Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Проблема “буриданова осла”
в релаксационных системах с одной медленной переменной,
Матем. заметки, 1999, том 65, выпуск 1, 153–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1037>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:11:53

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПРОБЛЕМА “БУРИДАНОВА ОСЛА” В РЕЛАКСАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ С ОДНОЙ МЕДЛЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Рассмотрим релаксационную систему на плоскости, записанную в виде одного скалярного уравнения

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1)$$

где функция $f(x, y) \in C^\infty$ при всех $a \leq x \leq b$, $y \in \mathbb{R}$. Основное ограничение, при котором будет изучаться уравнение (1), касается динамики по параметру x корней уравнения

$$f(x, y) = 0. \quad (2)$$

УСЛОВИЕ 1. Найдется $x_0 \in (a, b)$ такое, что

- 1) при всех $a \leq x < x_0$ уравнение (2) имеет единственный корень $y = \varphi(x)$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) < 0;$$

- 2) при $x_0 < x \leq b$ у этого уравнения появляются еще два корня $y = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$, причем (см. рис. 1)

$$\psi_2(x) < \varphi(x) < \psi_1(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x)) > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, \psi_j(x)) < 0, \quad j = 1, 2;$$

- 3) $\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$.

Кроме того, считаем, что $\varphi(x) \in C^\infty[a, b]$, $\psi_j(x) \in C^\infty(x_0, b]$, $j = 1, 2$.

Рис. 1

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

УСЛОВИЕ 2. Предполагаем, что в точке ветвления (x_0, y_0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) > 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0, y_0) < 0. \quad (4)$$

Следует отметить, что из условия 1 равенства (3) и нестрогие неравенства (4) вытекают автоматически. Поэтому условие 2 характеризует некоторую общность положения. С другой стороны, если некоторая точка (x_0, y_0) удовлетворяет группе ограничений (3), (4), то, опираясь на стандартную теорию ветвления, убеждаемся в существовании в ее окрестности у уравнения (2) решений $y = \varphi(x)$, $x = \psi(y)$ (класса C^∞) таких, что $\varphi(x_0) = y_0$, $\psi(y_0) = x_0$, $\psi'(y_0) = 0$, $\psi''(y_0) > 0$. Таким образом, условие 2 влечет локальное выполнение условия 1: в качестве $y = \psi_j(x)$ здесь следует взять два решения уравнения $\psi(y) = x$ (при фиксированном $x > x_0$).

Обозначим через $y_0(x, \varepsilon)$ решение уравнения (1) с произвольным не зависящим от ε начальным условием $y_0(a, \varepsilon) = A$ и будем интересоваться его асимптотическим поведением на отрезке $1 \leq x \leq b$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Как следует из содержащихся в [1] результатов, при увеличении x сначала происходит асимптотически быстрое "падение" на устойчивую кривую медленного движения $y = \varphi(x)$, а затем движение в ε -окрестности этой кривой вплоть до точки, асимптотически близкой к x_0 (см. рис. 2–4). Далее движение может продолжаться вдоль одной из устойчивых кривых $y = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$ (см. рис. 2, 3), или реализуется случай, показанный на рис. 4. В последнем случае решение $y_0(x, \varepsilon)$ на некотором конечном отрезке $x_0 \leq x \leq x_1$ асимптотически близко к неустойчивой кривой $y = \varphi(x)$, а затем "срывается" на одну из устойчивых кривых $y = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$, т.е. согласно общепринятой терминологии имеем дело с решением-уткой. Однако, как будет ясно из дальнейшего, при некоторой общности положения случай, показанный на рис. 4, не реализуется. Таким образом, на плоскости (x, y) перед траекторией $L(\varepsilon) = (x, y_0(x, \varepsilon))$ при $x \geq x_0$ встает проблема "буриданова осла", заключающаяся в выборе в качестве ее нулевого приближения одной из устойчивых кривых $y = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$, причем на первый взгляд обе возможности представляются равноправными. Решение этой проблемы дается ниже.

