Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лапин, Дифференциальные модули Ли над искривленными крапченными коалгебрами и ∞ -симплициальные модули, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 5, 709–731

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10371>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 03:41:31

Дифференциальные модули Ли над искривленными крашенными коалгебрами и ∞ -симплициальные модули

С. В. Лапин

Введено понятие дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй. Доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй. На основе конструкции дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй и теории двойственности Кошуля для квадратично-скалярных крашенных алгебр введено понятие ∞ -симплициального модуля. Доказана гомотопическая инвариантность структуры ∞ -симплициального модуля.

Библиография: 8 названий.

DOI: 10.4213/mzm10371

В работе [1] при изучении классифицирующих пространств A_∞ -топологических групп было введено понятие A_∞ -симплициального объекта в категории топологических пространств, которое, как отмечено в [1], с соответствующими изменениями переносится в категорию дифференциальных модулей. Под A_∞ -симплициальным объектом в [1] понимается предсимплициальный объект, т.е. объект, имеющий все грани и вырождения, за исключением грани с номером ноль, вместо которой задано семейство отображений, являющееся возмущением грани с номером ноль в смысле теории возмущений цепных комплексов [2]. Основным свойством структуры A_∞ -симплициального объекта является, как показано в [1], инвариантность этой структуры при S -гомотопических эквивалентностях в категории предсимплициальных объектов.

Данная работа посвящена введению на основе конструкции дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй понятия ∞ -симплициального модуля. Это понятие является гомотопически инвариантным аналогом понятия дифференциального симплициального модуля. Введенная в данной работе конструкция ∞ -симплициального модуля отличается от указанной выше конструкции A_∞ -симплициального объекта из работы [1] тем, что в предложенной здесь конструкции возмущению подверглась вся совокупность граней и вырождений, а не только грань с номером ноль. Интерес к разработке понятия ∞ -симплициального модуля был вызван, главным образом, возможностью применения гомотопической техники ∞ -симплициальных модулей к созданию конструкции A_∞ -унитальной A_∞ -алгебры и представления B -конструкции A_∞ -унитальной A_∞ -алгебры как цепной реализации тензорного ∞ -симплициального модуля, определяемого этой A_∞ -

унитальной A_∞ -алгеброй. В свою очередь, интерес к задаче представления B -конструкции A_∞ -унитальной A_∞ -алгебры как цепной реализации определяется тем, что, как показано в [3], представление B -конструкции унитарной ассоциативной алгебры как цепной реализации дает способ введения структуры E_∞ -коалгебры и, в частности, способ задания действия алгебры операций Стиррода на гомологиях этой B -конструкции.

Данная работа состоит из трех разделов. В первом разделе необходимые понятия и конструкции из теории двойственности Кошуля для квадратично-скалярных алгебр [4] переносятся, аналогично тому, как это сделано в [5] для квадратичных алгебр, на случай квадратично-скалярных крашенных алгебр. В частности, введены понятия искривленной крашенной коалгебры, искривленной скрепляющей коцепи и ко- B -конструкции для искривленной крашенной коалгебры, которые являются двойственными крашенными аналогами соответствующих понятий из [4]. Во втором разделе введено понятие дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй, которое является обобщением на случай искривленных крашенных коалгебр понятия дифференциального модуля Ли над искривленной коалгеброй [6] и, в частности, понятия дифференциального модуля Ли над коалгеброй [7]. Доказана гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля Ли над любой искривленной крашенной коалгеброй. Рассмотрены гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над двойственной по Кошулю искривленной крашенной коалгеброй $(R^!, \nabla, \vartheta)$ к любой квадратично-скалярной крашенной алгебре (R, π) . В третьем разделе дано описание двойственной по Кошулю искривленной крашенной коалгебры $(S^!, \nabla, \vartheta)$ к квадратично-скалярной крашенной алгебре симплицальных граней и вырождений (S, π) . Далее введено понятие ∞ -симплициального модуля как дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй $(S^!, \nabla, \vartheta)$ или, что эквивалентно, как дифференциального модуля над ко- B -конструкцией для этой искривленной крашенной коалгебры. Установлена гомотопическая инвариантность структуры дифференциального модуля с ∞ -симплициальными гранями. Дано функциональное описание дифференциальных ∞ -симплициальных модулей как дифференциальных модулей, снабженных структурными семействами отображений. Приведены примеры вычисления структурных соотношений для дифференциальных ∞ -симплициальных модулей.

