Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. П. Усольцев, О распределении последовательности дробных долей медленно растущей показательной функции, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 1, 148–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1036>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 04:39:30

УДК 511.2

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ МЕДЛЕННО РАСТУЩЕЙ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Л. П. Усольцев

В работе рассматривается вопрос о степени отклонения распределения последовательности дробных долей медленно растущей показательной функции от “идеального” равномерного распределения. Дается оценка величины, которую уместно назвать мерой иррегулярности распределения данной последовательности.

Библиография: 2 названия.

В работе рассматривается вопрос о степени отклонения распределения последовательности дробных долей медленно растущей показательной функции от “идеального” равномерного распределения. Дается оценка величины, которую уместно назвать *мерой иррегулярности распределения* данной последовательности.

В метрической теории равномерного распределения дробных долей $\{\alpha f(n)\}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $N \rightarrow \infty$, сравнительно хорошо изучен случай $f(n) = q^n$, где $q > 1$ – постоянная. А. Г. Постников привлек внимание автора к проблеме “вырождающегося” случая $q = q(N) \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$ (и, естественно, $\alpha = \alpha(N)$), когда традиционные методы исследования распределения дробных долей неприменимы. Предлагаемая работа является первым шагом в изучении данной проблемы. Поэтому предметно сравнивать полученные в работе результаты пока не с чем.

Пусть $\gamma > 0$ – фиксированное вещественное число, N – натуральная переменная, $q = e^{\gamma/N}$, а $\alpha = \alpha(N)$, $\tau = \tau(N)$ и $l = l(N)$ – вещественные функции от N такие, что $0 < l \leq \tau N \leq \gamma^2 e^{\gamma} \alpha < N$ при всех значениях N и $l \gg \sqrt{\alpha \ln N}$ при $N \rightarrow \infty$.

Для любого подмножества $\Delta \subset [0, 1)$ обозначаем через $Q_{\Delta}(N)$ количество натуральных чисел $n \leq N$, для которых $\{\alpha q^n\} \in \Delta$ и, как обычно, считаем, что

$$\chi_{\Delta}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \{x\} \in \Delta, \\ 0, & \text{если } \{x\} \notin \Delta, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty.$$

Таким образом,

$$Q_{\Delta}(N) = \sum_{n=1}^N \chi_{\Delta}(\alpha q^n).$$

Положим

$$\Delta_{\tau}(\lambda) = \begin{cases} [\lambda, \lambda + \tau), & \text{если } 0 \leq \lambda \leq 1 - \tau, \\ [\lambda, 1) \cup [0, \lambda + \tau - 1), & \text{если } 1 - \tau < \lambda < 1, \end{cases}$$

и докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. При $N \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\text{mes}\{\lambda \in [0, 1) : |Q_{\Delta_\tau(\lambda)}(N) - \tau N| > l\} = O\left(\frac{\alpha \ln N}{l^2}\right) \quad (1)$$

с постоянной в знаке O , зависящей лишь от γ .

Считая τ фиксированным числом из интервала $(0, 1)$ и выбирая $\alpha = N$, получаем следующий (вероятно, наиболее интересный) частный случай теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть γ и τ – фиксированные положительные вещественные числа, $0 < \tau \leq \gamma^2 e^\gamma < 1$; N – натуральная переменная, $\alpha = N$, $q = e^{\gamma/N}$; $\psi(N)$ – вещественная функция от N , $0 < \psi(N) \leq \tau \sqrt{N/\ln N}$ и $\psi(N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$. Тогда при $N \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\text{mes}\{\lambda \in [0, 1) : |Q_{\Delta_\tau(\lambda)}(N) - \tau N| > \sqrt{N \ln N} \cdot \psi(N)\} = O\left(\frac{1}{\psi^2(N)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Выбирая произвольно натуральное число N , положим

