Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Т. Тлеуханова, Г. К. Мусабаева, О коэффициентах рядов Фурье по тригонометрическим системам в пространстве $L_{2,r}$, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 884–888

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10364>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:39:42

О коэффициентах рядов Фурье по тригонометрическим системам в пространстве $L_{2,r}$

Н. Т. Тлеуханова, Г. К. Мусабаева

Получена теорема типа Харди и Литтлвуда для тригонометрических рядов в пространстве $L_{2,r}$, усиливающая теорему С. В. Бочкарева.

Библиография: 2 названия.

DOI: 10.4213/mzm10364

В работе [1] Бочкарев показал, что для функции из пространств Лоренца $L_{2,r}$ неравенство типа Харди и Литтлвуда имеет несколько иной вид, чем для функции из пространства Лоренца $L_{p,r}$, $p \neq 2$ (см. [2]). Им доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА А. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная на $[0, 1]$ система комплекснозначных функций, $\|\varphi_n\|_{\infty} \leq M$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда для любых $2 < r \leq \infty$ и $n = 2, 3, \dots$ имеет место неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{|n|^{1/2} (\log(n+1))^{1/2-1/r}} \sum_{m=1}^n a_m^* \leq C \|f\|_{L_{2,r}}, \quad (1)$$

где a_n – коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Пусть M – множество всех арифметических прогрессий из $\mathbb{Z}$. Для конечного множества A из $\mathbb{Z}$ определим число $\langle A \rangle_M$ следующим образом:

$$\langle A \rangle_M = \min \left\{ l : A = \bigcup_{k=1}^l I_k, I_k \in M \right\}.$$

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть $2 < r < \infty$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m) e^{2\pi i m x}$. Тогда для любой функции $f \in L_{2,r}$ имеет место неравенство

$$\sup_{A \subset \mathbb{Z}} \frac{1}{|A|^{1/2} \log_2(1 + \langle A \rangle_M)^{1/2-1/r}} \left| \sum_{m \in A} \hat{f}(m) \right| \leq 34 \|f\|_{L_{2,r}}. \quad (2)$$

Работа выполнена при поддержке Комитета науки МОН РК (грант №1504/ГФ).

Заметим, что неравенство (1) эквивалентно неравенству

$$\sup_{A \subset \mathbb{Z}} \frac{1}{|A|^{1/2} \log_2(1 + |A|)^{1/2-1/r}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq C \|f\|_{L_{2,r}}$$

поэтому из (2) следует (1). Обратное неверно.

ЛЕММА 1. Пусть $1 < q < 2 < r < \infty$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}$. Тогда для любого конечного подмножества A из $\mathbb{Z}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|A|^{1/q}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq 2 \left(\frac{q(r-2)}{r(2-q)} \right)^{(1/q')((r-2)/r)} \left(\frac{q}{q-1} \right)^{(1/r-1)(1-2/q)} \|f\|_{L_{q,r}}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как тригонометрические системы ограничены в совокупности, $|\sum_{m \in A} \widehat{f}(m)| \leq |A| \|f\|_{L_1}$, из равенства Парсеваля имеем

$$\left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq |A|^{1/2} \|f\|_{L_2}. \quad (4)$$

Пусть $\tau \in (0, 1)$,

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leq f^*(\tau), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда для произвольного $0 < \tau < 1$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_1(m) \right| \\ &\leq |A| \int_0^\tau f^*(s) ds + |A|^{1/2} \left(\int_\tau^1 (f^*(s))^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L_{q,r}} \left(|A| \tau^{1-1/q} (1-1/q)^{1/r-1} + |A|^{1/2} \tau^{1/2-1/q} \left(\frac{r(2-q)}{q(r-2)} \right)^{1/r-1/2} \right). \end{aligned}$$

Пусть теперь

$$\tau = \left(\frac{q(r-2)}{r(2-q)} \right)^{(r-2)/r} \left(\frac{q}{q-1} \right)^{(2(1-r))/r} \cdot \frac{1}{|A|},$$

тогда получим нужное утверждение.

Метод доказательства теоремы основывается на изучении констант в неравенствах вида (3), а именно, на их зависимости от соответствующих параметров.

