Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. З. Гринес, О. В. Починка, О простом изотопическом классе диффеоморфизма “источник-сток” на 3-сфере, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 828–845

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10363>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:05:42

О простом изотопическом классе дiffeоморфизма “источник-сток” на 3-сфере

В. З. Гринес, О. В. Починка

Полученные результаты относятся к решению проблемы Палиса–Пью о существовании дуги с конечным или счетным множеством бифуркаций, соединяющей две системы Морса–Смейла на гладком замкнутом многообразии M^n . Ньюхаус и Пейшото показали, что для потоков такая дуга существует для любого n , более того, она является простой. Однако существуют изотопные диффеоморфизмы, которые не могут быть соединены простой дугой. Для $n = 1$ это связано с наличием числа вращения Пуанкаре, а для $n = 2$ – с возможностью существования периодических точек разных периодов и гетероклинических орбит. В настоящей работе в размерности $n = 3$ обнаруживается новое препятствие к существованию простой дуги, связанное с диким вложением всех сепаратрис седловых точек, и находятся необходимые и достаточные условия того, что диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на 3-сфере соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник-сток”.

Библиография: 20 названий.

DOI: 10.4213/mzm10363

Введение

Настоящая работа посвящена решению проблемы Палиса–Пью о существовании дуги с конечным или счетным множеством бифуркаций, соединяющей две системы Морса–Смейла на гладком замкнутом многообразии [1]. В [2] Ньюхаусом и Пейшото было доказано, что любые векторные поля Морса–Смейла соединяются простой дугой. Простота означает, что вся дуга состоит из систем Морса–Смейла за исключением конечного множества точек, в которых векторное поле в определенном смысле наименьшим образом отклоняется от системы Морса–Смейла¹.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 12-01-00672, 13-01-12452-офи-м) и гранта Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012–2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011).

¹В работе [2] дается развернутое изложение понятия простой дуги в пространстве векторных полей на данном многообразии. В разделе 1 настоящей работы приведено строгое определение простой дуги в пространстве диффеоморфизмов, которое идейно схоже с соответствующим определением для потоков.

Для дискретных динамических систем ситуация иная. Два сохраняющих ориентацию диффеоморфизма Морса–Смейла на окружности могут быть соединены *простой дугой* (см. определение 1 ниже), если и только если они имеют одинаковые числа вращения. Как следует из работ Матсумото [3] и Бланшара [4], любая ориентируемая замкнутая поверхность допускает изотопные диффеоморфизмы Морса–Смейла, которые не могут быть соединены простой дугой. Говорят, что два изотопных диффеоморфизма Морса–Смейла принадлежат одному и тому же *простому изотопическому классу*, если они могут быть соединены простой дугой. Из работы [4] следует, что существует бесконечно много простых изотопических классов диффеоморфизмов Морса–Смейла на любой ориентируемой поверхности внутри изотопического класса, допускающего диффеоморфизмы Морса–Смейла.

В размерности 3 проблема существования простой дуги осложняется наличием диффеоморфизмов Морса–Смейла, у которых сепаратрисы седловых периодических точек являются дико вложенными в несущее многообразие. Первый “дикий” пример был построен Пикстоном в [5]. Этот диффеоморфизм принадлежит классу (названному нами в [6] *классом Пикстона*), состоящему из трехмерных диффеоморфизмов Морса–Смейла, у которых неблуждающее множество состоит ровно из четырех точек: двух стоков, источника и седла (см. рис. 1). Как следует из [7], любой диффеоморфизм Пикстона соединяется простой дугой с некоторым диффеоморфизмом “источник–сток”. Этот эффект связан с тем, что для любого диффеоморфизма из класса Пикстона по крайней мере одна одномерная сепаратриса седловой точки является ручной [8]. С помощью операции связной суммы двух 3-сфер, на которых заданы диффеоморфизмы из класса Пикстона с дико вложенными сепаратрисами, несложно сконструировать диффеоморфизм, у которого все сепаратрисы всех седел являются дико вложенными (см. рис. 1, где выделены 3-шары для образования связной суммы), в работе доказано, что такой диффеоморфизм не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник–сток”. Основным результатом работы является нахождение необходимых и достаточных условий существования простой дуги, соединяющей диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений с диффеоморфизмом “источник–сток”.

Следует заметить, что ключевым техническим моментом для решения поставленной задачи явился доказанный в разделе 3 результат, утверждающий, что любой диффеоморфизм из рассматриваемого класса, отличный от диффеоморфизма “источник–сток”, обладает стоковой или источниковой периодической точкой, в области притяжения или отталкивания которой лежит единственная седловая сепаратриса, при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной. Этот факт позволяет использовать нетривиальный результат работы [7] для построения простой дуги от данного диффеоморфизма к диффеоморфизму Морса–Смейла, число седловых периодических орбит которого меньше на одну, чем у исходного².

1. Формулировка результатов

Пусть $\text{Diff}(M^n)$ – пространство диффеоморфизмов на замкнутом многообразии M^n , снабженное C^1 -топологией. *Гладкой дугой* в $\text{Diff}(M^n)$ называется гладкое ото-

²В работе [7] установлено, что любой диффеоморфизм Морса–Смейла без гетероклинических пересечений, неблуждающее множество которого состоит из четырех неподвижных точек, соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник–сток”, посредством бифуркации седло–узел.

