Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Васильев, В. М. Хаметов, Е. А. Шелемех, Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай), *Матем. заметки*, 2013, том 94, выпуск 6, 944–948

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10368>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 16:13:13

Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай)

Г. А. Васильев, В. М. Хаметов, Е. А. Шелемех

В данном сообщении устанавливаются условия дискретности экстремальной вероятностной меры на конечномерных пространствах. Эта проблема существует в теории Шоке [1]–[6], стохастической финансовой математике [7]–[9], при построении примеров решения задачи Монжа–Канторовича [10].

Доказательство основного результата статьи не опирается на вышеупомянутые работы.

1. Напомним некоторые обозначения и определения. Пусть $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пространство, а $M(E)$ – множество вероятностных мер на $(E, \mathcal{E})$. Пусть $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ – любая $\mathcal{E}$ -измеримая положительная ограниченная функция. Будем использовать следующие обозначения:

- i) $\text{extr } A$ – множество крайних точек множества A ;
- ii) $I^\mu \triangleq |\text{supp } \mu|$, $\mu \in M(E)$.

2. Для формулировки основного утверждения работы нам потребуются определение и вспомогательное утверждение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вероятностную меру μ^* на $(E, \mathcal{E})$ будем называть *экстремальной* относительно множества вероятностных мер $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$, если для любой $\mathcal{E}$ -измеримой ограниченной функции $f: E \rightarrow \mathbb{R}^+$ справедливо равенство

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{R}} \int_E f(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu^*(dx). \quad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$ вероятностная мера μ^* существует тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}$ – слабо относительно компактное множество.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточность условия в предложении 1 следует из слабой относительно компактности множества $\mathfrak{R}$, определения верхней грани и теоремы Данфорда–Петтиса. Доказательство этого утверждения почти дословно повторяет доказательство теоремы 5 работы [9]. Необходимость – очевидна.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{R} \subseteq M(E)$ такое, что $\sup_{\mu \in \mathfrak{R}} \int_E |x| \mu(dx) < \infty$. Известно [11; § 2, гл. III], что в этом случае $\mathfrak{R}$ – слабо относительно компактное множество и существуют экстремальная относительно него вероятностная мера μ^* и конечный интеграл Лебега $m^* \triangleq \int_E x \mu^*(dx)$.

3. Пусть $D \triangleq \{\gamma \in \mathbb{R}^d : \int_E e^{f(x) - (\gamma, x - m^*)} \mu^*(dx) < \infty\}$. Очевидно, что $D \neq \emptyset$.

Следующее утверждение – это основной результат данной работы.

ТЕОРЕМА 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) Пусть $E = \mathbb{R}^d$, $d < \infty$. Экстремальная относительно множества $\mathfrak{R}$ вероятностная мера μ^* – дискретна тогда и только тогда, когда существует $\gamma^* \in D$ такой, что выполняется неравенство:

$$\int_E e^{f(x) - (\gamma^*, x - m^*)} \mu^*(dx) \leq \int_E e^{f(x) - (\gamma, x - m^*)} \mu^*(dx), \quad (2)$$

где γ – любой из D , при этом $I^{\mu^*} \leq d + 1$.

DOI: 10.4213/mzm10368

2) Пусть E – d -мерный компакт, $d < \infty$. Тогда существует вероятностная мера $\mu^* \in M(E)$ – дискретная, $I^{\mu^*} \leq d + 1$, такая, что справедливы равенства

$$\sup_{\mu \in \mathfrak{R}} \int_E f(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu^*(dx) = \sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i f(x_i), \quad (3)$$

где $x_i \in \text{extr } E$, $1 \leq i \leq I^{\mu^*}$, причем $c_i \triangleq \mu^*(\{x_i\}) > 0$ и $\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i x_i = m^*$, $\sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i = 1$.

4. Данный пункт посвящен доказательству теоремы 1, которое опирается на решение рассматриваемой ниже вспомогательной задачи.