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Перед формулировкой основного результата проделаем ряд вспомогательных построений. Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \frac{dy}{dx} = f(x, y) + \mu, \quad |\mu| \ll 1, \quad (5)$$

и подставим в него ряды

$$y = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \quad \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \mu_k. \quad (6)$$

Приравнявая далее в (5) коэффициенты при одинаковых степенях ε , для определения $y_k(x)$, μ_k получаем последовательность уравнений

$$\lambda_0(x) y_k = \Phi_k(x) + \mu_k, \quad (7)$$

где $\lambda_0(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))$, а функция Φ_k зависит только от $y_m(x)$, μ_m с номерами $m \leq k-1$. Предположим, что $y_m(x) \in C^\infty[a, b]$, μ_m , $m \leq k-1$, уже найдены. Тогда, учитывая, что $\lambda_0(x_0) = 0$, $\lambda'_0(x_0) > 0$, и полагая в связи с этим $\mu_k = -\Phi_k(x_0)$, без труда убеждаемся, что определяемая из (7) функция $y_k(x)$ также будет принадлежать классу $C^\infty[a, b]$. Например, при $k = 1$ имеем

$$\mu_1 = \varphi'(x_0), \quad y_1(x) = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(x_0)}{\lambda_0(x)}. \quad (8)$$

Введем в рассмотрение функции

$$y_j^0(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } a \leq x \leq x_0, \\ \psi_j(x) & \text{при } x_0 \leq x \leq b, \end{cases} \quad j = 1, 2.$$

ТЕОРЕМА. Пусть существует натуральное k_0 такое, что $\mu_k = 0$, $k = 1, \dots, k_0 - 1$, $\mu_{k_0} \neq 0$. Тогда равномерно по $a + \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq b$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_0(x, \varepsilon) = y_j^0(x), \quad j = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu_{k_0} < 0, \\ 2 & \text{при } \mu_{k_0} > 0. \end{cases}$$

Сформулированная теорема решает проблему “буриданова осла”, так как знак коэффициента μ_{k_0} определяет “дорогу”, по которой следует двигаться траектории $L(\varepsilon)$ при $x \geq x_0$. В частности, при $k_0 = 1$ выбор “дороги” определяется знаком $\varphi'(x_0)$ (см. (8)).

Для доказательства теоремы снова обратимся к вспомогательному уравнению (5). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. По любым фиксированным числам $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in (\psi_2(b), \psi_1(b))$ можно указать достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ существует единственное значение $\mu_*(\varepsilon)$ параметра μ , при котором уравнение (5) имеет решение $y_*(x, \varepsilon)$, удовлетворяющее крайевым условиям $y|_{x=a} = \alpha$, $y|_{x=b} = \beta$. Кроме того, для $y_*(x, \varepsilon)$, $\mu_*(\varepsilon)$ справедливы асимптотические представления (6), причем первое из них имеет место равномерно по $a + \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq b - \sqrt{\varepsilon}$.

На доказательстве леммы не останавливаемся, отсылая к работе [2], в которой аналогичное утверждение обосновано в близкой ситуации. Отметим только, что в силу (6) $y_*(x, \varepsilon)$ является решением-уткой, а лемма 1 описывает стратегию “охоты на уток”. В связи с этим напомним, что аналогичная стратегия “охоты” описана авторами в докладе [3] в случае, когда уравнение (2) определяет две кривые $y = \varphi_j(x) \in C^\infty[a, b]$, $j = 1, 2$, пересекающиеся общим образом и обменивающиеся устойчивостью в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$.

Возвращаясь к доказательству теоремы, предположим для определенности, что $\mu_{k_0} < 0$. Обозначим через $y(x, \varepsilon, \mu)$ решение уравнения (5) с начальным условием $y(a, \varepsilon, \mu) = A$, а через $y_*(x, \varepsilon)$, $\mu_*(\varepsilon)$ пару функций, доставляемую леммой 1 при $\alpha = A$, $\beta = \varphi(b)$. Положим далее в (5)

$$\mu = \mu_*(\varepsilon) + e^{-z/\varepsilon}, \quad (9)$$

где $z > 0$, и рассмотрим функцию $y(x, z, \varepsilon)$, получающуюся из решения $y(x, \varepsilon, \mu)$ при условии (9).

