Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 846–856

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10362>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:24:20

Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций

В. Н. Дубинин

С помощью круговой симметризации множеств и конденсаторов на римановых поверхностях устанавливаются новые неравенства для многолистных функций с ограничениями на их критические значения либо покрытия концентрических окружностей. Доказываются двуточечные теоремы искажения, неравенство для начальных коэффициентов и нижняя оценка модуля для p -листных в круге функций различных классов.

Библиография: 12 названий.

DOI: 10.4213/mzm10362

1. Введение. Хорошо известны приложения метода симметризации в геометрической теории функций (см., например, [1], [2], а также [3]). В работе [4] предложена новая версия круговой симметризации, отличающаяся от классической симметризации Поля тем, что симметризованные множества и конденсаторы расположены на римановой поверхности функции, обратной полиному Чебышева первого рода $T_p(z) = 2^{p-1}z^p + \dots$. В качестве приложений этой симметризации в [4] доказываются теоремы, существенно дополняющие известные результаты Хеймана для p -листных голоморфных функций, не обращающихся в нуль, а также p -листных в круге функций, имеющих нуль порядка p в начале координат. В данной работе с помощью симметризации [4] устанавливаются новые результаты для мероморфных в круге функций, учитывающие листность накрытия. Для удобства читателя в п. 2 статьи приводится упрощенное определение симметризации конденсаторов [4] без использования симметризации функций, а также формулируется основной результат из [4] (лемма 1). В п. 3 доказываются двуточечные теоремы искажения в классах $\mathfrak{M}_p(\tau)$ и $D_p(\lambda)$. Под классом $\mathfrak{M}_p(\tau)$, $p \geq 2$, мы понимаем совокупность всех мероморфных и p -листных в круге $U := \{z : |z| < 1\}$ функций вида

$$w = f(z) = a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \dots, \quad a_p \neq 0,$$

для которых расстояние от точки $w = 0$ до ближайшего ненулевого критического значения равно $\tau > 0$ (критическое значение функции f есть ее значение $f(z)$ в точке z , для которой $f'(z) = 0$). В работе [4] рассматривался подкласс $S_p(\tau)$ функций

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00038), ДВО РАН (грант № 12-II-CO-01M-002) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.A18.21.0353).

из $\mathfrak{M}_p(\tau)$, для которых $a_p = 1$ и суммарная кратность полюсов в круге U не превосходит $p - 1$. Там же был введен класс $D_p(\lambda)$, $0 \leq \lambda < \infty$, $p \geq 2$, голоморфных и p -листных в круге U функций f вида

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots,$$

для которых при любом $\rho \geq \lambda$ множество уровня $\{z \in U : |f(z)| = \rho\}$ не содержит замкнутой кривой. Класс функций $D_p(0)$ состоит из голоморфных p -листных в круге U функций, не имеющих в этом круге нулей (см. [2; часть 5.1]). Заметим, что двуточечные теоремы искажения для однолистных функций достаточно полно представлены в литературе (см., например, [5]–[8]). В то же время для многолистных функций этот вопрос мало изучен [1]–[3]. Наши результаты являются новыми даже без учета точек ветвления либо накрытия концентрических окружностей (см. следствие 1 и замечание 1). В качестве следствия двуточечной теоремы искажения в п. 4 получена оценка функционала, аналогичного известному функционалу Фекете–Сегё для однолистных функций (теорема 3). Наконец, в последней части статьи дается нижняя оценка модуля функции в классе $D_p(\lambda)$. На протяжении всей статьи $T_p^{-1}(\cdot)$ означает непрерывную ветвь функции, обратной полиному Чебышева T_p , заданную на луче $[0, +\infty]$ и переводящую этот луч на луч $[\cos(\pi/(2p)), +\infty]$.