4.1. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\int_E e^{f(x) - (\gamma, x - m^*)} \mu^*(dx) \rightarrow \inf_{\gamma \in D}. \quad (4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решением задачи (4) назовем вектор $\gamma^* \in D$ такой, что

$$v \triangleq \inf_{\gamma \in D} \int_E e^{f(x) - (\gamma, x - m^*)} \mu^*(dx) = \int_E e^{f(x) - (\gamma^*, x - m^*)} \mu^*(dx). \quad (5)$$

4.2. Доказательство утверждений теоремы 1 опирается на разрешимость задачи (4). Нам понадобятся вспомогательные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Решение задачи (4) существует тогда и только тогда, когда выполняется неравенство (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО утверждения предложения 2 очевидно.

Справедливость утверждения 1) теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) γ^* – решение задачи (4);
- 2) любая измеримая ограниченная функция $f(x)$ допускает единственное представление

$$f(x) = \int_E f(x) \mu^*(dx) + (\gamma^*, x - m^*); \quad (6)$$

- 3) μ^* дискретна, причем $I^{\mu^*} \leq d + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3. Импликация из 1) в 2). Пусть $g: E \rightarrow \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ – любая $\mathcal{E}$ -измеримая ограниченная функция. Положим для любого $A \in \mathcal{E}$

$$\mu(A) \triangleq \int_A \frac{g(x)}{\int_E g(x) \mu^*(dx)} \mu^*(dx). \quad (7)$$

Ясно, что

- i) $\mu \neq \mu^*$;
- ii) $\mu \in \mathfrak{R}$.

Заметим, что мера μ^* доминирует любую меру $\tilde{\mu} \in \mathfrak{R}$ и поэтому $\tilde{\mu} \ll \mu^*$. Следовательно, справедливо неравенство

$$v \triangleq \int_E e^{f(x) - (\gamma^*, x - m^*)} \mu^*(dx) \geq \int_E e^{f(x) - (\gamma^*, x - m^*)} \mu(dx),$$

которое с учетом (7) можно переписать в виде

$$\int_E g(x) \exp\{f(x) - (\gamma^*, x - m^*) - \ln v\} \mu^*(dx) \leq \int_E g(x) \mu^*(dx). \quad (8)$$

В силу произвольности измеримой функции $g(x)$ из (8) следует неравенство

$$f(x) - (\gamma^*, x - m^*) - \ln v \leq 0 \quad \mu^* \text{-п.в.}$$

С другой стороны, из (5) имеем равенство

$$\int_E \exp\{f(x) - (\gamma^*, x - m^*) - \ln v\} \mu^*(dx) = 1.$$

Следовательно, μ^* -п.в.

$$f(x) = \ln v + (\gamma^*, x - m^*). \quad (9)$$

Проинтегрируем обе части равенства (9) по мере μ^* . Получим, что $\ln v = \int_E f(x) \mu^*(dx)$. Отсюда следует (6).

Докажем единственность представления (6). Доказательство проведем методом “от противного”. Предположим, что существует $\tilde{\gamma} \in D$, $\tilde{\gamma} \neq \gamma^*$, такой, что μ^* -п.в.

$$f(x) = \int_E f(x) \mu^*(dx) + (\tilde{\gamma}, x - m^*). \quad (10)$$

Вычтем из (10) равенство (6). Получим, что $(\tilde{\gamma} - \gamma^*, x - m^*) = 0$ μ^* -п.в. Из ограниченности $f(x)$ и (6) следует, что $(\gamma^*, x - m^*)^2$ ограничено. Поэтому относительно меры μ^* существует K – ковариационная матрица случайного вектора x . Следовательно,

$$\int_E (\tilde{\gamma} - \gamma^*, x - m^*)^2 \mu^*(dx) = (\tilde{\gamma} - \gamma^*, K(\tilde{\gamma} - \gamma^*)) = 0. \quad (11)$$

Из положительной определенности матрицы K и равенства (11) следует, что мы пришли к противоречию с предположением о том, что $\tilde{\gamma} \neq \gamma^*$. Стало быть, наше предположение неверно и представление (6) единственно.