Рис. 1. Связная сумма двух диффеоморфизмов Пикстона

ражение $\xi: M^n \times [0, 1] \rightarrow M^n$, или, что эквивалентно, гладко зависящее от t семейство диффеоморфизмов

$$\{\xi_t \in \text{Diff}(M^n), t \in [0, 1]\}.$$

Пусть $KS(M^n)$ – множество всех диффеоморфизмов *Купки–Смейла*, т.е. диффеоморфизмов, периодические орбиты которых гиперболические и их устойчивые и неустойчивые многообразия трансверсальны. Диффеоморфизмы Купки–Смейла с конечным неблуждающим множеством образуют множество $MS(M^n)$ диффеоморфизмов Морса–Смейла. Для гладкой дуги ξ множество

$$B(\xi) = \{b \in [0, 1], \xi_b \notin KS(M^n)\}$$

называется *бифуркационным множеством*. В силу [9] для типичного множества дуг (являющегося пересечением открытых плотных подмножеств в пространстве гладких дуг) бифуркационное множество является счетным и каждый диффеоморфизм ξ_b , $b \in B(\xi)$ с точностью до направления движения по дуге претерпевает одну из следующих бифуркаций: седло-узел, удвоение периода, бифуркацию Хопфа, гетероклиническое касание (см. точные определения бифуркаций в разделе 2 ниже).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дуга ξ называется *простой*, если бифуркационное множество $B(\xi)$ конечно, $\xi_t \in MS(M^n)$ для любого $t \in ([0, 1] \setminus B(\xi))$ и бифуркации имеют один из следующих типов:

- седло-узел³;
- удвоение периода;
- гетероклиническое касание.

³Бифуркация седло-узел состоит в исчезновении двух гиперболических периодических орбит одного и того же периода. В настоящей работе мы будем предполагать, что одна из этих орбит является узловой, другая – седловой.

Простейшим диффеоморфизмом Морса–Смейла является диффеоморфизм “источник–сток”. Неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из двух точек: источника и стока, а объемлющее многообразие гомеоморфно сфере. В работе [7] было установлено, что любые диффеоморфизмы “источник–сток” на $\mathbb{S}^3$ принадлежат одному и тому же простому изотопическому классу, который мы будем обозначать I_{NS} . В настоящей работе мы покажем, что этот класс не исчерпывается диффеоморфизмами “источник–сток”, и опишем все его элементы, являющиеся диффеоморфизмами без *гетероклинических пересечений* (пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий различных седловых точек).

Пусть $f \in MS(M^3)$, σ – седловая точка диффеоморфизма f и ℓ_σ^u – неустойчивая сепаратриса (компонента связности множества $W_\sigma^u \setminus \sigma$). Число $\text{per}(\ell_\sigma^u) \in \mathbb{N}$ называется *периодом* сепаратрисы ℓ_σ^u , если $f^{\text{per}(\ell_\sigma^u)}(\ell_\sigma^u) = \ell_\sigma^u$ и $f^m(\ell_\sigma^u) \neq \ell_\sigma^u$ для любого натурального числа $m < \text{per}(\ell_\sigma^u)$. Если сепаратриса ℓ_σ^u не участвует в гетероклинических пересечениях, то $\text{cl}(\ell_\sigma^u) \setminus (\ell_\sigma^u \cup \sigma) = \{\omega\}$, где ω – стоковая периодическая точка (см., например, предложение 2.1.3 книги [6]). При этом, если $\dim W_\sigma^u = 1$, то $\text{cl}(\ell_\sigma^u)$ есть топологически вложенная⁴ дуга в M^3 . Множество $\ell_\sigma^u \cup \sigma$ является гладким подмногообразием многообразия M^3 . Однако многообразие $\text{cl}(\ell_\sigma^u)$ может оказаться диким в точке ω , в этом случае сепаратриса ℓ_σ^u называется *дикой*, и она называется *ручной* в противном случае. Аналогично определяется ручность и дикость устойчивой одномерной сепаратрисы.

Напомним, что динамика любого каскада $f \in MS(M^3)$ может быть представлена следующим образом (см., например, главу 2.2 книги [6]). Обозначим через Ω_f^q , $q = 0, 1, 2, 3$, множество периодических точек p таких, что $\dim W_p^u = q$. Тогда $A_f = W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^u$ – связный аттрактор и $R_f = W_{\Omega_f^3 \cup \Omega_f^2}^s$ – связный репеллер с топологической размерностью меньшей или равной единице. Множества A_f и R_f не пересекаются, и каждая точка из множества $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ является блуждающей и движется под действием f от R_f к A_f .

Будем говорить, что A_f и R_f *разделяются 2-сферой*, если существует гладкая 2-сфера $\Sigma_f \subset V_f$ такая, что A_f и R_f принадлежат различным компонентам связности $M^3 \setminus \Sigma_f$ (см. рис. 2).

Обозначим через $MS_0(M^3)$ класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений на 3-многообразии M^3 . Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS} , если и только если аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.*

В разделе 5 устанавливается, что диффеоморфизм, фазовый портрет которого описан в конце введения (см. рис. 1), не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник–сток”.

⁴ C^0 -отображение $g: B \rightarrow X$ называется *топологическим вложением* топологического многообразия B в многообразие X , если оно гомеоморфно отображает B на подпространство $g(B)$ с индуцированной из X топологией. При этом образ $A = g(B)$ называется *топологически вложенным многообразием*. Заметим, что топологически вложенное многообразие не является топологическим подмногообразием в общем случае. Если A – подмногообразие, то оно называется *ручным* или *ручно вложенным*; в противном случае A называется *диким* или *дико вложенным* и точки, в которых не выполняются условия определения топологического подмногообразия, называются *точками дикости*.

Рис. 2. Диффеоморфизм $f \in MS(M^3)$ с разделенными 2-сферой аттрактор A_f и репеллером R_f

2. Бифуркации на типичной дуге

Для описания бифуркационного множества типичной дуги мы напомним следующие понятия.

Пусть p – неподвижная точка диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$. Дифференциал Df_p индуцирует разложение касательного пространства $T_p M^n$ в прямую сумму инвариантных подпространств

$$T_p M^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s.$$

Линейные отображения $Df_p|_{E^u}$, $Df_p|_{E^c}$, $Df_p|_{E^s}$ имеют собственные значения соответственно внутри, на границе, вне единичного круга. В частности, если $\dim E^c = 0$, точка p является гиперболической. В противном случае существует гладкое инвариантное подмногообразие W_p^c многообразия M^n , касательное к E^c в точке p . Оно называется *центральной многообразием* негиперболической неподвижной точки. Центральное многообразие не единственно, но отображения $f|_{W_p^c}$ и $f|_{\widetilde{W}_p^c}$ топологически сопряжены для любых центральных многообразий W_p^c и $\widetilde{W}_p^c$. Кроме того, точка p имеет гладкое *устойчивое многообразие*

$$W_p^s = \left\{ y \in M^n : \lim_{k \rightarrow +\infty} f^k(y) = p \right\}$$

и гладкое *неустойчивое многообразие*

$$W_p^u = \left\{ y \in M^n : \lim_{k \rightarrow -\infty} f^k(y) = p \right\}$$

(см., например, [10]). Центральное, устойчивое и неустойчивое многообразия периодической точки периода k определяются как соответствующие многообразия этой точки как неподвижной точки диффеоморфизма f^k .