Все рассматриваемые в работе модули и отображения модулей являются, соответственно, K -модулями и K -линейными отображениями модулей, где K – произвольное коммутативное кольцо с единицей.

1. Двойственные по Кошулю искривленные крашенные коалгебры к квадратично-скалярным крашенным алгебрам

Пусть I – множество целых неотрицательных чисел, каждый элемент которого называется *краской* или, по другому, называется *цветом*.

Крашенными красками из I дифференциальным модулем (X, d) или, более кратко, крашенным дифференциальным модулем называется любое семейство дифференциальных градуированных модулей

$$X = \{X(s, t)_m\}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad d: X(s, t)_\bullet \rightarrow X(s, t)_{\bullet-1},$$

индексированное всеми парами элементов $(s, t) \in I \times I$. В случае, когда для крашенного дифференциального модуля (X, d) выполнено условие $d = 0$ при всех $s, t \in I$, будем говорить, что задан *крашенный градуированный модуль* X .

Отображением крашенных дифференциальных модулей $f: (X, d) \rightarrow (Y, d)$ называется произвольное семейство отображений дифференциальных градуированных модулей $f = \{f(s, t): (X(s, t), d) \rightarrow (Y(s, t), d)\}_{s, t \in I}$. Аналогично вводится понятие гомотопии $h: X_\bullet \rightarrow Y_{\bullet+1}$ между отображениями крашенных дифференциальных модулей $f, g: (X, d) \rightarrow (Y, d)$. Ясно, что крашенные дифференциальные модули и их отображения образуют категорию, в которой очевидным образом определены прямые суммы и прямые произведения объектов, ядра и коядра морфизмов, а также гомологии объектов.

Дифференциальным биградуированным модулем далее будем называть любой дифференциальный биградуированный модуль

$$(X, d), \quad X = \{X_{n,m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad n \geq 0, \quad d: X_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet-1}.$$

Для любых дифференциальных биградуированных модулей (X, d) и (Y, d) определен крашенный дифференциальный модуль $(\text{hom}(X; Y), d)$. Элементами модуля $\text{hom}(X; Y)(s, t)_m$ являются произвольные отображения градуированных модулей $f: X_{t,\bullet} \rightarrow Y_{s,\bullet+m}$ степени $m \in \mathbb{Z}$, и для любых $s, t \in I$ дифференциал

$$d: \text{hom}(X; Y)(s, t)_\bullet \rightarrow \text{hom}(X; Y)(s, t)_{\bullet-1}$$

задается на элементах $f \in \text{hom}(X; Y)(s, t)_m$ следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{s-t+m+1}fd: X_{t,\bullet} \rightarrow Y_{s,\bullet+m-1}.$$

Для произвольных крашенных дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) будем по определению считать, что $X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q = 0$, если $k \neq l$, $p, q \in \mathbb{Z}$, и, что $X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q$ – обычное тензорное произведение, если $k = l$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

Тензорным произведением крашенных дифференциальных модулей (X, d) и (Y, d) называется крашенный дифференциальный модуль $(X \otimes Y, d)$, для которого

$$(X \otimes Y)(s, t)_m = \bigoplus_{\substack{k, l \in I \\ p+q=m}} X(s, k)_p \otimes Y(l, t)_q = \bigoplus_{\substack{k \in I \\ p+q=m}} X(s, k)_p \otimes Y(k, t)_q,$$