2. Круговая симметризация. Всюду ниже под римановой поверхностью понимается компактная риманова поверхность с краем (возможно, вырожденным). Мы представляем такую поверхность “склеенной” из плоских областей с естественным определением проекций, локальных параметров и окрестностей для точек на такой поверхности (см. [9]). Нам понадобится описание римановой поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ функции, обратной полиному Чебышева $T_p(z)$. Напомним, что в терминах конформных отображений полином $T_p(z)$ можно определить как суперпозицию обратной функции Жуковского, степенной функции и функции Жуковского:

$$T_p(z) = \frac{1}{2}((z + \sqrt{z^2 - 1})^p + (z - \sqrt{z^2 - 1})^p), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Гиперболы с фокусами в точках $z = \pm 1$, проходящие через критические точки полинома Чебышева $z = \cos(k\pi/p)$, $k = 1, \dots, p - 1$, разбивают z -плоскость на p попарно непересекающихся областей. Обозначим эти области, пронумерованные справа налево, через $B_1, \dots, B_p$. Полином T_p отображает область B_1 конформно и однолистно на область D_1 – w -плоскость с разрезом по лучу $L^- := [-\infty, -1]$. Области $B_2, \dots, B_{p-1}$ отображаются этим полиномом на области $D_2, \dots, D_{p-1}$ – w -плоскости с разрезом вдоль лучей L^- и $L^+ := [1, +\infty]$. Наконец, область B_p отображается на область D_p – w -плоскость с разрезом по лучу L^- в случае четного p и по лучу L^+ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathcal{R}(T_p)$ можно получить склеиванием областей D_k , $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеивается “крест на крест” с областью D_2 по берегам разрезов вдоль луча L^- . Область D_2 склеивается с областью D_3 по берегам разрезов вдоль луча L^+ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль луча L^- в случае четного p и луча L^+ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k , рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathcal{R}(T_p)$, будем обозначать буквами $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, p$, соответственно. Обозначим через $\mathcal{L}^+$ луч, лежащий на листе $\mathcal{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$, а через $\mathcal{L}^-$ – луч, лежащий на листе $\mathcal{D}_p$ над лучом $[0, (-1)^p \infty]$ вещественной оси.

Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более чем p раз, и пусть $\mathcal{E}$ – замкнутое подмножество на $\overline{\mathcal{R}}$. Результатом (круговой) симметризации множества $\mathcal{E}$ относительно луча $\mathcal{L}^+$ назовем замкнутое множество $\mathcal{E}^+$, лежащее на поверхности $\mathcal{R}(T_p)$ и удовлетворяющее следующим условиям. Если при данном ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, над “окружностью” $\gamma(\rho) := \{w : |w| = \rho\}$ нет точек множества $\mathcal{E}$, то над ней нет также и точек множества $\mathcal{E}^+$. В противном случае часть множества $\mathcal{E}^+$, лежащая над $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho < \infty$, представляет собой замкнутую дугу на $\mathcal{R}(T_p)$ (возможно, вырожденную), симметричную относительно луча $\mathcal{L}^+$ (с центром на $\mathcal{L}^+$) и линейной меры, равной мере множества $\{W \in \mathcal{E} : |\operatorname{pr} W| = \rho\}$. Часть множества $\mathcal{E}^+$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, есть объединение l окружностей на листах $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, l$, и в случае $l < p$ – замкнутой дуги (при $l = 0$ допускается вырожденная дуга – точка) на листе $\mathcal{D}_{l+1}$ с центром над отрезком $[0, (-1)^{l+2}]$ и длины равной $\lambda(\rho, \mathcal{E}) - 2\pi\rho l$. Здесь l – целая часть числа $(1/(2\pi\rho))\lambda(\rho, \mathcal{E})$ и

$$\lambda(\rho, \mathcal{E}) = \operatorname{mes}\{W \in \mathcal{E} : |\operatorname{pr} W| = \rho\}.$$