ЛЕММА 2. Пусть $2 < p < \infty$, $p' = p/(p-1)$, $2 < r < \infty$, $f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}$, $A = \bigcup_{k=1}^N I_k$, где I_k – отрезки из $\mathbb{Z}$. Тогда

$$\frac{1}{|A|^{1/p} N^{1/p'-1/p}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq 4p^{(1-1/r)(1-2/p)} \left(\frac{r(p-2)}{p(r-2)} \right)^{(1/p)((2-r)/r)} \|f\|_{L_{p,r}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из свойств тригонометрических ядер Дирихле имеем

$$\left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| = \left| \int_0^1 f(x) D_A(x) dx \right| \leq \sum_{k=1}^N \int_0^1 |f(x)| |D_{I_k}(x)| dx. \quad (5)$$

Рассмотрим функции

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| \leq f^*(\tau), \ x \in \left[\frac{\tau}{2}, 1 - \frac{\tau}{2} \right], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда, используя (4) и (5), получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_1(m) \right| \leq |A|^{1/2} \|f_0\|_{L_2} + \sum_{k=1}^N \int_0^1 |f_1(x)| |D_{I_k}(x)| dx. \\ \left(\int_0^1 |f_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} &= \left(\int_0^\tau |f(x)|^2 dx + \int_{1-\tau}^1 |f(x)|^2 dx + \int_\tau^{1-\tau} |f_0(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq 3 \left(\int_0^\tau |f^*(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя тот факт, что $(D_{I_k}(x) \chi_{[\tau, 1-\tau]}(x))^*(t) \leq 1/(t+\tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_1(x)| |D_{I_k}(x)| dx &\leq \int_0^{1-2\tau} f_1^*(t) \frac{1}{t+\tau} dt \leq \int_0^{1-2\tau} f^*(t+\tau) \frac{dt}{t+\tau} \leq \int_\tau^1 f^*(t) \frac{dt}{t}, \\ \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq 3|A|^{1/2} \left(\int_0^\tau (f^*(t))^2 dt \right)^{1/2} + N \int_\tau^1 f^*(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гёльдера, получаем следующее:

$$\left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq \|f\|_{L_{p,r}} \left(3|A|^{1/2} \left(\frac{r(p-2)}{p(r-2)} \right)^{(2-r)/(2r)} \tau^{(1/2-1/p)} + N p^{(r-1)/r} \tau^{-1/p} \right).$$

Пусть теперь

$$\tau = \frac{N^2}{|A|((r(p-2))/(p(r-2)))^{(2-r)/r} p^{2((1-r)/r)}}.$$

Тогда получим нужное утверждение.

ЛЕММА 3. Пусть $A = \bigcup_{k=1}^N I_k$, где I_k – отрезки из $\mathbb{Z}$, $f \sim \sum_{m=0}^\infty \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x}$. Тогда для любого $2 < p < \infty$ и $2 < r < \infty$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{|A|^{1/2}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq 6 \left(\frac{p}{p-2} \right)^{(1/p)(1-2/r)} p^{(1-2/p)} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{1/4} N^{1/2-1/p} \|f\|_{L_{2,r}}. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau > 0$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq f^*(\tau), \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad f_0(x) = f(x) - f_1(x).$$

Тогда, так как $1 < p' < 2$, для функции f_0 применим лемму 1, а для функции f_1 – лемму 2, учитывая, что $r > 2$, получим