и дифференциал $d: (X \otimes Y)(s, t)_\bullet \rightarrow (X \otimes Y)(s, t)_{\bullet-1}$ на произвольном элементе $x \otimes y \in X(s, l)_p \otimes Y(l, t)_q$, определяется следующей формулой:

$$d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{s-l+p}x \otimes d(y).$$

Крашенной дифференциальной алгеброй (A, d, π) называется любой крашенный дифференциальный модуль (A, d) , снабженный умножением $\pi: A \otimes A \rightarrow A$, которое является отображением крашенных дифференциальных модулей и удовлетворяет условию ассоциативности $\pi(\pi \otimes 1) = \pi(1 \otimes \pi)$. Если для крашенной дифференциальной алгебры (A, d, π) выполнено условие $d = 0$, то будем говорить, что задана *крашенная градуированная алгебра* (A, π) .

Отображением $f: (A', d, \pi) \rightarrow (A'', d, \pi)$ крашенных дифференциальных алгебр называется отображение $f: (A', d) \rightarrow (A'', d)$ крашенных дифференциальных модулей, для которого выполнено условие $\pi(f \otimes f) = f\pi$.

Единицей крашенной алгебры (A, π) называют семейство элементов $1_* = \{1_k\}_{k \in I}$, $1_k \in A(k, k)_0$, которые для каждого элемента $a \in A(s, t)_m$, $s, t \in I$, $m \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют условию

$$\pi(1_s \otimes a) = a = \pi(a \otimes 1_t).$$

Примером крашенной дифференциальной алгебры является $(\text{hom}(X; X), d, \pi)$, где $(\text{hom}(X; X), d)$ – рассмотренный выше крашенный дифференциальный модуль, определенный для любого дифференциального биградуированного модуля (X, d) . Умножение $\pi: \text{hom}(X; X) \otimes \text{hom}(X; X) \rightarrow \text{hom}(X; X)$ этой крашенной дифференциальной алгебры задается на произвольных $g \in \text{hom}(X, X)(s, k)_n$ и $f \in \text{hom}(X, X)(l, t)_m$ следующим правилом:

$$\pi(g \otimes f) = \begin{cases} gf \in \text{hom}(X; X)(s, t)_{n+m}, & \text{если } k = l, \\ 0 \in \text{hom}(X; X)(s, t)_{n+m}, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

где $gf: X_{t, \bullet} \rightarrow X_{s, \bullet+n+m}$ – композиция отображения $f: X_{t, \bullet} \rightarrow X_{(l=k), \bullet+m}$ и отображения $g: X_{(k=l), \bullet} \rightarrow X_{s, \bullet+n}$. Ясно, что единицей крашенной дифференциальной алгебры $(\text{hom}(X, X), d, \pi)$ служит семейство элементов $1_* = \{1_s\}_{s \in I}$, где для каждого $s \in I$ элемент $1_s \in \text{hom}(X; X)(s, s)_0$ является тождественным отображением градуированного модуля $X_{s, \bullet}$.

Далее через K_I будем обозначать крашенный красками из I градуированный модуль, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} K_I(s, s)_m &= K, \quad m = 0, s \in I, \\ K_I(s, s)_m &= 0, \quad m \neq 0, \quad s \in I, \quad K_I(s, t)_m = 0, \quad s \neq t, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что умножение в кольце K позволяет рассматривать K_I как крашенную градуированную алгебру (K_I, π) .

При помощи рассмотренной выше операции тензорного произведения крашенных градуированных модулей стандартным путем определяются понятия тензорной алгебры крашенного градуированного модуля, двустороннего идеала крашенной градуированной алгебры, порожденного подмодулем этой крашенной градуированной алгебры, и фактор-алгебры крашенной градуированной алгебры по двустороннему идеалу.

Крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇) называется крашенный градуированный модуль $C = \{C(s, t)_m\}_{s, t \in I, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0}$, рассматриваемый вместе с коумножением $\nabla: C \rightarrow C \otimes C$, которое является отображением крашенных градуированных модулей и удовлетворяет условию $(\nabla \otimes 1)\nabla = (1 \otimes \nabla)\nabla$. Крашенную градуированную коалгебру (C, ∇) , для которой выполнено условие $C_0 = (K_I)_0$, будем называть *связной крашенной градуированной коалгеброй*. Стандартным путем для крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) определяются понятия коединицы $\varepsilon: C \rightarrow K_I$ и коаугментации $\nu: K_I \rightarrow C$.

Легко видеть, что коумножение крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей $\varepsilon: C \rightarrow K_I$ и коаугментацией определяет на крашенном градуированном модуле $\bar{C} = \ker(\varepsilon)$ коумножение $\bar{\nabla}: \bar{C} \rightarrow \bar{C} \otimes \bar{C}$, которое определяется для

произвольного $c \in \overline{C}(s, t)$, $s, t \in I$, формулой $\overline{\nabla}(c) = \nabla(c) - (1_s \otimes c + c \otimes 1_t)$. Таким образом, для каждой крашенной градуированной коалгебры (C, ∇) с коединицей и коаугментацией всегда определена крашенная градуированная коалгебра $(\overline{C}, \overline{\nabla})$ без коединицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Крашенная градуированная алгебра (A, π) с единицей называется *квадратично-скалярной крашенной алгеброй*, если (A, π) изоморфна факторалгебре $R = T(M)/(Q)$, где $T(M)$ – тензорная алгебра некоторого крашенного градуированного модуля $M = \{M(s, t)_m\}_{s, t \in I, m \in \mathbb{Z}, m \geq 0}$, и (Q) – двусторонний идеал крашенной градуированной алгебры $T(M)$, порожденный некоторым подмодулем Q крашенного градуированного модуля $M^{\otimes 2} \oplus K_I$, который удовлетворяет условию $Q \cap K_I = 0$. В случае, когда выполнено условие $Q \subseteq M^{\otimes 2} \subset M^{\otimes 2} \oplus K_I$, квадратично-скалярная крашенная алгебра (A, π) называется *квадратичной крашенной алгеброй*.

Легко видеть, что для произвольной квадратично-скалярной крашенной алгебры $R = T(M)/(Q)$ определена соответствующая ей квадратичная крашенная алгебра $qR = T(M)/(p(Q))$, где $p: T(M) \rightarrow M^{\otimes 2}$ – очевидная проекция крашенных градуированных модулей и $p(Q) = \text{Im}(p: Q \subset T(M) \rightarrow M^{\otimes 2})$.

Для любой квадратично-скалярной крашенной алгебры $R = T(M)/(Q)$ определим отображение крашенных градуированных модулей $\vartheta: p(Q) \rightarrow K_I$, задавая это отображение равенством $\tilde{\vartheta}(x) = 0$, где $x \in p(Q)(s, t)_m$, $s \neq t$, $m \geq 0$, равенством

$$\tilde{\vartheta}(x) = 0, \quad \text{где } x \in p(Q)(s, s)_m, \quad s \in I, \quad m > 0,$$

и равенством

$$\tilde{\vartheta}(x) = k \quad \text{где } x \in p(Q)(s, s)_0, \quad k \in K_I(s, s)_0, \quad s \in I,$$

и $x - k \in Q$ – единственный элемент, для которого $p(x - k) = x$. Очевидно, что при помощи отображения $\tilde{\vartheta}$ все соотношения в алгебре (R, π) записываются в виде $x + \tilde{\vartheta}(x) = 0$, где $x \in p(Q)$.