Результат симметризации $\mathcal{B}^+ \subset \mathcal{R}(T_p)$ открытого множества $\mathcal{B} \subset \mathcal{R}$ относительно луча $\mathcal{L}^+$ есть открытое множество, определенное следующим образом. Если при данном ρ , $0 \leq \rho \leq \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathcal{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathcal{B}^+$. Если множество $\mathcal{B}$ p -кратно покрывает $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho \leq \infty$, то множество $\mathcal{B}^+$ также p -кратно покрывает $\gamma(\rho)$. Если множество $\mathcal{B}$ l -кратно покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho < 1$, $l \leq p$, то часть множества $\mathcal{B}^+$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, l$. В остальных случаях при $1 \leq \rho < \infty$ часть множества $\mathcal{B}^+$, лежащая над $\gamma(\rho)$, представляет собой открытую дугу на $\mathcal{R}(T_p)$, симметричную относительно луча $\mathcal{L}^+$ и линейной меры $\lambda(\rho, \mathcal{B})$. Если $0 < \rho < 1$ и $2\pi\rho l \neq \lambda(\rho, \mathcal{B})$, то часть множества $\mathcal{B}^+$, лежащая над $\gamma(\rho)$, есть объединение l окружностей на листах $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, l$, и открытой дуги на листе $\mathcal{D}_{l+1}$ с центром над отрезком $[0, (-1)^{l+2}]$ длины $\lambda(\rho, \mathcal{B}) - 2\pi\rho l$. В случае, когда $0 < \rho < 1$, $2\pi\rho l = \lambda(\rho, \mathcal{B})$ и множество $\mathcal{B}$ не покрывает l -кратно $\gamma(\rho)$, часть множества $\mathcal{B}^+$ над $\gamma(\rho)$ есть объединение $l - 1$ окружностей на листах $\mathcal{D}_k$, $k = 1, \dots, l - 1$, и окружности на листе $\mathcal{D}_l$, из которой удалена точка с проекцией $(-1)^{l+2}\rho$. Далее, результат симметризации $\mathcal{E}^-$ замкнутого множества $\mathcal{E} \subset \overline{\mathcal{R}}$ относительно луча $\mathcal{L}^-$ имеет точки над окружностью $\gamma(\rho)$, $0 \leq \rho \leq \infty$, тогда и только тогда, когда такие точки есть у множества $\mathcal{E}$. Часть множества $\mathcal{E}^-$, лежащая над $\gamma(\rho)$, $1 \leq \rho < \infty$, есть замкнутая дуга на $\mathcal{R}(T_p)$, симметричная относительно луча $\mathcal{L}^-$ и линейной меры равной $\lambda(\rho, \mathcal{E})$, а часть $\mathcal{E}^-$ над $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, есть объединение l окружностей на листах $\mathcal{D}_{p-k+1}$, $k = 1, \dots, l$, и в случае $l < p$ – замкнутой дуги на листе $\mathcal{D}_{p-l}$ с центром над отрезком $[0, (-1)^{p-l}]$ и длины $\lambda(\rho, \mathcal{E}) - 2\pi\rho l$. Аналогично определяется симметризация открытого множества $\mathcal{B}$ относительно луча $\mathcal{L}^-$. Из теоремы 1 работы [4] вытекает следующий результат.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{R}$ – риманова поверхность над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$, покрывающая каждую точку w не более чем p раз, и пусть $(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ – конденсатор на $\overline{\mathcal{R}}$, имеющий потенциальную функцию. Предположим, что пластина конденсатора $\mathcal{E}_0$ содержит границу $\partial\mathcal{R}$ и ни для какого ρ , $1 < \rho < \infty$, множество $\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_0$ не содержит замкнутую жорданову кривую, лежащую над окружностью $\gamma(\rho)$ и не покрывающую эту окружность p -кратно. Тогда для конформной емкости конденсаторов

справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1) &\geq \operatorname{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_0)^+, \mathcal{E}_1^+), \\ \operatorname{cap}(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1) &\geq \operatorname{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_0)^-, \mathcal{E}_1^-).\end{aligned}$$

Определения и свойства емкостей конденсаторов на компактных римановых поверхностях с краем аналогичны плоскому случаю [3], [4].

3. Двухточечные теоремы искажения. Следующее утверждение можно рассматривать как первый шаг в получении двухточечных теорем искажения для многолистных функций с учетом листности накрытия и точек ветвления.

ТЕОРЕМА 1. *Если функция f принадлежит классу $\mathfrak{M}_p(\tau)$, то для любых двух точек z_1 и z_2 круга U справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}(1 - |z_1|^2)|f'(z_1)|(1 - |z_2|^2)|f'(z_2)| \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 \\ \leq \tau^2 T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_1)} \right| \right) \right) T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_2)} \right| \right) \right) \left[\frac{T_p^{-1}(|\tau/f(z_1)|) + T_p^{-1}(|\tau/f(z_2)|)}{|\tau/f(z_1)||\tau/f(z_2)|} \right]^2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Равенство в (3.1) достигается, например, для функций f вида

$$f(z) = \frac{\tau}{T_p((1 - z^2)/(az) - \cos(\pi/(2p)))} = \tau 2^{1-p} a^p z^p + \dots, \quad z \in U,$$