Импликация из 2) в 3). Сначала сделаем несколько замечаний. Поскольку μ^* – вероятностная мера, то она допускает единственное разложение (см. [12; § 9]): $\mu^* = \alpha \mu^{*c} + (1 - \alpha) \mu^{*d}$, $\alpha \in [0, 1]$, где μ^{*c} – непрерывная вероятностная мера, μ^{*d} – дискретная вероятностная мера. Следовательно, мера μ^{*d} сосредоточена на атомах меры μ^* , которых не более чем счетное число. Поскольку меры μ^{*d} и μ^{*c} сингулярны ([12; § 9]), то существуют $\mathcal{E}$ -измеримые множества B и $\bar{B}$ такие, что:

- i) $B \cup \bar{B} = E$;
- ii) $B \cap \bar{B} = \emptyset$;
- iii) $\mu^{*c}(B) = 1$ ($\mu^{*d}(B) = 0$), $\mu^{*d}(\bar{B}) = 1$ ($\mu^{*c}(\bar{B}) = 0$).

Следовательно, для любого $A \in \mathcal{E}$ справедливы равенства

$$\alpha \mu^{*c}(A) = \mu^*(A \cap B), \quad (1 - \alpha) \mu^{*d}(A) = \mu^*(A \cap \bar{B}), \quad (12)$$

причем $\alpha = \mu^*(B)$, $1 - \alpha = \mu^*(\bar{B})$.

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что для любого $A \in \mathcal{E}$ выполняется равенство

$$\mu^*(A) = \mu^{*d}(A). \quad (13)$$

В силу предположения индикаторы $1_A(x)$, $1_{\bar{B}}(x)$ и $1_{A \cap \bar{B}}(x)$ допускают соответственно единственные представления относительно меры μ^* :

$$1_A(x) = \mu^*(A) + (\gamma^A, x - m^*), \quad 1_{\bar{B}}(x) = \mu^*(\bar{B}) + (\gamma^{\bar{B}}, x - m^*), \quad (14)$$

$$1_{A \cap \bar{B}}(x) = \mu^*(A \cap \bar{B}) + (\gamma^{A \cap \bar{B}}, x - m^*). \quad (15)$$

Так как $1_A(x)1_{\overline{B}}(x) = 1_{A \cap \overline{B}}(x)$, то из (14) и (15) следует равенство μ^* -п.в.

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap \overline{B}) + (\gamma^{A \cap \overline{B}}, x - m^*) &= \mu^*(A)\mu^*(\overline{B}) + \mu^*(A)(\gamma^{\overline{B}}, x - m^*) \\ &+ \mu^*(\overline{B})(\gamma^A, x - m^*) + (\gamma^A, x - m^*)(\gamma^{\overline{B}}, x - m^*). \end{aligned} \quad (16)$$

Равенство (16) выполняется для всех $x \in \text{supp } \mu^*$. Так как m^* – барицентр меры μ^* , то он принадлежит относительной внутренности $\text{supp } \mu^*$. Поэтому положим $x = m^*$. Тогда из (16) следует равенство $\mu^*(A \cap \overline{B}) = \mu^*(A)\mu^*(\overline{B})$. Из этого равенства и (12) следует (13).

Для завершения доказательства этого утверждения осталось заметить, что

- i) поскольку μ^* – дискретная вероятностная мера, то она является выпуклой комбинацией не более чем счетного числа мер Дирака [11; § 2, гл. II], сосредоточенных в различных изолированных точках $x_i \in \text{supp } \mu^* \subseteq E$;
- ii) между мерами Дирака и точками $x_i \in \text{supp } \mu^*$ существует взаимно однозначное соответствие;
- iii) из теоремы Каратеодори [13; § 17, гл. IV] следует, что $I^{\mu^*} \leq d + 1$.

Импликация из 3) в 1). Обозначим $\Phi(\gamma) \triangleq \int_E e^{f(x) - (\gamma, x - m^*)} \mu^*(dx)$. Поскольку мера μ^* дискретная и $I^{\mu^*} \leq d + 1$, то m^* и $\Phi(\gamma)$ допускают, соответственно, представления

$$m^* = \sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i x_i, \quad \Phi(\gamma) = \sum_{i=1}^{I^{\mu^*}} c_i \exp\{f(x_i) - (\gamma, x_i - m^*)\}, \quad (17)$$

где $x_i \in \text{supp } \mu^*$. Из условий теоремы также следует, что:

- i) $D = \mathbb{R}^d$;
- ii) для любого $x \in E$ справедливо неравенство $|f(x)| \leq c$.

