Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Байдюк, Описание матриц рассеяния унитарных расширений изометрических операторов в пространстве Понтрягина, *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 940–943

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10366>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 18:32:08

Описание матриц рассеяния унитарных расширений изометрических операторов в пространстве Понтрягина

Д. В. Байдюк

1. Введение. Многие задачи анализа, такие как проблема Неванлинны–Пика, проблема моментов и др., сводятся к исследованию некоторого симметрического оператора A в гильбертовом пространстве H . При этом важную роль играет формула Крейна для описания $\mathfrak{L}$ -резольвент, полученная в [1] для симметрического оператора A с конечными индексами дефекта и распространенная в [2] на случай операторов с бесконечными индексами дефекта. Явная формула для $\mathfrak{L}$ -резольвентной матрицы симметрического оператора A в терминах граничных троек была установлена в [3] (для симметрических операторов в пространстве Понтрягина см. [4]).

Аналогом формулы Крейна для $\mathfrak{L}$ -резольвент в случае изометрического оператора V в гильбертовом пространстве является формула описания матриц рассеяния унитарных расширений оператора V , полученная Аровым и Гроссманом в [5]. Формула Арова–Гроссмана послужила основой для построения теории абстрактной интерполяции в работах Кацнельсона, Хейфеца и Юдицкого (см. [6]), включающей в себя большинство известных классических интерполяционных задач.

В работах Маламуда и Могилевского [7], [8] метод граничных операторов был распространен на случай изометрических операторов и применен к задаче описания обобщенных резольвент изометрического оператора V в гильбертовом пространстве. В [9] этот метод получил развитие на случай изометрических операторов, действующих в пространствах Понтрягина Π_κ , и на его основе получено описание обобщенных резольвент изометрических операторов в пространствах Π_κ . В настоящей работе мы применяем эти результаты к описанию матриц рассеяния изометрического оператора V в Π_κ и находим явную формулу для $\mathfrak{L}$ -резольвентной матрицы оператора V . В дальнейшем эта формула будет применена к описанию решений индефинитной абстрактной интерполяционной проблемы и, в частности, к таким задачам, как проблема Неванлинны–Пика и бикасательная интерполяционная проблема в обобщенных классах Шура.

2. Граничные тройки и функция Вейля. Пусть $(\mathcal{H}, [\cdot, \cdot])$ – пространство Понтрягина с отрицательным индексом $\kappa = \text{ind}_- \mathcal{H}$ (см. [10]), $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$ – гильбертовы пространства, $\mathcal{B}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$ – множество ограниченных линейных операторов из $\mathfrak{N}_2$ в $\mathfrak{N}_1$. Пусть V – изометрический оператор из $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$ в $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1$ и $V^{[*]}$ – сопряженное линейное отношение из $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1$ в $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$. Будем сокращенно писать $V^{-[*]} := (V^{[*]})^{-1}$. Заметим, что

$$\text{gr } V = \left\{ \begin{bmatrix} f \\ Vf \end{bmatrix} : f \in \text{dom } V \right\} \subset V^{-[*]}.$$

Обозначим

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| < 1\}, \quad \mathbb{D}_e = \{\lambda \in \mathbb{C} : \|\lambda\| > 1\}, \quad \mathbb{T} = \{\lambda : \|\lambda\| = 1\},$$

$S(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$ – класс Шура сжимающих аналитических в $\mathbb{D}$ оператор-функций со значениями в $\mathcal{B}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Совокупность $\Pi = \{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ назовем *граничной тройкой* изометрического оператора V , если

- 1) отображение $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)^T : V^{-[*]} \rightarrow \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2$ сюръективно;

DOI: 10.4213/mzm10366

© Д. В. Байдюк, 2013

2) справедливо обобщенное тождество Грина

$$[f', g']_{\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1} - [f, g]_{\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2} = (\Gamma_1 \widehat{f}, \Gamma_1 \widehat{g})_{\mathfrak{N}_1} - (\Gamma_2 \widehat{f}, \Gamma_2 \widehat{g})_{\mathfrak{N}_2} \quad (1)$$