$0 < a < \infty$, и для любых точек z_1, z_2 , удовлетворяющих условиям

$$z_1 = -z_2 = x, \quad 0 < x \leq \sqrt{a^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2p}\right) + 1 - a \cos\left(\frac{\pi}{2p}\right)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольные различные точки z_1 и z_2 круга U . Можно считать, что функция f класса $\mathfrak{M}_p(\tau)$ аналитически продолжена в $\bar{U}$ и выполняются условия

$$|f(z_1)| \neq \tau, \quad |f(z_2)| \neq \tau, \quad f'(z_1)f'(z_2) \neq 0.$$

При достаточно малом $r > 0$ рассмотрим “обобщенный” конденсатор

$$C(r) := (U, \{\partial U, \{z : |z - z_1| \leq r\}, \{z : |z - z_2| \leq r\}\}, \{0, 1, -1\}).$$

Емкость этого конденсатора удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\begin{aligned}\operatorname{cap} C(r) = -\frac{4\pi}{\log r} - 2\pi[\log(r(U, z_1)r(U, z_2)) - 2g_U(z_1, z_2)] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0,\end{aligned}$$

где $r(U, z_k) = 1 - |z_k|^2$ – внутренний радиус круга U относительно точки z_k , $k = 1, 2$, а $g_U(z_1, z_2) = \log|(1 - \bar{z}_1 z_2)/(z_1 - z_2)|$ – функция Грина круга U (см. [3; § 1.3 и § 2.2]).

Пусть u – потенциальная функция конденсатора $C(r)$. Наряду с конденсатором $C(r)$ введем следующие конденсаторы:

$$\begin{aligned} C_1(r) &= (\{z : u(z) \leq 0\}, \{z : |z - z_1| \leq r\}), \\ C_2(r) &= (\{z : u(z) \geq 0\}, \{z : |z - z_2| \leq r\}). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\text{cap } C_1(r) + \text{cap } C_2(r) = \text{cap } C(r).$$

Обозначим через $(\mathcal{E}_{0k}(r), \mathcal{E}_{1k}(r))$ образ конденсатора $C_k(r)$ при отображении τ/f , рассматриваемый на римановой поверхности обратной функции $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\tau/f)$, $k = 1, 2$. Учитывая конформную инвариантность емкости и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \text{cap } C_1(r) &= \text{cap}(\mathcal{E}_{01}(r), \mathcal{E}_{11}(r)) \geq \text{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{01}(r))^+, \mathcal{E}_{11}^+(r)), \\ \text{cap } C_2(r) &= \text{cap}(\mathcal{E}_{02}(r), \mathcal{E}_{12}(r)) \geq \text{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{02}(r))^- , \mathcal{E}_{12}^-(r)). \end{aligned}$$

Заметим, что множества $(\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{01}(r))^+$ и $(\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{02}(r))^-$ не пересекаются. Пусть $\mathcal{T}_p^{-1}$ – аналитическая функция, обратная полиному T_p и рассматриваемая как однозначная функция на своей римановой поверхности $\mathcal{R}(T_p)$. Вновь конформная инвариантность емкости дает

$$\begin{aligned} &\text{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{01}(r))^+, \mathcal{E}_{11}^+(r)) + \text{cap}(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{02}(r))^- , \mathcal{E}_{12}^-(r)) \\ &= \text{cap}((\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{01}(r))^+), \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{11}^+(r))) \\ &\quad + \text{cap}((\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{R} \setminus \mathcal{E}_{02}(r))^-), \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{12}^-(r))) \\ &\geq \text{cap}(\overline{\mathbb{C}}_z, \{\mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{11}^+(r)), \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{12}^-(r))\}, \{1, -1\}). \end{aligned}$$

В последнем случае имеем дело с обобщенным конденсатором. Из определения симметризации и геометрического смысла модуля производной следует, что множество $\mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{11}^+(r))$ содержит круг вида

$$\left\{ z : \left| z - T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_1)} \right| \right) \right| = \mu_1 r_1(r) \right\},$$

а множество $\mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{12}^-(r))$ содержит круг вида

$$\left\{ z : \left| z + T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_2)} \right| \right) \right| = \mu_2 r_2(r) \right\}.$$