ЛЕММА 2. Пусть существует точка $x_1 \in (x_0, b)$ такая, что

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda_0(s) ds = z, \quad \int_a^{x_1} \lambda_0(s) ds < 0.$$

Тогда равномерно по $a + \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq x_1 - \sqrt{\varepsilon}$ и по $x_1 + \sqrt{\varepsilon} \leq x \leq b$ имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, z, \varepsilon) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x, z, \varepsilon) = \psi_1(x)$$

соответственно, т.е. наблюдается ситуация, показанная на рис. 4.

Доказательство леммы не приводим, отсылая в очередной раз к статье [2]. Отметим только, что ее условия заведомо выполняются при малых z , причем $x_1 = x_1(z) \rightarrow x_0$ при $z \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Из леммы 2 следует, что при уменьшении параметра z в (9) от значений порядка 1 до $z = \sqrt{\varepsilon}$ точка “срыва” x_1 решения $y(x, z, \varepsilon)$ приближается к x_0 и при $z = \sqrt{\varepsilon}$ приходим к ситуации, показанной на рис. 2. Напомним далее, что $\mu_*(\varepsilon) < 0$ в силу предполагаемого неравенства $\mu_{k_0} < 0$. А отсюда и из очевидного неравенства

$$\frac{\partial y}{\partial \mu}(x, \varepsilon, \mu) \geq 0, \quad a \leq x \leq b,$$

закключаем, что при дальнейшем увеличении параметра μ от значения $\mu_*(\varepsilon) + e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}$ до 0 качественный характер асимптотического поведения решения $y(x, \varepsilon, \mu)$ сохраняется. Теорема доказана.

Нетрудно убедиться, что при $\varphi(x) \equiv y_0$ все коэффициенты второго ряда (6) равны 0 и всегда имеет место ситуация, аналогичная показанной на рис. 4. Срыв же с неустойчивой кривой на одну из кривых $y = \psi_j(x)$, $j = 1, 2$, происходит в точке $x_1 \in (x_0, b)$, где x_1 – корень (если он существует) уравнения

$$\int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}(s, y_0) ds = 0.$$

Подчеркнем также, что основной результат данной статьи естественным образом распространяется и на случай $y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

В заключение проведем сравнение установленных нами здесь утверждений с результатами (являющейся продолжением статьи [4] работы [5]), где исследуется аналогичная проблема. С одной стороны, в [5] рассмотрена более общая, чем у нас, ситуация – когда медленных переменных в исходной сингулярно возмущенной системе несколько (число быстрых переменных принципиальной роли не играет). С другой стороны, в [5] изучен только самый грубый случай, когда выбор одного из двух устойчивых многообразий медленных движений определяется лишь знаком μ_1 . Кроме того, обоснование результатов осуществляется в [5] совершенно иными, чисто аналитическими методами и весьма громоздко.

Нами в настоящей статье изучен только случай одной медленной переменной, для которого, однако, получены более полные результаты. В частности, сформулированная выше теорема дает ответ на вопрос о том, что происходит и при $\mu_1 = 0$. Подчеркнем также, что мы предлагаем новый и более простой путь доказательства, использующий “охоту на уток”.

Считаем своим приятным долгом искренне поблагодарить рецензента этой работы А. И. Нейштадта, любезно обратившего наше внимание на статью [5], которая по нашему недосмотру оказалась до этого нам неизвестной.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1976.
2. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф. // Матем. сб. 1990. Т. 181. № 5. С. 579–588.
3. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. // Дифференц. уравнения. 1996. Т. 32. № 6. С. 853–854.
4. Lebovitz N. R., Schaar R. J. // Stud. Appl. Math. 1975. V. 54. № 3. P. 229–260.
5. Lebovitz N. R., Schaar R. J. // Stud. Appl. Math. 1977. V. 56. № 1. P. 1–50.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
30.07.97