$$R(\lambda) = Q_{\Delta_\tau(\{\lambda\})}(N) = \sum_{n=1}^N \chi_{\Delta_\tau(\{\lambda\})}(\alpha q^n), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad (2)$$

$$a_m = \int_0^1 R(\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Так как функция $R(\lambda)$ вещественнозначная, то

$$a_m = \bar{a}_{-m}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Очевидно, при $0 \leq \lambda \leq 1 - \tau$

$$R(\lambda) = \sum_{n=1}^N \chi_{[\lambda, \lambda+\tau)}(\alpha q^n) = \sum_{n=1}^N (\chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda + \tau) - \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda)),$$

а при $1 - \tau < \lambda < 1$

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \sum_{n=1}^N (\chi_{[\lambda, 1)}(\alpha q^n) + \chi_{[0, \lambda+\tau-1)}(\alpha q^n)) \\ &= \sum_{n=1}^N (1 - \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda) + \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda + \nu - 1)). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 R(\lambda) d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^N \left(\int_0^{1-\tau} \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda + \tau) d\lambda - \int_0^{1-\tau} \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda) d\lambda + \int_{1-\tau}^1 d\lambda \right. \\ &\quad \left. - \int_{1-\tau}^1 \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda) d\lambda + \int_{1-\lambda}^1 \chi_{(\{\alpha q^n\}, 1]}(\lambda + \nu - 1) d\lambda \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \left(\int_{\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) d\lambda - \int_0^{1-\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) d\lambda + \tau \right. \\
&\quad \left. - \int_{1-\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) d\lambda + \int_0^{\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) d\lambda \right) \\
&= \tau \sum_{n=1}^N 1 = \tau N,
\end{aligned} \tag{4}$$

а при $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
a_m &= \int_0^1 R(\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \\
&= \sum_{n=1}^N \left(\int_0^{1-\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda + \tau) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda - \int_0^{1-\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \right. \\
&\quad + \int_{1-\tau}^1 e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda - \int_{1-\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \\
&\quad \left. + \int_{1-\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda + \tau - 1) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \right) \\
&= \sum_{n=1}^N \left(e^{2\pi i m \tau} \int_{\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda - \int_0^{1-\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \tau} d\lambda \right. \\
&\quad + \frac{e^{2\pi i m \tau} - 1}{2\pi i m} - \int_{1-\tau}^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \\
&\quad \left. + e^{2\pi i m \tau} \int_0^{\tau} \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \right) \\
&= \sum_{n=1}^N \left(e^{2\pi i m \tau} \int_0^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda + \frac{e^{2\pi i m \tau} - 1}{2\pi i m} \right) \\
&= (e^{2\pi i m \tau} - 1) \sum_{n=1}^N \left(\int_0^1 \chi(\{\alpha q^n\}, 1](\lambda) e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i m} \right) \\
&= (e^{2\pi i m \tau} - 1) \sum_{n=1}^N \left(\int_{\{\alpha q^n\}}^1 e^{-2\pi i m \lambda} d\lambda + \frac{1}{2\pi i m} \right) \\
&= \frac{e^{2\pi i m \tau} - 1}{2\pi i m} \sum_{n=1}^N e^{-2\pi i m \alpha q^n} = \frac{e^{2\pi i m \tau} - 1}{2\pi i m} S_{-m},
\end{aligned} \tag{5}$$

где

$$S_m = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i m \alpha q^n}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Используя последовательно равенства (2) и (4), неравенство Чебышева, равенство Парсеваля и равенства (3) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \text{mes}\{\lambda \in [0, 1) : |Q_{\Delta_\tau(\lambda)}(N) - \tau N| > l\} &= \text{mes}\{\lambda \in [0, 1) : |R(\lambda) - a_0| > l\} \\ &\leq \frac{1}{l^2} \int_0^1 (R(\lambda) - a_0)^2 d\lambda = \frac{1}{l^2} \sum'_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^2 = \frac{2}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{-m}|^2 \\ &\leq \frac{2}{l^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\min\left(\tau, \frac{1}{\pi m}\right) \cdot |S_m| \right)^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где штрих у знака суммы означает, что из области суммирования исключено значение $m = 0$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, нам нужна оценка тригонометрической суммы S_m с произвольным натуральным m .