Для определения квази-трансверсального пересечения подмногообразий нам понадобится понятие квадратичного дифференциала отображения $h: A \rightarrow B$ в точке $x \in A$, где A, B – гладкие многообразия. Для этого напомним, что *ядром* первого дифференциала $h_x: T_x A \rightarrow T_{f(x)} B$ называется факторпространство $\text{Coker } h_x = T_{h(x)} B / h_x(T_x A)$. В локальных координатах $X: T_x A \rightarrow A, Y: T_{h(x)} B \rightarrow B$, где

$$X(0) = x, \quad Y(0) = h(x), \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} X(\zeta t) = \zeta, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(\zeta t) = \zeta,$$

отображение h запишется в виде

$$\varphi: T_x A \rightarrow T_{h(x)} B, \quad \text{где } \varphi = Y^{-1} h X.$$

Ограничение отображения φ на ядро $\text{Ker } h_x$ представляет собой l функций $\varphi_1, \dots, \varphi_l \in \text{Coker } h_x$, каждая из которых зависит от k переменных $\eta_1, \dots, \eta_k \in \text{Ker } h_x$. *Квадратичным дифференциалом* отображения h в точке x называется отображение $h_{xx}: \text{Ker } h_x \rightarrow \text{Coker } h_x$, имеющее в локальных координатах $\eta_1, \dots, \eta_k$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ вид

$$(h_{xx}(\eta_1, \dots, \eta_k))_r = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 \varphi_r}{\partial \zeta_i \partial \zeta_j} \eta_i \eta_j, \quad r = 1, \dots, l$$

(см. подробности в [11]).

Пусть теперь N_1, N_2 – гладкие подмногообразия многообразия M^n , $x \in (N_1 \cap N_2)$, D_1 – локально нормальное дополнение к N_1 в точке x и $q: M^n \rightarrow D_1$ – естественная проекция вдоль N_1 . Положим $g = q|_{N_2}$. Говорят, что многообразия N_1 и N_2 имеют *квази-трансверсальное пересечение* в точке x , если пространство $\text{Coker } g_x$ гомеоморфно $\mathbb{R}$ и выполняется одно из нижеприведенных условий:

- $\dim N_1 + \dim N_2 \geq n$ и квадратичный дифференциал g_{xx} невырожден;
- $\dim N_1 + \dim N_2 = n - 1$ и $T_x N_1 \cap T_x N_2 = \{0\}$.

Для типичного множества дуг ξ диффеоморфизм ξ_b , $b \in B(\xi)$, с точностью до направления движения по дуге претерпевает одну из описанных ниже бифуркаций. На поясняющих рисунках двойными стрелками схематично изображены направления движения с экспоненциальным сжатием и растяжением, а одинарными стрелками выделены направления движения по центральному многообразию негиперболической точки.

Перейдем непосредственно к описанию возможных типов бифуркаций.

1) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной орбиты $\mathcal{O}_p$ точки p периода k , для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = 1$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и $W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$. Переход через ξ_b сопровождается слиянием и дальнейшим исчезновением гиперболических периодических точек одного и того же периода. Такая бифуркация называется *седло-узловой* (см. рис. 3).

2) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_p$ периода k , для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одного $\lambda = -1$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и

Рис. 3. Бифуркация седло-узел

$W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$. При переходе через ξ_b вдоль центрального многообразия аттрактор⁵ становится репеллером и рождается периодическая гиперболическая орбита периода $2k$. Такая бифуркация называется *удвоением периода* (см. рис. 4).

Рис. 4. Бифуркация удвоения периода

3) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, за исключением одной $\mathcal{O}_p$ периода k , для которой все собственные значения $(Df^k)_p$ по модулю отличны от 1, кроме одной пары комплексно сопряженных $\lambda, \bar{\lambda}$, где $\lambda = e^{i\theta}$, $0 < \theta < \pi$. Устойчивые и неустойчивые многообразия различных периодических орбит диффеоморфизма ξ_b пересекаются трансверсально и $W_p^s \cap W_p^u = \{p\}$. При переходе через ξ_b аттрактор становится репеллером и вблизи него появляется инвариантная окружность. Такая бифуркация называется *бифуркацией Хопфа* или *бифуркацией Неймарка–Сакера* (см. рис. 5).

4) Все периодические орбиты диффеоморфизма ξ_b гиперболические, их устойчивые и неустойчивые многообразия имеют трансверсальные пересечения всюду, кроме одной траектории, вдоль которой пересечение является квази-трансверсальным. Такая бифуркация называется *бифуркацией гетероклинического касания* (см. рис. 6).

⁵Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, если существует окрестность V множества A такая, что $f(V) \subset V$ и $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(V)$. Такая окрестность называется *захватывающей*. Множество $R \subset M^n$ называется *репеллером* для f , если оно является аттрактором для f^{-1} .

Рис. 5. Бифуркация Хопфа или Неймарка–Сакера

Рис. 6. Бифуркация гетероклинического касания

3. Соотношение между ручными сепаратрисами и простыми дугами

3.1. Условие ручности одномерной сепаратрисы. Этот пункт мы начнем с необходимых для понимания определений и утверждений; исчерпывающую информацию по нижеприведенному материалу можно найти в главе 2.1 книги [6].

Пусть $f \in MS(M^3)$ и σ – седловая точка f такая, что неустойчивая сепаратриса ℓ_σ^u не участвует в гетероклинических пересечениях. Тогда $\text{cl}(\ell_\sigma^u) \setminus (\ell_\sigma^u \cup \sigma) = \{\omega\}$, где ω – стоковая периодическая точка. Для установления типа вложения сепаратрисы ℓ_σ^u используется переход к пространству орбит.