Здесь

$$\mu_k = \frac{\tau |f'(z_k)|}{|f^2(z_k) T_p'(T_p^{-1}(|\tau/f(z_k)|))|}, \quad r_k(r) \sim r \quad \text{при } r \rightarrow 0, \quad k = 1, 2.$$

Учитывая монотонность емкости и асимптотическую формулу (2.15) из [3], заключаем, что

$$\begin{aligned} &\text{cap}(\overline{\mathbb{C}}_z, \{\mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{11}^+(r)), \mathcal{T}_p^{-1}(\mathcal{E}_{12}^-(r))\}, \{1, -1\}) \\ &\geq -\frac{4\pi}{\log r} + 2\pi \left[\log(\mu_1 \mu_2) - 2 \log \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_1)} \right| \right) + T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_2)} \right| \right) \right) \right] \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ &\quad + o \left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Суммируя выписанные соотношения для емкостей конденсаторов, получаем неравенство (3.1). Случай равенства проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функция f принадлежит классу $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$. Тогда для любых двух точек z_1 и z_2 из круга U справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & (1 - |z_1|^2)|f'(z_1)|(1 - |z_2|^2)|f'(z_2)| \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 \\ & \leq \lambda^2 T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z_1)}{\lambda} \right| \right) \right) T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z_2)}{\lambda} \right| \right) \right) \left[T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z_1)}{\lambda} \right| \right) + T_p^{-1} \left(\left| \frac{f(z_2)}{\lambda} \right| \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Равенство в (3.2) достигается, например, для функций вида

$$f(z) = \lambda T_p \left(\frac{az}{1 - z^2} \right), \quad z \in U,$$

при всех положительных a , для которых $|T_p(ai/2)| \geq 1$, и для любых точек z_1, z_2 , удовлетворяющих условиям

$$z_1 = -z_2 = x, \quad 1 > x \geq -\frac{a}{\cos(\pi/(2p))} + \sqrt{\frac{a^2}{4 \cos^2(\pi/(2p)) + 1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторим слово в слово доказательство предыдущей теоремы с заменой функции τ/f на функцию f/λ . В этом случае коэффициенты μ_k будут иметь вид

$$\mu_k = \frac{|f'(z_k)|}{\lambda T_p'(T_p^{-1}(|f(z_k)/\lambda|))}, \quad k = 1, 2.$$

Суммирование полученных неравенств для емкостей конденсаторов приводит к неравенству (3.2). Случай равенства проверяется простым вычислением. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Предположим, что голоморфная и p -лиственная в круге U функция f не обращается в нуль в этом круге. Тогда для любых точек z_1 и z_2 из круга U выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & (1 - |z_1|^2)|f'(z_1)|(1 - |z_2|^2)|f'(z_2)| \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2} \right|^2 \\ & \leq p^2 |f(z_1)f(z_2)| \left[\left| \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right|^{1/(2p)} + \left| \frac{f(z_2)}{f(z_1)} \right|^{1/(2p)} \right]^2. \end{aligned}$$

Знак равенства имеет место, например, в случае функции

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{2p}, \quad z \in U,$$

для любых точек z_1, z_2 , удовлетворяющих условию

$$\left[\frac{1+z_k}{1-z_k} \right]^2 = (-1)^k i t, \quad t > 0, \quad k = 1, 2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f из следствия 1 принадлежит классу $D_p(\lambda)$ при любом $\lambda > 0$. Поэтому для нее справедливо неравенство (3.2) при всех таких λ . Остается перейти к пределу в (3.2) при $\lambda \rightarrow 0$. Случай равенства проверяется непосредственно. Следствие доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Неравенство следствия 1 имеет место также для любых функций $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \dots$, голоморфных и p -листных в круге U . Действительно, доказательство теоремы 1 остается в силе, если его применить к таким функциям f , при этом заменить τ на произвольное положительное число t (см. начало § 2 работы [4]). Таким образом, для этих функций справедливо неравенство (3.1), где $\tau = t$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $t \rightarrow \infty$, получим требуемую оценку (подобно тому как следствие 1 получилось из неравенства (3.2) при $\lambda \rightarrow 0$).

4. Неравенство для коэффициентов. В работе [4] приводится точная оценка второго коэффициента в классе $S_p(\tau)$, являющаяся аналогом известной оценки Бибербаха в классе однолистных функций. Рассмотрим сейчас оценку комбинации второго и третьего коэффициентов для функций класса $\mathfrak{M}_p(\tau) \supset S_p(\tau)$, которая аналогична оценке функционала Фекете–Сегё в случае однолистных функций.

