространстве с конечной мерой наилучшее условие сходимости в терминах M_k автоматически влечет абсолютную сходимость.

2. Доказательство основного результата. Итак, пусть функции f_k интегрируемы и ограничены на пространстве X с мерой μ . Мы ограничимся лишь рассмотрением положительных функций, т.е. будем считать, что $f_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Положим

$$K = \max_{1 \leq k \leq n} \int_X f_k d\mu.$$

Основным нашим результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. *Если $p \in (1, 2]$, то существует константа C_p такая, что для любой последовательности $f_k \in L_p(X)$ и для любого натурального n выполнено неравенство*

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^p d\mu \leq C_p K \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n M_k \right)^{p-1}, \quad (2.1)$$

где

$$M_k = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f_k(x)|.$$

Если $p \in [2, +\infty)$, то найдется C_p такая, что

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^p d\mu \leq C_p K \sum_{k=1}^n (k M_k)^{p-1}. \quad (2.2)$$

Прежде чем доказать теорему 1, докажем лемму.

ЛЕММА 1. Для любого натурального p имеет место неравенство

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^p d\mu \leq p! (p-1)! K \sum_{k=1}^n (k M_k)^{p-1}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Раскроем скобки в (2.3) и проинтегрируем почленно:

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^p d\mu = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_p} \int_X f_{k_1} f_{k_2} \cdots f_{k_p} d\mu$$

(здесь и ниже индексы $k_1, k_2, \dots, k_p$ изменяются от 1 до n). Продолжая это неравенство, имеем

$$\begin{aligned} &\leq p! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p} \int_X f_{k_1} f_{k_2} \cdots f_{k_p} d\mu \\ &\leq p! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p} \int_X M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_{p-1}} f_{k_p} d\mu \\ &= p! \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{p-1}} M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_{p-1}} \sum_{k_p=1}^{k_{p-1}} \int_X f_{k_p} d\mu \\ &\leq p! K \sum_{k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{p-1}} M_{k_1} M_{k_2} \cdots M_{k_{p-1}} k_{p-1}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались (1.2).

Отсюда видно, что для доказательства (2.3) достаточно установить неравенство

$$\sum_{k_1=1}^n M_{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} M_{k_2} \cdots \sum_{k_{p-2}=1}^{k_{p-3}} M_{k_{p-2}} \sum_{k_{p-1}=1}^{k_{p-2}} M_{k_{p-1}} k_{p-1} \leq (p-1)! \sum_{k=1}^n (k M_k)^{p-1}.$$

Неравенство такого типа было доказано в работе [2]. Лемма 1 доказана.

Кроме того, нам понадобятся неравенства Копсона [3; теоремы 344 и 331]: если $0 < q < 1$, то

$$\sum (a_k + a_{k+1} + \cdots)^q \geq q^q \sum (k a_k)^q. \quad (2.4)$$

В случае же $q > 1$ имеет место обратное неравенство

$$\sum (a_k + a_{k+1} + \cdots)^q \leq q^q \sum (k a_k)^q. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Оценим наш интеграл так:

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^p d\mu = \int_X \left(\sum_{k=1}^n f_k \right) \left(\sum_{k=1}^n f_k \right)^{p-1} d\mu \leq 2^{p-1} (I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \int_X \sum_{j=1}^n f_j \left(\sum_{k=1}^j f_k \right)^{p-1} d\mu, \quad I_2 = \int_X \sum_{j=1}^n f_j \left(\sum_{k=j+1}^n f_k \right)^{p-1} d\mu.$$

Здесь мы воспользовались простым неравенством $(a+b)^\alpha \leq 2^\alpha(a^\alpha + b^\alpha)$, которое выполнено для всех неотрицательных a, b и α .

Нетрудно заметить, что

$$I_2 \leq \int_X \sum_{j=1}^n f_j \left(\sum_{k=j+1}^n M_k \right)^{p-1} d\mu \leq K \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j+1}^n M_k \right)^{p-1}. \quad (2.6)$$

Далее будем рассматривать случаи $p \leq 2$ и $p > 2$ отдельно.

Случай $p \in (1, 2]$. Для верхней оценки I_1 воспользуемся неравенством Гёльдера

$$I_1 \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_X f_j^\alpha d\mu \right)^{1/\alpha} \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^j f_k \right)^{(p-1)\beta} d\mu \right)^{1/\beta}$$

с параметрами $\alpha = 1/(2-p)$, $\beta = 1/(p-1)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{j=1}^n \left(\int_X f_j^\alpha d\mu \right)^{2-p} \left(\int_X \sum_{k=1}^j f_k d\mu \right)^{p-1} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\int_X f_j^{\alpha-1} f_j d\mu \right)^{2-p} \left(\int_X \sum_{k=1}^j f_k d\mu \right)^{p-1} \\ &\leq \sum_{j=1}^n (M_j^{\alpha-1} K)^{2-p} (jK)^{p-1} = K \sum_{j=1}^n (jM_j)^{p-1}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Копсона (2.4), получаем

$$I_1 \leq K(p-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=j}^n M_k \right)^{p-1}.$$

Это неравенство вместе с (2.6) дает (2.1), что доказывает теорему 1 в случае $p \leq 2$.