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_0(m) \right| + \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}_1(m) \right| \\
 &\leq 2 \|f_0\|_{L_{p',r}} \left(\frac{p'(r-2)}{r(2-p')} \right)^{(1/p)((r-2)/r)} \left(\frac{p'}{p'-1} \right)^{(1/r-1)(1-2/p')} |A|^{1/p'} \\
 &\quad + 4 \|f_1\|_{L_{p,r}} \left(\frac{r(p-2)}{p(r-2)} \right)^{(1/p)((2-r)/r)} p^{(1-1/r)(1-2/p)} |A|^{1/p} N^{1/p'-1/p} \\
 &\leq 2 \left(\int_0^\tau (t^{1/p'} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} |A|^{1-1/p} \left(\frac{p}{p-2} \right)^{(1/p)((r-2)/r)} p^{(1-1/r)(1-2/p)} \\
 &\quad + 4 \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t+\tau))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \\
 &\quad \times |A|^{1/p} \left(\frac{p}{p-2} \right)^{(1/p)((r-2)/r)} N^{1/p'-1/p} p^{(1-1/r)(1-2/p)}.
 \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 &\left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t+\tau))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \\
 &\leq \left(\int_0^\tau (t^{1/p} (t+\tau)^{-1/2})^r \frac{dt}{t} \left(\sup_{0 < s < \infty} s^{1/2} f^*(s) \right)^r + \int_\tau^\infty (t^{1/p} f^*(t+\tau))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \\
 &\leq \left(\tau^{(1/p-1/2)r} \frac{p}{2} \|f\|_{L_{2,r}}^r + \tau^{(1/p-1/2)r} \int_\tau^\infty (t^{1/2} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} \\
 &\leq \tau^{(1/p-1/2)} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{1/r} \|f\|_{L_{2,r}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая $2 < r < \infty$, имеем

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq \left(2\tau^{(1/2-1/p)} |A|^{1/p'} + 4\tau^{(1/p-1/2)} |A|^{1/p} N^{1/p'-1/p} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{1/2} \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{p}{p-2} \right)^{(1/p)((r-2)/r)} p^{1-2/p} \|f\|_{L_{2,r}}.
 \end{aligned}$$

Взяв

$$\tau^{(1/2-1/p)} = \left(\left(\frac{N}{|A|} \right)^{1/p'-1/p} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{1/2} \right)^{1/2},$$

имеем утверждение леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $A \subset \mathbb{Z}$ и $1 \leq N = \langle A \rangle_M \leq 8$. В константе из правой части (6) положим $p = 3$. Тогда

$$6N^{1/2-1/p} \left(\frac{p}{p-2} \right)^{(1/p)(1-2/r)} p^{1-2/p} \left(\frac{p+2}{2} \right)^{1/4} < 24.$$

Воспользуемся леммой 3, получим

$$\frac{1}{|A|^{1/2} \log_2(1 + \langle A \rangle_M)^{1/2-1/r}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq 24 \|f\|_{L_{2,r}}.$$

Пусть теперь $A \subset \mathbb{Z}$ и $N = \langle A \rangle_M > 8$ положим

$$p = \frac{2 \log_2(N+1)}{(\log_2(N+1)) - 2}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{p-2}{2p} = \frac{1}{\log_2 N},$$

тогда $p \leq 6$. Заметим также, что

$$N^{1/2-1/p} = N^{1/\log_2(N+1)} \leq 2, \quad p^{2(1-1/r)(1/2-1/p)} \leq 2.$$

Из леммы 3

$$\begin{aligned} \frac{1}{|A|^{1/2}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| &\leq 34 \log_2(1 + \langle A \rangle_M)^{(1/2-1/\log_2(N+1))(1-2/r)} \|f\|_{L_{2,r}} \\ &\leq 34 \log_2(1 + \langle A \rangle_M)^{1/2-1/r} \|f\|_{L_{2,r}}. \end{aligned}$$

Взяв верхнюю точную грань по всем конечным множествам A из $\mathbb{Z}$, получим

$$\sup_{A \subset \mathbb{Z}} \frac{1}{|A|^{1/2} \log_2(1 + \langle A \rangle_M)^{1/2-1/r}} \left| \sum_{m \in A} \widehat{f}(m) \right| \leq 34 \|f\|_{L_{2,r}}.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. В. Бочкарев, “Теорема Хаусдорфа–Юнга–Рисса в пространствах Лоренца и мультипликативные неравенства”, *Теория приближений. Гармонический анализ*, Тр. МИАН, **219**, Наука, М., 1997, 103–114.
- [2] Е. М. Stein, “Interpolation of linear operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 482–492.

Н. Т. Тлеуханова

Евразийский национальный университет

им. Л. Н. Гумилёва, г. Астана

E-mail: enu@enu.kz

Поступило

24.05.2013

Г. К. Мусабаева

E-mail: musabaevagulia@mail.ru