ТЕОРЕМА 3. Если функция

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \dots$$

принадлежит классу $\mathfrak{M}_p(\tau)$, то

$$\left| a_{p+2} - \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 \right| \leq p \left(1 + \frac{1}{(2\tau)^{2/p}} \right). \quad (4.1)$$

Равенство в (4.1) достигается, например, для функции

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\tau}{T_p((1-z^2)(2\tau)^{1/p}/(2z) - \cos(\pi/(2p)))} \\ &= z^p + \frac{2p \cos(\pi/(2p))}{(2\tau)^{1/p}} z^{p+1} \\ &\quad + \left[p \left(1 + \frac{1}{(2\tau)^{2/p}} \right) + \frac{2p(p+1) \cos^2(\pi/(2p))}{(2\tau)^{2/p}} \right] z^{p+2} + \dots \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим асимптотические разложения функций, входящих в неравенство (3.1), при $(f(z))^{1/p} = \pm te^{i\varphi}$, где φ – произвольное фиксированное вещественное, а t – достаточно малое положительное число. Здесь $(f(z))^{1/p}$ означает ту ветвь корня, разложение которой в некоторой окрестности точки $z = 0$ имеет вид

$$w = z + \frac{1}{p} a_{p+1} z^2 + \left[\frac{1}{p} a_{p+2} + \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p} - 1 \right) a_{p+1}^2 \right] z^3 + \dots$$

Простые вычисления показывают, что

$$z = z(w) = w - \frac{1}{p} a_{p+1} w^2 + \left(-\frac{1}{p} a_{p+2} + \frac{p+1}{2p^2} a_{p+1}^2 \right) w^3 + \dots$$

Положим в неравенстве (3.1) $z_1 = z(te^{i\varphi})$ и $z_2 = z(-te^{i\varphi})$. Тогда левая часть (3.1), деленная на $|f(z_1)f(z_2)|$, примет вид

$$4p^2 \left\{ 1 - 4t^2 + e^{2i\varphi} \left[\frac{4}{p} a_{p+2} - 2 \frac{p+1}{p^2} a_{p+1}^2 \right] t^2 + o(t^2) \right\}, \quad t \rightarrow 0. \quad (4.2)$$

Для вычисления правой части (3.1) заметим, что при положительных значениях корня

$$\begin{aligned} T_p^{-1}(u) &= 2^{(1-p)/p} u^{1/p} + 2^{(-p-1)/p} u^{-1/p} + o(u^{-1/p}), \quad u > 0, \quad u \rightarrow +\infty, \\ T_p'(v) &= p2^{p-1} v^{p-1} - p(p-2)2^{p-3} v^{p-3} + \dots, \quad v \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T_p' \left(T_p^{-1} \left(\left| \frac{\tau}{f(z_k)} \right| \right) \right) \\ = T_p' \left(T_p^{-1} \left(\frac{\tau}{t^p} \right) \right) = p(2\tau)^{1-1/p} t^{1-p} [1 + (2\tau)^{-2/p} t^2 + o(t^2)], \quad t \rightarrow 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Поэтому правая часть (3.1), деленная на $|f(z_1)f(z_2)|$, имеет вид

$$4p^2 \{1 + 4(2\tau)^{-2/p} t^2 + o(t^2)\}, \quad t \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Сравнивая (4.2) и (4.3) по теореме 1, приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} e^{2i\varphi} \left[a_{p+2} - \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 \right] \leq p(1 + (2\tau)^{-2/p}),$$

которое ввиду произвольности φ дает неравенство (4.1). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

В случае однолистных функций f полагаем в (4.1) (формально) $p = 1$ и $\tau = \infty$, что дает

$$|a_3 - a_2^2| \leq 1.$$

Последнее неравенство было установлено впервые Краусом [10]. Оценка более общего функционала $|a_3 - \alpha a_2^2|$ в классе S получена Фекете и Сегё [11] (см. об этом [12; гл. IV, § 9]). Следуя замечанию 1, приходим, как и выше, к оценке

$$\left| a_{p+2} - \frac{p+1}{2p} a_{p+1}^2 \right| \leq p,$$

справедливой для коэффициентов любых функций вида

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + \dots,$$

голоморфных и p -листных в круге U (ср. [1; следствие 8.15]).