Положим

$$V_\omega = W_{\mathcal{O}_\omega}^s \setminus \mathcal{O}_\omega \quad \text{и} \quad \widehat{V}_\omega = V_\omega / f.$$

Тогда естественная проекция $p_\omega: V_\omega \rightarrow \widehat{V}_\omega$ является накрытием. Поскольку диффеоморфизм $f^{\text{per}(\omega)}|_{W_\omega^s}$ топологически сопряжен с гомотетией в $\mathbb{R}^3$, то многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Поскольку W_σ^u является гладким подмногообразием M^3 и диффеоморфизм $f^{\text{per}(\sigma)}|_{W_\sigma^u}$ топологически сопряжен с гомотетией

в $\mathbb{R}^{\dim W_\sigma^u}$, то множество $\widehat{\ell}_\sigma^u = p_\omega(\ell_\sigma^u)$ является *гомотопически нетривиальным* гладким подмногообразием многообразия $\widehat{V}_\omega$, т.е. $i_{\widehat{\ell}_\sigma^u*}(\pi_1(\widehat{\ell}_\sigma^u)) \neq 0$, где $i_{\widehat{\ell}_\sigma^u}: \widehat{\ell}_\sigma^u \rightarrow \widehat{V}_\omega$ — отображение включения.

В случае $\dim W_\sigma^u = 1$ многообразие $\widehat{\ell}_\sigma^u$ является *узлом* (гомеоморфным образом окружности). Узел $\widehat{\ell}_\sigma^u$ называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм $\widehat{\varphi}: \widehat{V}_\omega \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ такой, что

$$\widehat{\varphi}(\widehat{\ell}_\sigma^u) = \{x\} \times \mathbb{S}^1 \quad \text{для некоторого } x \in \mathbb{S}^2.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если узел $\widehat{\ell}_\sigma^u$ является тривиальным в $\widehat{V}_\omega$, то одномерная сепаратриса ℓ_σ^u является ручной и имеет тот же период, что и сток ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть утверждения следует из теоремы 4.2.2 книги [6], в силу которой сепаратриса ℓ_σ^u является ручно вложенной в M^3 тогда и только тогда, когда узел $\widehat{\ell}_\sigma^u$ является тривиальным в $\widehat{V}_\omega$. Для доказательства второй части заметим, что согласно предложению 4.1.2 книги [6] узел $\widehat{\ell}_\sigma^u$ является тривиальным тогда и только тогда, когда существует его трубчатая окрестность $N(\widehat{\ell}_\sigma^u)$ в многообразии $\widehat{V}_\omega$ такая, что многообразие $\widehat{V}_\omega \setminus N(\widehat{\ell}_\sigma^u)$ гомеоморфно заполненному тору (многообразию, гомеоморфному многообразию $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$). Отсюда следует, что для тривиального узла $\widehat{\ell}_\sigma^u$ группа $i_{\widehat{\ell}_\sigma^u*}(\pi_1(\widehat{\ell}_\sigma^u))$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Так как многообразие $\widehat{V}_\omega$ гомеоморфно факторпространству $(W_\omega^s \setminus \omega)/f^{\text{per}(\omega)}$, то в силу теоремы о монодромии существует дуга $\gamma \subset \ell_\sigma^u$ с началом в точке x и концом в точке $f^{\text{per}(\omega)}(x)$, которая является поднятием узла $\widehat{\ell}_\sigma^u$. Таким образом, $f^{\text{per}(\omega)}(\ell_\sigma^u) = \ell_\sigma^u$. Поскольку $\omega \in \text{cl}(\ell_\sigma^u)$, то $\text{reg}(\ell_\sigma^u) \geq \text{reg}(\omega)$, а значит, сепаратриса ℓ_σ^u имеет тот же период, что и сток ω .

Аналогичный результат имеет место для устойчивой седловой сепаратрисы в области отталкивания источника α .

3.2. Характеристические пространства. Пусть $f \in MS(M^3)$. Напомним, что мы обозначили через Ω_f^q , $q = 0, 1, 2, 3$, множество периодических точек p таких, что $\dim W_p^u = q$, положили

$$A_f = W_{\Omega_f^0 \cup \Omega_f^1}^u, \quad R_f = W_{\Omega_f^2 \cup \Omega_f^3}^s, \quad V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f).$$

В книге [6] пространство орбит $\widehat{V}_f = V_f/f$ названо *характеристическим пространством*. Обозначим через $p_f: V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ естественную проекцию. Известно (см., например, теорему 1.2 работы [12]), что характеристическое пространство является простым многообразием⁶.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ условие разделимости аттрактора A_f и репеллера R_f 2-сферой равносильно тому, что пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Разделенность аттрактора A_f и репеллера R_f диффеоморфизма $f \in MS(M^3)$ 2-сферой означает, что существует гладкая 2-сфера $\Sigma_f \subset V_f$ такая, что A_f и R_f принадлежат различным компонентам связности

⁶Гладкое 3-многообразие называется *простым*, если оно либо *неприводимо* (любая гладкая 2-сфера ограничивает в нем 3-шар), либо гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

$M^3 \setminus \Sigma_f$. Тогда сфера Σ_f не ограничивает 3-шар в V_f и, следовательно, многообразие V_f не является неприводимым. В силу теоремы 3.15 в [13] многообразие $\widehat{V}_f$ также не является неприводимым. Согласно теореме 1.2 работы [12] $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Достаточность. Пусть многообразие $\widehat{V}_f$ диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда многообразие V_f диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ посредством некоторого диффеоморфизма $\beta: V_f \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$. Зафиксируем координату $r \in \mathbb{R}$ и положим $\Sigma_f = \beta^{-1}(\mathbb{S}^2 \times \{r\})$. По построению 2-сфера Σ_f делит многообразие V_f на две некомпактные компоненты связности, при этом многообразие $M^3 = V_f \cup A_f \cup R_f$ компактно. Поскольку множества A_f и R_f связны и не пересекаются, то они принадлежат различным компонентам связности множества $M^3 \setminus \Sigma_f$. Следовательно, 2-сфера Σ_f является искомой.