Поэтому в силу неравенства Йенсена имеем неравенство

$$\Phi(\gamma) \geq e^{-c} > 0. \quad (18)$$

Перейдем к доказательству импликации. Пусть $I^{\mu^*} = 1$. Тогда из (17) следует, что $m^* = x \in E$. Поэтому любое $\gamma \in \mathbb{R}^d$ является решением задачи (4).

Пусть $1 < I^{\mu^*} \leq d + 1$, а $\Gamma(\mu^*)$ – выпуклая оболочка $\text{supp } \mu^*$. Известно, что m^* принадлежит относительной внутренности $\Gamma(\mu^*)$. Поэтому из (17) следует, что существуют $x_i, x_j \in E$ такие, что $x_i < m^*, x_j > m^*$. Следовательно, $\Phi(\gamma)$ – строго выпуклая, а в силу (18) – ограниченная снизу функция, причем $\Phi(\gamma) \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow \infty$. Поэтому из (17) следует, что для любого ограниченного $\gamma \in D$ справедливы неравенства $\mu^*((\gamma, x - m^*) > 0) > 0$ и $\mu^*((\gamma, x - m^*) < 0) > 0$. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из доказательства импликации из 2) в 3) предложения 3 и единственности представления (6) следует единственность дискретной меры μ^* .

4.3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПУНКТА 2) ТЕОРЕМЫ 1. Из компактности множества E следует, что:

- i) $\mathfrak{K} = M(E)$ – компакт в топологии слабой сходимости вероятностных мер;
- ii) в силу предложения 1 существует вероятностная мера $\mu^* \in M(E)$, которая доминирует любую другую меру $\mu \in M(E)$, следовательно, $\mu \ll \mu^*$ и поэтому μ^* – крайняя точка множества $M(E)$;
- iii) существует $\gamma^* \in D$, для которого справедливо (2).

Поэтому из утверждения предложения 3 следует, что мера μ^* дискретна. Из дискретности меры μ^* следует, что она является выпуклой оболочкой мер Дирака. Как уже отмечалось при доказательстве импликации из 2) в 3) предложения 3, между мерами Дирака и точками $x_i \in \text{supp } \mu^*$ существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому в силу теоремы Каратеодори мера μ^* сосредоточена не более чем в $d+1$ точке. Поскольку мера μ^* крайняя, то ее носитель сосредоточен на $\text{extr } E$. Из вышесказанного следует справедливость (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если $f(x)$ – непрерывная функция, то утверждение пункта 2) теоремы 1 известно. В этом случае интерес представляет новое доказательство этого утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Из утверждения пункта 2) теоремы 1 следует, что носитель меры μ^* сосредоточен на $\text{extr } E$. Легко убедиться в том, что справедливо утверждение, обратное утверждению пункта 2) теоремы 1.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968. [2] П. А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973. [3] R. D. Bourgin, *Geometric Aspects of Convex Sets with the Radon-Nikodým Property*, Lecture Notes in Math., **993**, Springer-Verlag, Berlin, 1983. [4] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 162–176. [5] G. A. Edgar, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 145–161. [6] P. Mankiewicz, *Studia Math.*, **63**:3 (1978), 259–265. [7] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*. Т. 2. Теория, ФАЗИС, М., 1998. [8] Г. Фельмер, А. Шид, *Введение в стохастические финансы. Дискретное время*, МЦНМО, М., 2008. [9] О. В. Зверев, В. М. Хаметов, *Обозр. прикл. и промыш. матем.*, **18**:1 (2011), 26–54. [10] В. И. Богачев, А. В. Колесников, *УМН*, **67**:5(407) (2012), 3–110. [11] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, МЦНМО, М., 2004. [12] Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич, *Интеграл, мера и производная. Общая теория*, Наука, М., 1967. [13] Р. Рокафеллар, *Выпуклый анализ*, Мир, М., 1973.

Г. А. Васильев

Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: math@glebvasiliev.ru

Поступило

22.04.2013

В. М. Хаметов

Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: khametovvm@mail.ru

Е. А. Шелемех

Московский государственный
институт электроники и математики –
Высшая школа экономики
E-mail: letis@mail.ru