для всех

$$\widehat{f} = \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix}, \quad \widehat{g} = \begin{bmatrix} g \\ g' \end{bmatrix} \in V^{-[*]}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ – граничная тройка для изометрии V и $\dim \mathfrak{N}_1 = \dim \mathfrak{L}_1$, $\dim \mathfrak{N}_2 = \dim \mathfrak{L}_2$, то существуют унитарные операторы $X_i: \mathfrak{N}_i \rightarrow \mathfrak{L}_i$, $i = 1, 2$, такие, что совокупность $\{\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2, X_1 \Gamma_1, X_2 \Gamma_2\}$ образует граничную тройку для V . В этом случае граничную тройку для V можно выбрать так, что $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{L}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\iota: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1 \hookrightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$ – оператор вложения и $\widetilde{V}f := \iota Vf$ – изометрия из $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$ в $\mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$, то

$$\widetilde{V}^{-[*]} = V^{-[*]} \dot{+} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} : u \in \mathfrak{L}_2 \ominus \mathfrak{L}_1 \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ – граничная тройка для $V: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1$, то совокупность $\{\widetilde{\mathfrak{N}}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2\}$, где $\widetilde{\mathfrak{N}}_1 = \mathfrak{N}_1 \oplus (\mathfrak{L}_2 \ominus \mathfrak{L}_1)$,

$$\widetilde{\Gamma}_1 \left(\widehat{f} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \widehat{f} \\ u \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\Gamma}_2 \left(\widehat{f} + \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix} \right) = \Gamma_2 \widehat{f}, \quad \widehat{f} \in \widetilde{V}^{-[*]}, \quad u \in \mathfrak{L}_2 \ominus \mathfrak{L}_1,$$

образует граничную тройку для $\widetilde{V}: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$.

Для изометрического оператора $\widetilde{V}$ дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda(\widetilde{V})$ будем определять следующим образом:

$$\mathfrak{N}_\lambda(\widetilde{V}) := \left\{ f_\lambda : \begin{bmatrix} f_\lambda \\ \lambda f_\lambda \end{bmatrix} \in \widetilde{V}^{-[*]} \right\}. \quad (2)$$

В случае гильбертова пространства $\mathcal{H}$ понятие граничной тройки изометрического оператора V введено в работе [7], а в случае пространства Понтрягина – в [11].

3. Теория представлений изометрических операторов. Пусть $P_{\mathcal{H}}$ и $P_{\mathfrak{L}_1}$ – это ортопроекторы на $\mathcal{H}$ и $\mathfrak{L}_1$, а $\widehat{\rho}(P_{\mathcal{H}}V)$ – это множество точек регулярного типа оператора $P_{\mathcal{H}}V$ (см. [13]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем писать, что $\lambda \in \rho(V, \mathfrak{L}_2)$, если $1 \in \widehat{\rho}(\lambda P_{\mathcal{H}}V)$ и

$$(I - \lambda P_{\mathcal{H}}V) \operatorname{dom} V \dot{+} \mathfrak{L}_2 = \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2, \quad (3)$$

$\lambda \in \rho(V^{-1}, \mathfrak{L}_2)$, если $1 \in \widehat{\rho}(\lambda P_{\mathcal{H}}V^{-1})$ и

$$(I - \lambda P_{\mathcal{H}}V^{-1}) \operatorname{ran} V \dot{+} \mathfrak{L}_1 = \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1. \quad (4)$$

Будем писать, что $\lambda \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1)$, если $\lambda \in \rho(V, \mathfrak{L}_2)$, а $\bar{\lambda} \in \rho(V^{-1}, \mathfrak{L}_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. При $\lambda \in \rho(V, \mathfrak{L}_2)$ обозначим $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)$ косой проектор на $\mathfrak{L}_2$ в разложении (3) и введем операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) &:= P_{\mathfrak{L}_2} \widetilde{V} (I - \lambda P_{\mathcal{H}}V)^{-1} (I - \mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)) : \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathfrak{L}_2, \\ \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_1}(\lambda) &:= P_{\mathfrak{L}_1} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda). \end{aligned}$$

Определим также

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} \\ \bar{\lambda}(\mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} - I_{\mathfrak{L}_2}) \end{bmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{L}_i}(\lambda)^{[*]} = \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_i}(\lambda)^{[*]} \\ \bar{\lambda} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_i}(\lambda)^{[*]} + I_{\mathfrak{L}_i} \end{bmatrix}, \quad \text{при } i = 1, 2. \quad (5)$$

При этом

$$\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}(\widetilde{V}) = (\mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} + \bar{\lambda} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]}) \mathfrak{L}_2.$$

ТЕОРЕМА 1. При $\lambda \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1)$ справедливы разложения

$$V^{-[*]} = \text{gr } V + \widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} \mathfrak{L}_2 + \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_1}(\lambda)^{[*]} \mathfrak{L}_1. \quad (6)$$

$$\widetilde{V}^{-[*]} = \text{gr } \widetilde{V} + \widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} \mathfrak{L}_2 + \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)^{[*]} \mathfrak{L}_2. \quad (7)$$

