Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Акользин, О задаче Эрдеша–Хайнала для 3-однородных гиперграфов, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 933–935

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10365>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:20:42

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О задаче Эрдеша–Хайнала для 3-однородных гиперграфов

И. А. Акользин

1. Введение и история задачи. В работе исследуется классическая задача экстремальной комбинаторики – задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов.

Сначала напомним основные определения из теории гиперграфов. *Гиперграфом* называется пара $H = (V, E)$, где V – некоторое (как правило, конечное) множество, называемое множеством *вершин гиперграфа*, а $E = E(H)$ – произвольная совокупность подмножеств множества V , называемых *ребрами гиперграфа*. Гиперграф H является *n -однородным*, если каждое его ребро содержит ровно n вершин.

Раскраской вершин гиперграфа $H = (V, E)$ называется отображение $\chi: V \rightarrow \mathbb{N}$. Будем говорить, что ребро $e \in E$ *одноцветное* в χ , если для любых $u, v \in e$ $\chi(u) = \chi(v)$. Также будем говорить, что ребро e *представляет* раскраску χ , если оно одноцветно в χ . Раскраска называется *правильной*, если в ней каждое ребро гиперграфа не является одноцветным. *Хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется минимальное количество цветов, требуемое для правильной раскраски вершин H .

Максимальным множеством независимости гиперграфа H называется максимальное по мощности подмножество вершин, в котором не содержится целиком ни одного ребра гиперграфа. Мощность максимального множества независимости в гиперграфе H называется *числом независимости гиперграфа* и обозначается через $\alpha(H)$.

Одной из центральных задач экстремальной теории гиперграфов является классическая задача Эрдеша–Хайнала (см. [1]). Она формулируется следующим образом: требуется найти величину $m(n, r)$, равную минимально возможному числу ребер гиперграфа в классе n -однородных гиперграфов с хроматическим числом больше r :

$$m(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r\}.$$

Величина $m(n, r)$ конечна. Более того, справедлива следующая простая оценка:

$$m(n, r) \leq \binom{r(n-1)+1}{n}. \quad (1)$$

Для доказательства неравенства (1) достаточно рассмотреть множество вершин мощности $r(n-1)+1$ и множество всех его подмножеств размера n в качестве множества ребер. По принципу Дирихле в любой r -цветной раскраске множества вершин такого гиперграфа обязательно найдется n -элементное одноцветное подмножество, и, значит, его хроматическое число строго больше r .

Первые нетривиальные оценки $m(n, r)$ были получены Эрдешем в 1963–64 гг. с помощью простых вероятностных методов:

$$r^{n-1} \leq m(n, r) \leq \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right). \quad (2)$$

В настоящее время существует большое количество различных асимптотических улучшений оценок (1) и (2) для $m(n, r)$ с помощью продвинутых вероятностных методов. Подробнее с этими результатами можно ознакомиться в обзоре [2]. Наша же работа посвящена исследованию проблемы Эрдеша–Хайнала для малых значений параметров.

2. Задача Эрдеша–Хайнала для малых значений параметров. Для случая графов, т.е. $n = 2$, задача Эрдеша–Хайнала легко решается: $m(2, r) = \binom{r+1}{2}$ (см. [2]). В случае же $n > 2$ на данный момент известны только два значения функции $m(n, r)$. Нетрудно убедиться в том, что $m(3, 2) = 7$. В последнем случае верхнюю оценку дает 3-однородный гиперграф $H = (V, E)$ с семью вершинами и семью ребрами, задаваемый точками плоскости Фано.

Кроме того, известно значение величины $m(4, 2)$, имеющей примечательную историю исследования. Заметим, что неравенства (1) и (2) дают следующие оценки данной величины: $8 \leq m(4, 2) \leq 35$. В дальнейшем они были значительно улучшены. Сначала Тофт в 1975 г. показал, что $m(4, 2) \leq 23$ (см. [3]), затем в 1995 г. Гольдберг и Рассел доказали нижнюю оценку $m(4, 2) \geq 17$ (см. [4]). Их результат так и не был улучшен аналитически, однако проводились попытки определить данную величину с помощью компьютерного перебора. В итоге в 2011 г. Остергард опубликовал статью [5], в которой утверждается, что $m(4, 2) = 23$. Однако, вопрос о том, насколько можно доверять такому доказательству, остается дискуссионным.

В настоящей работе исследуется величина $m(3, 3)$. Основной результат сформулирован в теореме 1.

ТЕОРЕМА 1. *Выполнены неравенства*

$$27 \leq m(3, 3) \leq 35. \quad (3)$$

Оценки (1), (2) устанавливают значение искомой величины в диапазоне $9 \leq m(3, 3) \leq 35$. Таким образом, верхняя оценка в выражении (3) остается неизменной, в то время как нижняя значительно улучшается по сравнению с тривиальной. Далее приведем краткое описание техник, используемых при доказательстве теоремы 1.