Случай $p \in (2, +\infty)$. Из неравенства Копсона (2.5) следует, что

$$I_2 \leq K(p-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n j^{p-1} M_j^{p-1}. \quad (2.7)$$

Для оценки интеграла I_1 мы снова воспользуемся неравенством Гёльдера

$$I_1 \leq \sum_{j=1}^n \left(\int_X f_j^\alpha d\mu \right)^{1/\alpha} \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^j f_k \right)^{(p-1)\beta} d\mu \right)^{1/\beta}$$

с параметрами $\alpha = m/(m+1-p)$, $\beta = m/(p-1)$, где m – целая часть p . Далее, применяя лемму и неравенства Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \sum_{j=1}^n K^{1/\alpha} M_j^{(\alpha-1)/\alpha} \left(\int_X \left(\sum_{k=1}^j f_k \right)^m d\mu \right)^{(p-1)/m} \\ &\leq K \sum_{j=1}^n M_j^{(p-1)/m} \left(\pi m! (m-1)! \sum_{k=1}^j (k M_k)^{m-1} \right)^{(p-1)/m} \\ &= KC(m, p) \sum_{j=1}^n (j M_j)^{(p-1)/m} \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j (k M_k)^{m-1} \right)^{(p-1)/m} \\ &\leq KC(m, p) \left(\sum_{j=1}^n (j M_j)^{\alpha_1(p-1)/m} \right)^{1/\alpha_1} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j (k M_k)^{m-1} \right)^{\beta_1(p-1)/m} \right)^{1/\beta_1}. \end{aligned}$$

Полагая $\alpha_1 = m$, $\beta_1 = m/(m-1)$, выводим

$$I_1 \leq KC(m, p) \left(\sum_{j=1}^n (j M_j)^{p-1} \right)^{1/m} \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \sum_{k=1}^j (k M_k)^{m-1} \right)^{(p-1)/(m-1)} \right)^{(m-1)/m}.$$

Применяя неравенство Харди

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \right)^s \leq \left(\frac{s}{s-1} \right)^s \sum_{k=1}^{\infty} a_k^s$$

с параметрами $s = (p-1)/(m-1)$ и $a_k = (k M_k)^{m-1}$, заключаем, что

$$\begin{aligned} I_1 &\leq KC(m, p) \left(\sum_{j=1}^n (j M_j)^{p-1} \right)^{1/m} \left(s^s (s-1)^{-s} \sum_{j=1}^n (j M_j)^{p-1} \right)^{(m-1)/m} \\ &= KC_1(m, p) \sum_{j=1}^n (j M_j)^{p-1}. \end{aligned}$$

Эта оценка вместе (2.7) доказывает (2.2). Теорема 1 доказана.

Отметим, что неравенства (2.1) и (2.2) являются неулучшаемыми с точностью до некоторой величины, зависящей только от p . Этот факт мы докажем во второй части теоремы 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > 1$, $\{f_k\} \subset L_{\infty}(X)$. Предположим, что функции f_k удовлетворяют условиям (1.2) и (1.4). Тогда ряд $\sum f_k$ сходится в $L_p(X)$.

Обратно, пусть дана убывающая последовательность положительных чисел M_k такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k M_k)^{p-1} = \infty.$$

Тогда найдется последовательность функций $\{f_k\} \subset L_{\infty}(X)$ такая, что функции f_k удовлетворяют (1.2), $M_k = \sup_{t \in X} |f(t)|$, но ряд $\sum f_k$ расходится в $L_p(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем достаточность условия (1.4). Случай $p \geq 2$ очевиден и сразу следует из неравенства (2.2) и полноты пространства $L_p(X)$. Рассмотрим случай $p \in (1, 2)$. Пусть последовательность M_k удовлетворяет (1.4). Упорядочим последовательность M_k в порядке убывания; при этом, очевидно, полученная последовательность M_{n_k} будет также удовлетворять (1.4). Далее нетрудно показать, что для монотонных M_k имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} M_k \right)^{p-1} \leq A_p \sum_{k=1}^{\infty} (k M_k)^{p-1}$$

с некоторой величиной A_p , зависящей лишь от p . Поэтому из условия (1.4) и неравенства (2.1) вытекает сходимость ряда $\sum |f_{n_k}|$ в $L_p(X)$. А поскольку положительный ряд всегда сходится безусловно, то первая часть теоремы 2 доказана.

Для доказательства второй части теоремы положим

$$f_k = \begin{cases} M_k & \text{на } \Omega_k, \\ 0 & \text{на } X \setminus \Omega_k, \end{cases}$$

где последовательность измеримых множеств $\{\Omega_k\}$ из X удовлетворяет условиям

- а) $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$,
- б) $\mu(\Omega_k) = 1/M_k$.

Имеем

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right)^p d\mu &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right)^{p-1} d\mu \geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} M_k \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j \right)^{p-1} d\mu \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} M_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} f_j \right)^{p-1} d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} M_k \left(\sum_{j=k}^{\infty} M_j \right)^{p-1} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{\infty} M_k \right)^{p-1} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=j}^{2j} M_k \right)^{p-1} \geq \sum_{j=1}^{\infty} (j M_{2j})^{p-1} = \infty. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Ю. Протасов, “Приближения наипростейшими дробями и преобразование Гильберта”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 123–140.
- [2] И. Р. Каюмов, “Сходимость рядов наипростейших дробей в $L_p(\mathbb{R})$ ”, *Матем. сб.*, **202**:10 (2011), 87–98.
- [3] Г. Г. Харди, Дж. Е. Литтлвуд, Г. Поля, *Неравенства*, ИЛ, М., 1948.

И. Р. Каюмов

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: ikayumov@gmail.com

Поступило

13.05.2013

Исправленный вариант

21.11.2013