При $\lambda \in \rho(V, \mathfrak{L}_2)$ определим операторы

$$\mathcal{G}(\lambda) := \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_1}(\lambda) \\ I_{\mathfrak{L}_2} - \mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{G}}(\lambda) := \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \\ I_{\mathfrak{L}_2} - \mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\mathcal{V}(\lambda) := \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{L}_1}(\lambda) \\ -\widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{V}}(\lambda) := \begin{bmatrix} \widehat{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \\ -\widehat{\mathcal{P}}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\Pi = \{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ – граничная тройка для $V: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1$, а $\widetilde{\Pi} = \{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \widetilde{\Gamma}_1, \widetilde{\Gamma}_2\}$ – граничная тройка для $\widetilde{V} = \iota V: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2$. Тогда для $\lambda, \mu \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1)$ оператор-функции

$$W(\lambda) := (\Gamma \mathcal{V}(\lambda)^{[*]})^*, \quad \widetilde{W}(\lambda) := (\widetilde{\Gamma} \widetilde{\mathcal{V}}(\lambda)^{[*]})^* \quad (10)$$

удовлетворяют тождествам

$$J_{\mathfrak{L}} - W(\lambda) J_{\mathfrak{N}} W(\mu)^* = (1 - \lambda \bar{\mu}) \mathcal{G}(\lambda) \mathcal{G}(\mu)^{[*]}, \quad (11)$$

$$J_{\widetilde{\mathfrak{L}}} - \widetilde{W}(\lambda) J_{\widetilde{\mathfrak{N}}} \widetilde{W}(\mu)^* = (1 - \lambda \bar{\mu}) \widetilde{\mathcal{G}}(\lambda) \widetilde{\mathcal{G}}(\mu)^{[*]}, \quad (12)$$

где

$$J_{\mathfrak{L}} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}_1} & 0 \\ 0 & -I_{\mathfrak{L}_2} \end{bmatrix}, \quad J_{\mathfrak{N}} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{N}_1} & 0 \\ 0 & -I_{\mathfrak{N}_2} \end{bmatrix},$$

$$J_{\widetilde{\mathfrak{L}}} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}_2} & 0 \\ 0 & -I_{\mathfrak{L}_2} \end{bmatrix}, \quad J_{\widetilde{\mathfrak{N}}} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{N}_2} & 0 \\ 0 & -I_{\mathfrak{N}_2} \end{bmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор-функции $W(\cdot)$ и $\widetilde{W}(\cdot)$, удовлетворяющие тождествам (11) и (12), называются *резольвентными матрицами* операторов V и $\widetilde{V}$ соответственно.

Таким образом, $W(\cdot)$ и $\widetilde{W}(\cdot)$, определенные формулами (10), являются резольвентными матрицами для операторов V и $\widetilde{V}$ соответственно. При этом

$$W(\cdot) = P_{\mathfrak{L}_1 \oplus \mathfrak{L}_2} \widetilde{W}(\cdot) \upharpoonright \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в граничной тройке $\Pi = \{\mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ выполнено $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{L}_2$ и $a \in \mathbb{T} \cap \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1) (\neq \emptyset)$, то, полагая $W(a) = I$, получаем из (11)

$$W(\lambda) = I - (1 - \lambda \bar{a}) \mathcal{G}(\lambda) \mathcal{G}(a)^{[*]} J_{\mathfrak{L}}, \quad \lambda \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1). \quad (13)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $U: \widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}} \oplus \mathfrak{L}_1$ – унитарный оператор, являющийся расширением изометрического оператора $V: \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathcal{H} \oplus \mathfrak{L}_1$, $\widetilde{\mathcal{H}}$ – пространство Понтрягина, содержащее $\mathcal{H}$, такое, что $\text{ind}_- \widetilde{\mathcal{H}} = \text{ind}_- \mathcal{H}$. Оператор-функция $s(\lambda): \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathfrak{L}_1$, определенная в $\mathbb{D} \setminus (\sigma_p(U) \cup \sigma_p(UP_{\mathcal{H}}))^{-1}$ равенством

$$s(\lambda) = P_{\mathfrak{L}_1} (I - \lambda U P_{\mathcal{H}})^{-1} U \upharpoonright \mathfrak{L}_2, \quad (14)$$