Пусть теперь $f \in MS_0(M^3)$. Для седловой точки σ диффеоморфизма f обозначим через $W_\sigma^2(W_\sigma^1)$ двумерное (одномерное) инвариантное многообразие σ . Положим $\widehat{W}_\sigma^2 = p_f(W_\sigma^2)$. Тогда множество $\widehat{W}_\sigma^2$ является гомотопически нетривиальным гладким тором (гомотопически нетривиальной бутылкой Клейна) в многообразии $\widehat{V}_f$, если диффеоморфизм $f^{\text{per}(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_σ^2 (см., например, предложение 2.1.5 книги [6]). Положим

$$\widehat{W}_f^2 = \bigcup_{\sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)} \widehat{W}_\sigma^2.$$

Выберем семейство $\{N(\widehat{W}_\sigma^2), \sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)\}$ попарно непересекающихся трубчатых окрестностей⁷ поверхностей $\{\widehat{W}_\sigma^2, \sigma \in (\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2)\}$.

В случае, когда многообразие $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, для установления типа вложения сепаратрис нам понадобятся следующие топологические факты.

ФАКТ 1. Любой гомотопически нетривиальный гладкий тор в многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ ограничивает в нем заполненный тор (см., например, предложение 4.1.1 книги [6]).

ФАКТ 2. Собственно вложенная в многообразие X ориентируемая поверхность⁸ F , не являющаяся 2-сферой, несжимаема⁹ тогда и только тогда, когда $\text{Ker}(i_{F*}) = 0$, где $i_F: F \rightarrow X$ – отображение включения [14].

ФАКТ 3. Если 3-многообразие X неприводимо, тогда двумерный тор $T \subset X$, не лежащий в 3-шаре, является сжимаемым тогда и только тогда, когда он ограничивает заполненный тор в X [14; упражнение 6].

⁷Трубчатая окрестность тора – это многообразие, диффеоморфное $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$, и, соответственно, ее граница состоит из двух торov. Трубчатая окрестность бутылки Клейна – это локально тривиальное расслоение над бутылкой Клейна со слоем интервал, ее граница состоит из одного тора.

⁸Поверхность F называется *собственно вложенной* в многообразие X , если $\partial X \cap F = \partial F$.

⁹Собственно вложенная в X поверхность F называется *сжимаемой* в X в одном из следующих двух случаев:

- 1) существует нестягиваемая простая замкнутая кривая $c \subset \text{int } F$ и гладко вложенный 2-диск $D \subset \text{int } X$ такой, что $D \cap F = \partial D = c$;
- 2) существует 3-шар $B \subset \text{int } X$ такой, что $F = \partial B$.

Поверхность F называется *несжимаемой* в X , если она не является сжимаемой в X .

ФАКТ 4. Многообразие диффеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тогда и только тогда, когда оно получается из двух гладких заполненных торов, склейкой их границ посредством диффеоморфизма, переводящего меридиан¹⁰ в меридиан (см., например, предложение 7.1 книги [15]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть T – гомотопически нетривиальный гладкий тор на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. В силу факта 1 тор T ограничивает заполненный тор G , меридиан которого мы будем называть *меридианом* тора T . При этом, если тор T ограничивает два заполненных тора, то в силу факта 4 меридиан одного из них является меридианом другого.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма “источник-сток” и его характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда существует седловая точка σ_* такая, что хотя бы одна компонента связности множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}_{\sigma_*}^2)$ является заполненным тором, не пересекающимся с множеством $\widehat{W}_f^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу факта 1 для любой седловой точки σ хотя бы одна компонента связности множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}_{\sigma}^2)$ является заполненным тором. Поскольку седловых точек конечное число и бутылка Клейна не вкладывается в заполненный тор¹¹, то для доказательства утверждения достаточно показать, что любой гомотопически нетривиальный в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ тор T , лежащий в гомотопически нетривиальном в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ заполненном торе G , ограничивает в G заполненный тор.

Пусть a и b – образующие фундаментальной группы тора T . Поскольку тор является гомотопически нетривиальным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то с точностью до перестановки образующих $i_{T*}([a]) \neq 0$ и $i_{T*}([b]) = 0$, где $i_T: T \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – отображение включения. Пусть c – образующая фундаментальной группы заполненного тора G . Поскольку заполненный тор G также является гомотопически нетривиальным в $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, то $i_{G*}([c]) \neq 0$, где $i_G: G \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ – отображение включения, откуда следует, что $\text{Ker}(i_{G*}) = 0$. Обозначим через $j_T: T \rightarrow G$ отображение включения. Тогда $i_T = i_G j_T$ и, следовательно, $i_{T*} = i_{G*} j_{T*}$. Поскольку $\text{Ker}(i_{T*}) \neq 0$ и $\text{Ker}(i_{G*}) = 0$, то $\text{Ker}(j_{T*}) \neq 0$. В силу факта 2 тор T является сжимаемым в G . Поскольку $j_{T*}([a]) \neq 0$, то T не лежит в 3-шаре в G , откуда в силу факта 3 получаем, что тор T ограничивает заполненный тор в G .

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма “источник-сток”, характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ диффеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и σ_* – седловая точка, удовлетворяющая заключению утверждения 3. Если $\dim W_{\sigma_*}^u = 1$ ($\dim W_{\sigma_*}^s = 1$), то существует стоковая точка ω_* (источниковая точка α_*) такая, что пересечение

$$\widehat{V}_{\omega_*} \cap p_{\omega_*}(W_{\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2}^u) \quad (\widehat{V}_{\alpha_*} \cap p_{\alpha_*}(W_{\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2}^s))$$

состоит из одного тривиального узла $\widehat{\ell}_{\sigma_*}^u$ ($\widehat{\ell}_{\sigma_*}^s$).