3. Идеи доказательства. При исследовании малых размерностей часто используют следующую вспомогательную величину – $m_v(n, r)$ для различных v , где

$$m_v(n, r) = \min\{|E(H)| : H - n\text{-однородный гиперграф, } \chi(H) > r, \\ |V(H)| = v, \forall i, j \in V \exists e \in E: (i, j) \in e\},$$

т.е. $m_v(n, r)$ – это минимальное число ребер n -однородного гиперграфа на v вершинах с хроматическим числом больше r такого, что любые две его вершины соединены ребром.

Для того чтобы понять, как в общем случае можно искать нетривиальные нижние оценки, сформулируем и докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Для любых натуральных n и r выполняется следующее равенство:*

$$m(n, r) = \min_{v > r(n-1)} m_v(n, r). \quad (4)$$

Доказательство. В самом деле, допустим, гиперграф $H = (V, E)$ таков, что $\chi(H) > r$, $|E(H)| = m(n, r)$ и существует пара вершин $i, j \in V$, не лежащая ни в одном из ребер этого гиперграфа. Эти две вершины можно “склеить” в одну, получив гиперграф H' . Тогда, как легко видеть, существование правильной раскраски H' в r цветов означало бы существование правильной раскраски для H , что по предположению невозможно. Значит, $\chi(H') > r$. Более того, $|E(H')| = |E(H)| = m(n, r)$. Продолжая данную процедуру для H' и т.д., получим некоторый гиперграф $\tilde{H}$, в котором любые две вершины соединены ребром, $\chi(\tilde{H}) > r$ и $|E(\tilde{H})| = m(n, r)$. Отсюда следует справедливость (4).

Пусть 3-однородный гиперграф $H = (V, E)$ таков, что любые две вершины соединены ребром и $|V| = v$. Для доказательства теоремы 1 согласно лемме 1 необходимо показать, что $|E| \geq 27$ при любых $v > 6$. В зависимости от соотношений между v , числом независимости $\alpha(H)$ и некоторыми другими характеристиками гиперграфа можно использовать следующие способы оценки числа ребер H .

1) Заметим, что в силу условия на смежность любой пары вершин каждая вершина H должна принадлежать не менее, чем $\lceil (v-1)/(3-1) \rceil$ ребрам. Значит, сумма степеней всех вершин должна быть не менее, чем $v \lceil (v-1)/2 \rceil$, откуда

$$|E(H)| \geq \left\lceil \frac{v}{3} \left\lceil \frac{v-1}{2} \right\rceil \right\rceil. \quad (5)$$

2) При доказательстве нижней оценки в (2) Эрдеш считал отношение общего числа раскрасок к числу раскрасок, представляемых одним ребром. Обобщим данное соображение. Пусть C – некоторое множество раскрасок множества вершин гиперграфа $H = (V, E)$, $e \in E$ – произвольное ребро. Обозначим через $R(C, e)$ количество раскрасок из C , которые представляются ребром e . Тогда получим еще одну нижнюю оценку числа ребер H :

$$|E(H)| \geq \left\lceil \frac{|C|}{\max_{e \in E} R(C, e)} \right\rceil. \quad (6)$$

3) Легко убедиться в том, что для любого гиперграфа $H = (V, E)$ с условиями $|V| = v$ и $\chi(H) > 3$ выполняется неравенство $\alpha(H) < v - 4$. С другой стороны, с уменьшением $\alpha(H)$ растет минимально возможное число ребер H . Напомним, что *числом Турана* $T(m, k, t)$ называется минимальное число ребер t -однородного гиперграфа на m вершинах с числом независимости строго меньше k . Подробнее о числах Турана см., например, обзор [6]. Тогда непосредственно из определения чисел Турана вытекает следующая оценка числа ребер H :

$$|E(H)| \geq T(v, \alpha(H) + 1, 3). \quad (7)$$

Простым применением неравенств (5), (6) и (7) доказывается справедливость оценки $m_3(3, 3) \geq 25$. Используя различные дополнительные рассуждения, связанные с количеством ребер, имеющих одинаковую мощность пересечения с максимальным независимым множеством в гиперграфе, удалось получить следующие нижние оценки величины $m_v(3, 3)$ при различных значениях v .

Таблица. Нижние оценки значений $m_v(3, 3)$

v	7	8	9	10	11	12	13	14	15	> 15
$m_v(3, 3) \geq$	35	28	28	27	27	27	28	33	35	> 35

Применяя лемму 1 к таблице, получаем доказательство теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Erdős, A. Hajnal, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, **12** (1961), 87–123. [2] А. М. Райгородский, Д. А. Шабанов, *УМН*, **66:5**(401) (2011), 109–182. [3] B. Toft, *Infinite and Finite Sets*, Vol. III, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **10**, North-Holland Publ., Amsterdam, 1975, 1445–1457. [4] M. K. Goldberg, H. C. Russell, *Ars Combin.*, **39** (1995), 139–148. [5] P. R. J. Östergård, “On the minimum size of 4-uniform hypergraphs without property B”, *Discrete Appl. Math.* (to appear). [6] A. Sidorenko, *Graphs Combin.*, **11:2** (1995), 179–199.

И. А. Акользин

Московский физико-технический институт
(государственный университет)
E-mail: iakolzin@gmail.com

Поступило
17.01.2013