5. Нижняя оценка модуля функции. Повторяя доказательство теоремы 8 статьи [4] (в случае $|a_0| > |f(z_0)|$), можно получить нижнюю оценку модуля функции в классе $D_p(\lambda)$, аналогичную верхней оценке (16) в [4]. В дополнение к этим оценкам рассмотрим нижнюю оценку модуля $|f|$ в классе $D_p(\lambda)$, зависящую от $|f'(0)|$. Заметим, что нетривиальная нижняя оценка модуля функции невозможна без информации о нулях этой функции. Например, функции известного класса S [12] имеют единственный нуль в начале координат и мы получаем нетривиальную нижнюю оценку модуля функции для всех $z \neq 0$ из круга U . Для многolistных функций класса $D_p(\lambda)$ расположение нулей неизвестно, и мы нуждаемся в ограничении на аргумент функции, гарантирующем отсутствие нулей в некоторой части круга U .

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $f(z) = a_0 + \dots$ принадлежит классу $D_p(\lambda)$, $\lambda > 0$, $f'(0) \neq 0$. Тогда для любых точек z из круга U , удовлетворяющих неравенству

$$\frac{|zf'(0)|}{(1+|z|)^2} \geq \lambda T_p' \left(T_p^{-1} \left(\frac{|a_0|}{\lambda} \right) \right) \left[\cos \frac{\pi}{2p} + T_p^{-1} \left(\frac{|a_0|}{\lambda} \right) \right], \quad (5.1)$$

имеет место оценка

$$|f(z)| \geq \lambda T_p \left[\frac{|zf'(0)|}{(1+|z|)^2 \lambda T_p' (T_p^{-1}(|a_0|/\lambda))} - T_p^{-1} \left(\frac{|a_0|}{\lambda} \right) \right]. \quad (5.2)$$

Равенство в (5.2) достигается в случае, когда

$$f(z) = (-1)^p \lambda e^{i\theta} T_p \left[\frac{4z(1+T_p^{-1}(|a_0|/\lambda))}{(1+z)^2} - T_p^{-1} \left(\frac{|a_0|}{\lambda} \right) \right] = a_0 + \dots \quad (5.3)$$

при любом z , $0 < z < 1$. Здесь $\theta = \arg a_0$, если $a_0 \neq 0$, и $\theta = 0$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что функция f голоморфна в $\bar{U}$. Фиксируем произвольную точку z_0 из круга U , удовлетворяющую неравенству (5.1), и рассмотрим конденсатор

$$C(s) = ([z_0, z_0/|z_0|] \cup \{z : |z| = 1\}, \{z : |z| \leq s\}),$$

где $s > 0$ достаточно мало. Образ этого конденсатора $(\mathcal{E}_0(s), \mathcal{E}_1(s))$ при отображении f/λ , рассматриваемый на римановой поверхности обратной функции $\mathcal{R}(f/\lambda)$, удовлетворяет условиям леммы 1. Поэтому

$$\text{cap}(\mathcal{E}_0(s), \mathcal{E}_1(s)) \geq \text{cap} \left(\mathcal{R}(T_p) \setminus \left(\mathcal{R} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \setminus \mathcal{E}_0(s) \right)^+, \mathcal{E}_1^+(s) \right).$$

Обозначим через $\tilde{C}(s)$ образ симметризованного конденсатора при отображении $\mathcal{T}_p^{-1}$. Из определения класса $D_p(\lambda)$ следует, что первая пластина симметризованного конденсатора $(\mathcal{R}(T_p) \setminus (\mathcal{R}(f/\lambda) \setminus \mathcal{E}_0(s))^+)$ содержит луч над вещественной осью на листе $\mathcal{D}_p$, соединяющий точку над $(-1)^p |f(z_0)/\lambda|$ с бесконечностью (см. [4; пример 1]). Поэтому первая пластина конденсатора $\tilde{C}(s)$ содержит луч на вещественной оси от $-\infty$ до $-T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|)$. Следовательно, емкость этого конденсатора не меньше емкости конденсатора $C_0(s)$, получающегося из $\tilde{C}(s)$ заменой первой пластины на указанный луч. Вторая пластина конденсатора $\tilde{C}(s)$ ($C_0(s)$) есть “почти круг”