¹⁰Двумерный диск d в заполненном торе G называется *меридианным*, если $\partial G \cap d = \partial d$ и ∂d не ограничивает диск в ∂G . Граница меридианного диска называется *меридианом*.

¹¹Если предположить, что бутылка Клейна вкладывается в заполненный тор, то она вкладывается и в $\mathbb{R}^3$, что неверно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для определенности, что $\dim W_{\sigma_*}^u = 1$. Положим

$$V_0 = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} V_\omega \quad \text{и} \quad \widehat{V}_0 = \bigcup_{\omega \in \Omega_f^0} \widehat{V}_\omega.$$

Тогда каждая компонента связности многообразия $\widehat{V}_0$ диффеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Для понимания перехода от многообразия V_f к многообразию V_0 заметим, что $V_0 \setminus W_{\Omega_f^1}^u = V_f \setminus W_{\Omega_f^1}^s$. Для точки $\sigma \in \Omega_f^1$ положим

$$N_\sigma = p_f^{-1}(N(\widehat{W}_\sigma^2)) \cup W_{\mathcal{O}_\sigma}^u.$$

По построению N_σ – f -инвариантная окрестность периодической орбиты $\mathcal{O}_\sigma$, содержащая $W_{\mathcal{O}_\sigma}^s \cup W_{\mathcal{O}_\sigma}^u$ (см. рис. 8 и доказательство существования такой окрестности в [6; теорема 2.1.2]). Положим

$$N_{\Omega_f^1} = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} N_\sigma.$$

Тогда имеет место равенство $V_0 \setminus N_{\Omega_f^1} = V_f \setminus N_{\Omega_f^1}$.

Положим $\widehat{W}_\sigma^1 = p_0(W_\sigma^1)$. Множество $\widehat{W}_\sigma^1$ является парой узлов (узлом) в многообразии $\widehat{V}_0$, если диффеоморфизм $f^{\text{per}(\sigma)}$ сохраняет (меняет) ориентацию W_σ^1 (см., например, предложение 2.1.5 книги [6]). Положим $N(\widehat{W}_\sigma^1) = p_0(N_\sigma)$, тогда $N(\widehat{W}_\sigma^1)$ – трубчатая окрестность многообразия $\widehat{W}_\sigma^1$. Положим

$$\widehat{N}_{\Omega_f^1}^2 = p_f(N_{\Omega_f^1}), \quad \widehat{N}_{\Omega_f^1}^1 = p_0(N_{\Omega_f^1}).$$

Из равенства $V_0 \setminus N_{\Omega_f^1} = V_f \setminus N_{\Omega_f^1}$ следует, что многообразие $p_0(V_0 \setminus N_{\Omega_f^1})$ гомеоморфно многообразию $p_f(V_f \setminus N_{\Omega_f^1})$. Откуда получаем, что $\widehat{V}_0 \setminus \widehat{N}_{\Omega_f^1}^1$ гомеоморфно $\widehat{V}_f \setminus \widehat{N}_{\Omega_f^1}^2$.

Рис. 7. f -Инвариантная окрестность седловой точки σ

Переход от многообразия $\widehat{V}_f$ к многообразию $\widehat{V}_0$ состоит в удалении $\widehat{N}_{\Omega_f^1}^2$ из $\widehat{V}_f$ и приклеивании к каждой границе полученного многообразия заполненного тора в силу диффеоморфизма, переводящего меридиан в меридиан. Схематически описанный переход изображен на рис. 8 (а) (рис. 8 (б)). Поскольку в силу утверждения 3

существует компонента связности G множества $\widehat{V}_f \setminus N(\widehat{W}_{\sigma_*}^2)$, гомеоморфная заполненному тору и не пересекающаяся с множеством $\widehat{W}_f^2$, то, приклеив к G компоненту связности $N(\widehat{\ell}_{\sigma_*}^u)$ множества $N(\widehat{W}_{\sigma_*}^1)$, гомеоморфную заполненному тору, получим компоненту связности $\widehat{V}_{\omega_*}$ множества $\widehat{V}_0$ такую, что пересечение

$$\widehat{V}_{\omega_*} \cap p_{\omega_*}(W_{\Omega_f^1 \cup \Omega_f^2}^u) = \widehat{\ell}_{\sigma_*}^u.$$

Рис. 8. Переход от пространства $\widehat{V}_i$ к пространству $\widehat{V}_{i-1}$

3.3. Существование простой дуги, уменьшающей число периодических орбит.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(M^3)$ отличен от диффеоморфизма “источник-сток” и характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $S^2 \times S^1$. Тогда неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит узловую точку (источник или сток), в бассейне которой (области притяжения или отталкивания) лежит в точности одна сепаратриса седловой точки, при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование узловой точки с искомыми свойствами непосредственно устанавливается последовательным применением утверждений 3, 4 и 1.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. Если для диффеоморфизма $f \in MS_0(M^3)$ его неблуждающее множество содержит узловую точку, в бассейне которой лежит в точности одна сепаратриса седловой точки, и при этом эта сепаратриса является одномерной и ручной, то существует простая дуга с единственным бифуркационным значением, соединяющая диффеоморфизм f с диффеоморфизмом $f' \in MS_0(M^3)$ таким, что неблуждающее множество f' содержит на одну седловую орбиту меньше по сравнению с неблуждающим множеством f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через σ седловую точку и через ℓ_σ – ее сепаратрису, удовлетворяющую условиям утверждения. Возможны два случая:

- 1) $f^{\text{per}(\sigma)}(\ell) = \ell$;
- 2) $f^{\text{per}(\sigma)}(\ell) \neq \ell$.

В первом случае существование искомой простой дуги устанавливается с помощью бифуркации седло-узел методом, подробно описанным в разделе 4.3.2 книги [6] (см. также [7]) для случая $\text{per}(\sigma) = 1$ и легко обобщающимся на случай $\text{per}(\sigma) > 1$. Во втором случае построение искомой простой дуги для $\text{per}(\sigma) = 1$ описано в [16] с помощью бифуркации удвоения периода и также легко обобщается на случай $\text{per}(\sigma) > 1$.