называется *матрицей рассеяния* унитарного расширения U изометрического оператора V (см. [5], [11], [9]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $0 \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1)$ матрица-функция

$$W(\lambda) = \begin{bmatrix} w_{11}(\lambda) & w_{12}(\lambda) \\ w_{21}(\lambda) & w_{22}(\lambda) \end{bmatrix}$$

определена равенством (10). Тогда множество матриц рассеяния различных унитарных расширений оператора V описывается формулой

$$s(\lambda) = (w_{12}(\lambda) + w_{11}(\lambda)\varepsilon(\lambda))(w_{22}(\lambda) + w_{21}(\lambda)\varepsilon(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1), \quad (15)$$

где параметр $\varepsilon(\cdot)$ принадлежит классу Шура $S(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$ и удовлетворяет условию $0 \in \rho(w_{22}(0) + w_{21}(0)\varepsilon(0))$.

сжимающих аналитических оператор-функций со значениями в $\mathcal{B}(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_1)$.

Формула (15) следует из аналогичного описания матриц рассеяния для $\tilde{V}$:

$$\tilde{s}(\lambda) = (\tilde{w}_{12}(\lambda) + \tilde{w}_{11}(\lambda)\tilde{\varepsilon}(\lambda))(\tilde{w}_{22}(\lambda) + \tilde{w}_{21}(\lambda)\tilde{\varepsilon}(\lambda))^{-1}, \quad \lambda \in \rho_V(\mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_1), \quad (16)$$

где параметр $\tilde{\varepsilon}(\cdot)$ пробегает множество $S(\mathfrak{N}_2, \mathfrak{N}_2)$, $\tilde{w}_{ij}(\cdot)$ – элементы резольвентной матрицы $\tilde{W}(\cdot)$ для $\tilde{V}$. При доказательстве формулы (16) используется формула для обобщенных резольвент изометрии $\tilde{V}$, доказанная в [9]. Именно это обстоятельство и диктует необходимость рассмотрения расширенного оператора $\tilde{V}$, для которого есть корректное определение дефектного подпространства и спектра, в отличие от оператора V .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В случае гильбертова пространства формула (15) получена в [5]. В [8] эта формула, а также теоремы 1–3 получены методами граничных операторов. В индексном случае теория представлений стандартных (т.е. с невырожденным $\text{dom } V$) изометрических операторов изучалась в [13], [14]. Отметим, что при нашем подходе удастся, во-первых, построить теорию представлений для нестандартных изометрических операторов в Π_κ , а во-вторых, упростить некоторые результаты из [13], в частности, формулу (11) за счет иного определения оператор-функций $\mathcal{P}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)$ и $\mathcal{Q}_{\mathfrak{L}_2}(\lambda)$. Для симметрических операторов соответствующие результаты (теоремы 1–3) получены в [3] и [5].

Автор признателен своему научному руководителю В. А. Деркачу за многочисленные обсуждения и полезные замечания, а также М. М. Маламуду и В. И. Могилевскому за предоставленную рукопись, содержащую доказательства утверждений статьи [7].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Г. Крейн, *Докл. АН СССР*, **52** (1946), 651–654. [2] М. Г. Крейн, Ш. Н. Саакян, *Докл. АН СССР*, **169** (1966), 1269–1272. [3] V. A. Derkach, M. M. Malamud, *J. Funct. Anal.*, **95**:1 (1991), 1–95. [4] V. A. Derkach, *J. Math. Sci. (New York)*, **97**:5 (1999), 4420–4460. [5] Д. З. Аров, Л. З. Гроссман, *Докл. АН СССР*, **270**:1 (1983), 17–20. [6] М. М. Маламуд, В. И. Могилевский, *Матем. заметки*, **73**:3 (2003), 460–465. [7] М. М. Маламуд, В. И. Могилевский, *Докл. РАН*, **395**:1 (2004), 11–17. [8] V. E. Katsnelson, A. Ya. Kheifets, P. M. Yuditskii, *Topics in Interpolation Theory, Oper. Theory Adv. Appl.*, **95**, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997, 283–298. [9] Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов, *Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой*, Наука, М., 1986. [10] Д. В. Байдюк, *Укр. матем. вестн.*, **10**:2 (2013), 176–199. [11] Д. В. Байдюк, *Тр. Крымской осенней матем. школы*, **19** (2009), 1–6. [12] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Т. 1, Вища школа, Харьков, 1977. [13] Г. К. Лангер, *Функц. анализ и его прил.*, **5**:4 (1971), 73–75. [14] H. Langer, P. Sorjonen, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **561** (1974), 3–45.

Д. В. Байдюк

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: baydyuk@gmail.com

Поступило

28.01.2013