Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. М. Губреев, Г. М. Урум, Об одном классе операторов свертки на конечном интервале, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 653–657

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10361>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 13:21:07

Об одном классе операторов свертки на конечном интервале

Г. М. Губреев, Г. Д. Урум

В заметке формулируются признаки полноты корневых подпространств операторов свертки на конечном интервале с ядрами, равными преобразованию Фурье отношения двух целых функций экспоненциального типа из специальных классов. Дается описание одного класса целых функций s , в некотором смысле, правильным распределением корней.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10361

В заметке формулируются признаки полноты корневых подпространств оператора

$$(Kh)(t) = \int_0^{2\pi} k(t-s)h(s) ds, \quad h \in L_2(0, 2\pi), \quad (1)$$

где ядро $k \in L_2(-2\pi, 2\pi)$ и задается формулой

$$k(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} f(u)g^{-1}(u) du, \quad (2)$$

f, g – целые функции экспоненциального типа из специальных классов, определение которых приведено в п. 1. Задача о полноте и безусловной базисности семейств корневых векторов в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ в том случае, когда f, g – полиномы ($\deg f < \deg g$), была поставлена Костюченко и вызвала в свое время значительный интерес [1]–[4].

1. Рассмотрим класс целых функций вида

$$\varphi(z) = \cos \pi z + iz \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} G(t) dt, \quad G \in L_2(-\pi, \pi), \quad (3)$$

и зададимся вопросом: при каких условиях на G множество корней Λ функции φ распределено “примерно” так, как множество корней $\cos \pi z$? Другими словами, будем говорить, что корни функции φ вида (3) распределены правильно, если

- 1) все корни вещественные и простые;
- 2) $\Lambda \cap \mathbb{Z} = \emptyset$;
- 3) на каждом целом интервале $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ лежит только один корень φ .

Условимся множество функций φ вида (3) с правильным распределением корней обозначать через C_s . Далее, обозначим через $\mathcal{G}$ множество 2π -периодических функций $g \in L_2(-\pi, \pi)$, коэффициенты Фурье которых

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int} dt, \quad n \in \mathbb{Z},$$

удовлетворяют условиям:

- 1) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |c_n|^4 < \infty$;
- 2) $c_n \neq i(-1)^{n+1} n^{-1}$ для всех $n \neq 0$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Для того, чтобы целая функция φ принадлежала классу C_s необходимо и достаточно, чтобы G допускало представление

$$G(t) = \overline{g(-t)} - g(t) + \frac{d}{dt} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(u - t - \pi)} g(u) du \quad (4)$$

с некоторой функцией $g \in \mathcal{G}$.

Дополним эту теорему следующими утверждениями, которые понадобятся нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\varphi \in C_s$, $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ – множество ее корней, g – входит в некоторое представление (4) функции G . Тогда

- 1) если $|\varphi(n)| \asymp 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то оператор

$$(Vh)(t) := h(t) + \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \overline{g(t - s - \pi)} h(s) ds$$

непрерывен и непрерывно обратим в пространстве $L_2(0, 2\pi)$, а семейство преобразованных экспонент $\{Ve^{i\lambda_k t}, k \in \mathbb{Z}\}$ является ортогональным базисом этого пространства;

- 2) если $|\varphi(n)| \asymp 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то для любого $\epsilon > 0$ вес $w_\epsilon^2(x) := |\varphi(x - i\epsilon)|^2$, $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяет A_2 -условию:

$$\sup_l \left\{ |l|^{-1} \int_l w_\epsilon^2(x) dx |l|^{-1} \int_l w_\epsilon^{-2}(x) dx \right\} < \infty,$$

где l – произвольный интервал на $\mathbb{R}$, $|l|$ – его длина.

- 3) оператор V представим в виде $I + \text{вполне непрерывный оператор}$, тогда и только тогда, когда $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\varphi(n)| = 1$.