4. Критерий принадлежности диффеоморфизма Морса–Смейла без гетероклинических пересечений классу I_{NS}

Доказательство теоремы 1 базируется на следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть диффеоморфизмы $f, f' \in MS_0(M^3)$ соединяются простой дугой. Тогда пространства $\widehat{V}_f, \widehat{V}_{f'}$ гомеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не уменьшая общности, будем считать, что существует простая дуга ξ_t с единственным бифуркационным значением ξ_b , соединяющая диффеоморфизмы $f, f' \in MS_0(\mathbb{S}^3)$. Тогда для $t_1, t_2 < b$ или $t_1, t_2 > b$ диффеоморфизмы ξ_{t_1} и ξ_{t_2} топологически сопряжены и, следовательно, пространства орбит $\widehat{V}_{\xi_{t_1}}$ и $\widehat{V}_{\xi_{t_2}}$ гомеоморфны. Заметим, что из определения простой дуги следует, что либо $|\Omega_{\xi_0}^0| = |\Omega_{\xi_t}^0|$, либо $|\Omega_{\xi_0}^3| = |\Omega_{\xi_t}^3|$ для любого $t \in [0, 1]$, где $|\cdot|$ означает мощность множества. Положим для определенности $|\Omega_{\xi_0}^0| = |\Omega_{\xi_t}^0|$ (во втором случае рассуждения аналогичны). Тогда $|\Omega_{\xi_0}^1| = |\Omega_{\xi_t}^1|$ и множество $A_{\xi_t} = W_{\Omega_{\xi_t}^0 \cup \Omega_{\xi_t}^1}^u$ является аттрактором для любого $t \in [0, 1]$. Положим

$$V_{\xi_t} = W_{A_{\xi_t} \cap \Omega_{\xi_t}}^s \setminus A_{\xi_t} \quad \text{и} \quad \widehat{V}_{\xi_t} = V_{\xi_t} / \xi_t.$$

Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что многообразия $\widehat{V}_{\xi_t}$ и $\widehat{V}_{\xi_b}$ гомеоморфны для $b \leq t \leq b + \varepsilon$. Аналогично показывается, что существует $\tilde{\varepsilon} > 0$ такое, что многообразия $\widehat{V}_{\xi_t}$ и $\widehat{V}_{\xi_b}$ гомеоморфны для $b - \tilde{\varepsilon} \leq t \leq b$, что и завершит доказательство леммы.

Методами работы [12] для аттрактора A_{ξ_b} можно построить гладкую захватывающую окрестность Q , являющуюся заполненной поверхностью. Выберем трубчатую окрестность N поверхности $\xi_b(\partial Q)$ так, что $N \cap \partial Q = \emptyset$. Положим $S_t = \xi_t(\partial Q)$ для $t \in [b, 1]$. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что $S_t \subset N$ и поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leq t \leq b + \varepsilon$.

Для этого положим

$$g_t = \xi_t \xi_b^{-1}|_{S_b} : S_b \rightarrow S_t \quad \text{для} \quad t \in [b, 1].$$

По теореме Тома о продолжении изотопии (см., например, теоремы 8.1.3 и 8.1.4 в книге [17]) существует $\varepsilon > 0$ и гладкая изотопия

$$\{G_t : M^3 \rightarrow M^3, t \in [b, b + \varepsilon]\}$$

такая, что $G_b = \text{id}$,

$$G_t|_{S_b} = g_t|_{S_b}, \quad G_t|_{M^3 \setminus N} = \text{id}|_{M^3 \setminus N} \quad \text{для любого} \quad t \in [b, b + \varepsilon].$$

Тогда $G_t(N) = N$ и $G_t(S_b) = S_t$, откуда следует, что поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leq t \leq b + \varepsilon$.

Положим

$$K_{\xi_t} = Q \setminus \text{int } \xi_t(Q).$$

Тогда K_{ξ_t} является фундаментальной областью¹² действия диффеоморфизма ξ_t на V_{ξ_t} . Тогда пространство орбит $\widehat{V}_{\xi_t}$ гомеоморфно топологическому пространству, полученному из K_{ξ_t} отождествлением его границ в силу диффеоморфизма ξ_t (см., например, утверждение 10.2.22 в книге [6]). Покажем, что множества K_{ξ_t} и K_{ξ_b} гомеоморфны посредством некоторого гомеоморфизма $h_t: K_{\xi_b} \rightarrow K_{\xi_t}$ такого, что

$$h_t|_{\partial Q} = \text{id}|_{\partial Q} \quad \text{и} \quad h_t|_{\xi_b(\partial Q)} = g_t,$$

что и завершит доказательство леммы.

Положим

$$R = K_{\xi_b} \setminus N \quad \text{и} \quad P_t = \text{cl}(K_{\xi_t} \setminus R).$$

Тогда $K_{\xi_t} = R \cup P_t$. Положим $S = R \cap P_t$ и $S_t = \xi_t(\partial Q)$. По построению S , S_t – диффеоморфные поверхности. Более того, поскольку поверхность S_t разделяет края многообразия N для $b \leq t \leq b + \varepsilon$, то P_t диффеоморфно многообразию $S \times [0, 1]$ (см., например, следствие 3.2 в [18] или теорему 3.3 в [19]). При этом можно построить непрерывное по $t \in [b, b + \varepsilon]$ семейство диффеоморфизмов $\nu_t: P_t \rightarrow S \times [0, 1]$ таких, что $\nu_t(s) = \{s\} \times [0, 1]$ для $s \in S$. Положим

$$\mu_t = \nu_t g_t \nu_b^{-1}|_{S \times \{1\}}: S \times \{1\} \rightarrow S \times \{1\}.$$

По построению отображение μ_t изотопно тождественному отображению, откуда следует, что существует диффеоморфизм

$$q_t: S \times [0, 1] \rightarrow S \times [0, 1],$$

тождественный на $S \times \{0\}$ и совпадающий с μ_t на $S \times \{1\}$. Тогда отображение h_t , являющееся тождественным на R и совпадающее с диффеоморфизмом $\nu_t^{-1} q_t \nu_b$ на P_b , является искомым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем теперь теорему 1, т.е. докажем, что диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS} , если и только если аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.