ЛЕММА. *Существует абсолютная постоянная $B > 0$ такая, что при всех натуральных m справедлива оценка*

$$|S_m| \leq B \min\left(N, \gamma e^\gamma \sqrt{m\alpha} + \frac{N}{\gamma \sqrt{m\alpha}}\right). \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При всех натуральных m положим

$$f_m(y) = m\alpha q^y = m\alpha e^{\gamma y/N}, \quad 0 \leq y \leq N,$$

и запишем сумму S_m в виде

$$S_m = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f_m(n)}.$$

На отрезке $0 \leq y \leq N$

$$f_m''(y) = \frac{m\alpha\gamma^2}{N^2} e^{\gamma y/N} \leq \frac{m\alpha\gamma^2}{N^2} e^\gamma \quad \text{и} \quad f_m''(y) \geq \frac{m\alpha\gamma^2}{N^2}.$$

Но тогда в силу одной из классических лемм Ван дер Корпута (а именно, леммы, предваряющей метод Ван дер Корпута оценки тригонометрических сумм, см., например, [1, с. 107, лемма 1] или [2, с. 27, теорема 5]) существует абсолютная постоянная $B_1 > 0$ такая, что при всех натуральных m справедлива оценка

$$|S_m| \leq B_1 \left(\gamma e^\gamma \sqrt{m\alpha} + \frac{N}{\gamma \sqrt{m\alpha}} \right).$$

Отсюда и из тривиальной оценки $|S_m| \leq N$ вытекает справедливость неравенства (7), например, с $B = B_1 + 1$. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы. Вследствии оценки (7) имеем

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left(\min \left(\tau, \frac{1}{\pi m} \right) \cdot |S_m| \right)^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left(\min \left(\frac{\gamma e^{\gamma} \alpha}{N}, \frac{1}{\pi m} \right) \cdot |S_m| \right)^2 \\
& \leq B^2 \sum_{m \leq N/(\gamma^2 e^{\gamma} \alpha)} \left(\frac{\gamma^2 e^{\gamma} \alpha}{N} \cdot \frac{2N}{\gamma \sqrt{m \alpha}} \right)^2 \\
& \quad + B^2 \sum_{N/(\gamma^2 e^{\gamma} \alpha) < m \leq N^2} \left(\frac{1}{\pi m} \cdot 2\gamma e^{\gamma} \sqrt{m \alpha} \right)^2 + B^2 \sum_{m > N^2} \left(\frac{1}{\pi m} \cdot N \right)^2 \\
& = 4B^2 \gamma^2 e^{2\gamma} \alpha \sum_{m \leq N/(\gamma^2 e^{\gamma} \alpha)} \frac{1}{m} \\
& \quad + \frac{4}{\pi^2} B^2 \gamma^2 e^{2\gamma} \alpha \sum_{N/(\gamma^2 e^{\gamma} \alpha) < m \leq N^2} \frac{1}{m} + \frac{1}{\pi^2} B^2 N^2 \sum_{m > N^2} \frac{1}{m^2} \\
& \leq 4B^2 \gamma^2 e^{2\gamma} \alpha \sum_{m \leq N^2} \frac{1}{m} + \frac{B^2 N^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{N^2 - 1} \\
& < 4B^2 \gamma^2 e^{2\gamma} \alpha (1 + 2 \ln N) + B^2 = O(\alpha \ln N)
\end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. Отсюда и из (6) вытекает справедливость соотношения (1). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
- [2] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.

Самарский государственный аэрокосмический университет

Поступило

15.09.96

Исправленный вариант

23.06.97