с центром в точке $T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|)$ радиуса $s|f'(0)|/[\lambda T_p'(T_p^{-1}(|a_0/\lambda|))]$. Учитывая конформную инвариантность емкости, получаем

$$\operatorname{cap} C(s) \geq \operatorname{cap} C_0(s).$$

Последнее неравенство приводит при $s \rightarrow 0$ к соотношению

$$T_p^{-1}(|f(z_0)/\lambda|) \geq \frac{|z_0 f'(0)|}{(1 + |z_0|)^2 \lambda T_p'(T_p^{-1}(|a_0/\lambda|))} - T_p^{-1}\left(\left|\frac{a_0}{\lambda}\right|\right) \quad (5.4)$$

(см., например, асимптотическую формулу для емкости (2.10) в [3]). Ввиду (5.1) правая часть (5.4) не меньше $\cos(\pi/(2p))$. Поэтому из неравенства (5.4) следует оценка (5.2) при $z = z_0$. Функция f , заданная соотношением (5.3), принадлежит классу $D_p(\lambda)$. Легко видеть, что модуль производной в нуле у этой функции равен

$$|f'(0)| = 4\lambda T_p'\left(T_p^{-1}\left(\left|\frac{a_0}{\lambda}\right|\right)\right) \left[1 + T_p^{-1}\left(\left|\frac{a_0}{\lambda}\right|\right)\right]. \quad (5.5)$$

Поэтому в неравенстве (5.2) для этой функции имеет место знак равенства при всех z , $0 < z < 1$. Теорема доказана.

Согласно теореме 6 работы [4] модуль производной $|f'(0)|$ любой функции f класса $D_p(\lambda)$ не превосходит (5.5). Поэтому соотношение (5.1) определяет достаточно узкое кольцо вида $\{z : \delta(p, \lambda, a_0) \leq |z| < 1\}$, возможно вырожденное. Согласно (5.2) функция f не имеет нулей во внутренности такого кольца, и ввиду (5.3) нетривиальная оценка на внутренней граничной окружности этого кольца невозможна. Далее, при $\lambda \rightarrow 0$ класс $D_p(\lambda)$ “приближается” к классу $D_p(0)$ голоморфных и p -листных в круге U функций, не принимающих значения $w = 0$ в этом круге. С другой стороны, условие (5.1) при малых λ не выполняется. Тем не менее, наш подход позволяет получить нижнюю оценку модуля $|f|$ в классе $D_p(0)$ в круге U , установленную ранее Хейманом [2; с. 145]. Она получается из соответствующей верхней оценки, примененной к функции a_0/f (см. теорему 8 работы [4] и комментариев к ней).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ., М., 1962.
- [2] W. K. Hayman, *Multivalent Functions*, Cambridge Tracts in Math., **100**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [3] В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функции комплексного переменного*, Дальнаука, Владивосток, 2009.
- [4] В. Н. Дубинин, “Новая версия круговой симметризации с приложениями к p -листным функциям”, *Матем. сб.*, **203**:7 (2012), 79–94.
- [5] S.-A. Kim, D. Minda, “Two-point distortion theorems for univalent functions”, *Pacific J. Math.*, **163**:1 (1994), 137–157.
- [6] W. Ma, D. Minda, “Two-point distortion for univalent functions”, *J. Comput. Appl. Math.*, **105**:1-2 (1999), 385–392.
- [7] J. A. Jenkins, “On two-point distortion theorems for bounded univalent regular functions”, *Kodai Math. J.*, **24**:3 (2001), 329–338.
- [8] D. Kraus, O. Roth, “Weighted distortion in conformal mapping in euclidean, hyperbolic and elliptic geometry”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, **31**:1 (2006), 111–130.

- [9] А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, М., 1968.
- [10] W. Kraus, “Über den Zusammenhang einiger Charakteristiken eines einfach zusammenhängenden Bereiches mit der Kreisabbildung”, *Mitt. Math. Semin. Univ. Giessen*, **21** (1932), 1–28.
- [11] M. Fekete, G. Szegő, “Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen”, *J. London Math. Soc.*, **8** (1933), 85–89.
- [12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

В. Н. Дубинин

Дальневосточный федеральный университет,

г. Владивосток

Институт прикладной математики ДВО РАН,

г. Владивосток

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило

07.02.2013