Отметим, что доказательства сформулированных теорем используют операторные соображения. В частности, корни функции $\varphi \in C_s$ совпадают с фредгольмовым спектром некоторого самосопряженного оператора, собственные векторы которого равны $Ve^{i\lambda_k t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Для произвольного A_2 -веса v^2 на $\mathbb{R}$ через $A_{2,\pi}^2(\mathbb{R}, v^2)$ обозначается гильбертово пространство целых функций ψ экспоненциального типа с нормой [5]

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 v(x)^{-2} dx < \infty$$

и таких, что

$$h_\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq 0, \quad h_\psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq 2\pi,$$

где $h_\psi(\alpha)$ – индикатор роста целой функции ψ . Функции этого класса допускают описание с помощью специальных интегральных представлений [5], аналогичное теореме Винера–Пейли в безвесовом случае.

2. Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ оператор K вида (1), (2), предполагая, что выполняются условия:

- а) $g(u) = \varphi(u - i\epsilon)$ при некотором $\epsilon > 0$, где $\varphi \in C_s$, причем $|\varphi(n)| \asymp 1$, $n \in \mathbb{Z}$;
- б) $f(u) = e^{iu\pi}\psi(u)$, где $\psi \in A_{2\pi}^2(\mathbb{R}, w_\epsilon^{-2})$ с A_2 -весом $w_\epsilon^2(x) = |\varphi(x - i\epsilon)|^2$, $x \in \mathbb{R}$.

При таком определении ядра функция k однозначно определяется своими значениями на одном из интервалов $[-2\pi, 0]$, $[0, 2\pi]$. Если ψ пробегает указанное гильбертово пространство целых функций (при фиксированном $\varphi \in C_s$), то сужение k на $[-2\pi, 0]$ пробегает все пространство $L_2(-2\pi, 0)$. Аналогично, множество сужений k на $[0, 2\pi]$ совпадает с $L_2(0, 2\pi)$. Например, в простейшем случае, когда

$$\varphi(z) = (e^{i\pi z} - e^{2\pi\alpha i}e^{-i\pi z})(1 - e^{2\pi\alpha i})^{-1}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

ядро k на отрезке $[0, 2\pi]$ определяется формулой

$$k(t + 2\pi) = e^{-2\pi\epsilon}e^{2\pi\alpha i}k(t)$$

через свои значения на $[-2\pi, 0]$. Более содержательные примеры отложим до развернутой публикации.

Результаты о полноте корневых подпространств операторов k будут формулироваться в терминах последовательности

$$a_n = \psi(\lambda_n + i\epsilon)e^{i\pi\lambda_n}(\varphi'(\lambda_n))^{-1}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

При вычислении a_n бывает полезным следующий факт: существуют константы $m, M > 0$ такие, что $m \leq -\sin \pi \lambda_n \varphi'(\lambda_n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Отметим, что если функция ψ пробегает класс $A_{2\pi}^2(\mathbb{R}, w_\epsilon^{-2})$ при фиксированной $\varphi \in C_s$, то множество соответствующих последовательностей $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ совпадает с пространством l_2 . Доказывается, что оператор K подобен оператору K_1 вида

$$(K_1 h)(t) = \sum_n 2\pi i e^{-2\pi\epsilon} a_n(h, e^{i\lambda_n t}) e^{i\lambda_n t}, \quad h \in L_2(0, 2\pi),$$

где скобки означают скалярное произведение в $L_2(0, 2\pi)$, числа a_n вычисляются по формуле (5), λ_n – корни функции φ . Отсюда вытекают следующие два утверждения. Во-первых, если числа $i\lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, принадлежат некоторому углу $\delta_1 \leq \arg z \leq \delta_2$, $\delta_2 - \delta_1 \leq \pi$, то и значение формы $(K_1 h, h)$ для всех h также лежит в этом угле. Во-вторых, для сингулярных чисел оператора K_1 справедливы двусторонние оценки $s_k \asymp A_k$, $k \geq 1$, где A_k – занумерованная по убыванию последовательность $\{|a_n|\}_{-\infty}^{+\infty}$. Поэтому к оператору K_1 можно применить известные теоремы о полноте корневых подпространств [6]. Ясно, что соответствующие выводы будут справедливы для оператора K в силу их подобия. Например, теорема Гохберга–Крейна [6; гл. 5, § 6] приводит к такому результату.