Необходимость. Пусть диффеоморфизм $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ принадлежит классу I_{NS} . Поскольку для диффеоморфизма “источник-сток” $g: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ характеристическое пространство $\widehat{V}_g$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ (см., например, теорему 2.2.1 в [6]), то в силу леммы 1 характеристическое пространство $\widehat{V}_f$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Тогда из утверждения 2 следует, что аттрактор A_f и репеллер R_f разделяются 2-сферой.

¹² Фундаментальной областью действия отображения g на X называется замкнутое множество $D_g \subset X$, для которого существует множество $\widetilde{D}_g$ со следующими свойствами:

- 1) $\text{cl}(\widetilde{D}_g) = D_g$;
- 2) $g^k(\widetilde{D}_g) \cap \widetilde{D}_g = \emptyset$ для всех $k \in (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$;
- 3) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k(\widetilde{D}_g) = X$.

Достаточность. Пусть аттрактор A_f и репеллер R_f диффеоморфизма $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$ разделяются 2-сферой. Тогда в силу утверждения 5 неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит седловую точку, одномерные сепаратрисы l_1, l_2 которой лежат в бассейнах узловых точек (стоков или источников) a_1, a_2 соответственно; при этом $a_1 \neq a_2$ и хотя бы одна из сепаратрис l_1, l_2 является ручной и имеет тот же период, что и соответствующий узел. Согласно утверждению 6 существует простая дуга с одной бифуркацией типа седло-узел или удвоение периода между диффеоморфизмом f и некоторым диффеоморфизмом $f' \in MS_0(\mathbb{S}^3)$, имеющим на одну седловую орбиту меньше, чем f . Согласно лемме 1 характеристическое пространство $\hat{V}_{f'}$ гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ и в силу утверждения 2 аттрактор $A_{f'}$ и репеллер $R_{f'}$ диффеоморфизма f' разделяются 2-сферой. Продолжая процесс, мы построим искомую дугу.

5. Пример диффеоморфизма $f \in MS_0(\mathbb{S}^3)$, не принадлежащий классу I_{NS}

В действительности такой диффеоморфизм f является связной суммой двух диффеоморфизмов Пикстона, как показано на рис. 1. В силу леммы 1 и утверждения 2 для доказательства того, что он не соединяется простой дугой с диффеоморфизмом “источник-сток”, достаточно показать, что его характеристическое пространство $\hat{V}_f$ не гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Для этого заметим, что диффеоморфизм f может быть реализован методами работы [20] из абстрактной схемы $S = (\hat{V}, T^s, T^u)$, имеющей следующую структуру. Пусть на многообразии $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ задан узел γ (см. рис. 9, где изображена развертка узла γ). Выберем трубчатую окрестность $V(\gamma)$ узла γ и склеим две копии многообразий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \setminus \text{int } V(\gamma)$ вдоль граничных торов в силу тождественного отображения. Полученное многообразие есть $\hat{V}$, а границы трубчатой окрестности места склейки суть двумерные торы T^s, T^u . По построению каждый из торов не ограничивает заполненный тор в многообразии $\hat{V}$, что в силу факта 1 означает, что многообразие $\hat{V}$ не гомеоморфно многообразию $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Поскольку $\hat{V}$ гомеоморфно $\hat{V}_f$, то утверждение доказано.

Рис. 9. Реализация диффеоморфизма f

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Palis, C. C. Pugh, “Fifty problems in dynamical systems”, *Dynamical Systems – Warwick 1974*, Lecture Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 345–353.
- [2] S. Newhouse, M. M. Peixoto, “There is a simple arc joining any two Morse–Smale flows”, *Trois études en dynamique qualitative*, Asterisque, **31**, Soc. Math. France, Paris, 1976, 15–41.
- [3] S. Matsumoto, “There are two isotopic Morse–Smale diffeomorphism which can not be joined by simple arcs”, *Invent. Math.*, **51**:1 (1979), 1–7.
- [4] P. R. Blanchard, “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse–Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Math. J.*, **47**:1 (1980), 33–46.
- [5] D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167–172.
- [6] В.З. Гринес, О.В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, РХД, Ижевск, 2011.
- [7] Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, О.В. Починка, “Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами”, *Динамические системы и оптимизация*, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **256**, Наука, М., 2007, 54–69.
- [8] C. Bonatti, V. Z. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *J. Dynam. Control Systems*, **6**:4 (2000), 579–602.
- [9] J. Palis, “Arcs of dynamical systems: bifurcations and stability”, *Dynamical Systems – Warwick 1974*, Lecture Notes in Math., **468**, Springer-Verlag, Berlin, 1975, 48–53.
- [10] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub, “Invariant Manifolds”, Lecture Notes in Math., **583**, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [11] В.И. Арнольд, А.Н. Варченко, С.М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982.
- [12] В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II*, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина, Тр. МИАН, **271**, МАИК, М., 2010, 111–133.
- [13] A. Hatcher, *Notes on Basic 3-Manifold Topology*, <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3M.pdf>.
- [14] W. D. Neumann, *Notes on Geometry and 3-Manifolds*, <http://www.math.columbia.edu/~neumann/preprints/budfinal.pdf>.
- [15] А.Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы*, РХД, Ижевск, 1999.
- [16] О.В. Починка, А.А. Романов, “Бифуркация удвоения периода на простой дуге, соединяющей диффеоморфизмы Пикстона”, *Журнал СВМО*, **14**:3 (2012), 74–79.
- [17] М. Хирш, *Дифференциальная топология*, Мир, М., 1979.
- [18] F. Waldhausen, “On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large”, *Ann. of Math. (2)*, **87**:1 (1968), 56–88.
- [19] В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56.
- [20] C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pécou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43**:2 (2004), 369–391.

В. З. Гринес

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: vgrines@yandex.ru

Поступило

20.02.2013

О. В. Починка

Нижегородский государственный университет
им. Н. И. Лобачевского

E-mail: olga-pochinka@yandex.ru