ТЕОРЕМА 3. Если последовательность $\{a_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ лежит в некотором угле раствора π/p , $p \geq 1$, с вершиной в точке $z = 0$ и $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^p < \infty$, то семейство корневых подпространств оператора K полно в пространстве $L_2(0, 2\pi)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\{a_n\}$ попадает в угол раствора $\pi/2$, то система корневых векторов полна в $L_2(0, 2\pi)$.

Предположим теперь, что условия теоремы 3 не имеют места. Так может быть, например, когда $\{a_n\}$ расположена вблизи некоторой прямой. Пусть $a_n \neq 0$ и

$$a_n^{-1} = e^{i\beta} \mu_n + \epsilon_n, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \mu_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

причем вещественная последовательность $\{\mu_n\}$ имеет единственную предельную точку ∞ . Следующий результат доказывается применением теоремы Мацаева [6; гл. 5, § 10].

ТЕОРЕМА 4. Пусть справедливы равенства (6) и пусть $\delta_n := \epsilon_n \mu_n^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, Δ_k — занумерованная в порядке убывания последовательность $\{|\delta_n|\}_{-\infty}^{+\infty}$. Если

$$\sum_1^{\infty} k^{-1} \Delta_k < \infty,$$

то семейство корневых подпространств оператора K полно в $L_2(0, 2\pi)$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\delta_n|^p < \infty$ при некотором $p \geq 1$, то система корневых векторов полна в $L_2(0, 2\pi)$.

Пусть теперь существует последовательность вещественных чисел $b_n \neq 0$ такая, что существует предел

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} a_n b_n^{-1} = e^{i\beta}, \quad \beta \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Отметим, что это требование слабее условий теоремы 4. Имеет место

ТЕОРЕМА 5. Пусть для оператора K выполняется условие (7). Если выполняется $\lim_{|n| \rightarrow \infty} |\varphi(n)| = 1$, то существует непрерывный и непрерывно обратимый оператор Q в пространстве $L_2(0, 2\pi)$ такой, что имеет место подобие

$$QKQ^{-1} = ie^{i\beta} H(I + S),$$

где H — самосопряженный оператор Гильберта–Шмидта, S — вполне непрерывный оператор.

СЛЕДСТВИЕ. Если выполняются условия теоремы 5, то в случае $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, система корневых векторов оператора K полна в $L_2(0, 2\pi)$.

Сформулированный результат о полноте непосредственно вытекает из теоремы Келдыша [6; гл. 5, § 10] об операторах вида $H(I + S)$.

В заключение отметим, что в формуле (2) отношение целых функций экспоненциального типа из указанных классов f/g равно отношению двух полиномов тогда и только тогда, когда оператор K имеет конечномерную область значений.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Костюченко, А. А. Шкаликов, “О суммируемости разложений по собственным функциям дифференциальных операторов и операторов свертки”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:4 (1978), 24–40.
- [2] Б. В. Пальцев, “Асимптотическое поведение собственных значений интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны”, *Докл. АН СССР*, **194**:4 (1970), 774–777.
- [3] Б. В. Пальцев, “Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. “Слабо” несамосопряженные регулярные ядра”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **36**:3 (1972), 591–634.
- [4] Ю. И. Любарский, “Об операторе свертки на конечном интервале”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **41**:3 (1977), 620–651.
- [5] Г. М. Губреев, “Спектральная теория регулярных квазиэкспонент и регулярных B -представимых вектор-функций (метод проектирования: 20 лет спустя)”, *Алгебра и анализ*, **12**:6 (2000), 1–97.
- [6] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965.

Г. М. Губреев

Полтавский национальный технический
университет им. Ю. Кондратюка
E-mail: gubreev@yandex.ua

Поступило

16.09.2013

Г. Д. Урум

Южно-Украинский педагогический университет
им. К. Д. Ушинского