Ясно, что если квадратично-скалярная крашенная алгебра $R = T(M)/(Q)$ является квадратичной крашенной алгеброй, то $qR = R$ и $\vartheta = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. *Искривленной крашенной коалгеброй* (C, ∇, ϑ) или, более кратко, *крашенной ϑ -коалгеброй*, будем называть градуированную крашенную коалгебру (C, ∇) , рассматриваемую вместе с отображением крашенных градуированных модулей $\vartheta: C_\bullet \rightarrow (K_I)_\bullet$ степени (-2) , которое называется *искривлением* крашенной коалгебры (C, ∇) и удовлетворяет для каждого $c_n \in C(s, t)_n$, $n \geq 2$, $s, t \in I$, условию

$$\vartheta(c'_2)c''_{n-2} = c'_{n-2}\vartheta(c''_2),$$

где элементы $c'_2 \in C(s, s)_2$, $c''_{n-2} \in C(s, t)_{n-2}$ и $c'_{n-2} \in C(s, t)_{n-2}$, $c''_2 \in C(t, t)_2$ определяются при помощи элемента c_n следующим равенством:

$$\nabla(c_n) = \cdots + c'_2 \otimes c''_{n-2} + \cdots + c'_{n-2} \otimes c''_2 + \cdots \in (C \otimes C)(s, t)_n.$$

Под *коединицей* и *коаугментацией* крашенной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) далее будем соответственно понимать коединицу и коаугментацию градуированной крашенной

коалгебры (C, ∇) . Крашенную ϑ -коалгебру (C, ∇, ϑ) будем называть *связной*, если крашенная градуированная коалгебра (C, ∇) является связной.

Отметим, что введенное выше понятие искривленной крашенной коалгебры является крашенным двойственным аналогом градуированного варианта понятия искривленной дифференциальной алгебры из работы [4].

Надстройкой над крашенным градуированным модулем X называется крашенный градуированный модуль SX , определяемый для произвольных $s, t \in I$ формулой $(SX)(s, t)_{m+1} = X(s, t)_m$. Элементы в SX традиционно обозначаются через $[x]$, где $x \in X$. Для любого подмодуля Y крашенного градуированного модуля $X \otimes X$ обозначим через $S^{\otimes 2}Y$ соответствующий Y подмодуль в крашенном градуированном модуле $SX \otimes SX$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. *Двойственной по Кошулю* искривленной крашенной коалгеброй к квадратично-скалярной крашенной алгебре $R = T(M)/(Q)$ будем называть крашенную ϑ -коалгебру $(R^!, \nabla, \vartheta)$ с коединицей ε и коаугментацией ν , задаваемую следующими формулами:

$$\begin{aligned} R^! &= \bigoplus_{k \geq 0} (R^!)^{(k)}, & (R^!)^{(0)} &= K_I, & (R^!)^{(1)} &= SM, \\ (R^!)^{(k)} &= \bigcap_{i+2+j=k} (SM)^{\otimes i} \otimes S^{\otimes 2}p(Q) \otimes (SM)^{\otimes j}, & k &\geq 2, \quad i \geq 0, \quad j \geq 0, \\ \nabla(1_s) &= 1_s \otimes 1_s, & 1_s \in (R^!)^{(0)}(s, s)_0 &= K_I(s, s)_0, \quad s \in I, \\ \nabla([x_1 \otimes \dots \otimes x_k]) &= \sum_{i=1}^{k-1} [x_1, \dots, x_i] \otimes [x_{i+1}, \dots, x_k] + 1_s \otimes [x_1, \dots, x_k] + [x_1, \dots, x_k] \otimes 1_t, \\ [x_1, \dots, x_k] &\in (R^!)^{(k)}(s, t), & s, t &\in I, \\ \vartheta([x_1, \dots, x_k]) &= 0, \quad k \neq 2, & \vartheta([x_1, x_2]) &= \tilde{\vartheta}(x_1 \otimes x_2), \\ \varepsilon(1_s) &= 1_s, & \varepsilon([x_1, \dots, x_k]) &= 0, \quad k \geq 1, & \nu(1_s) &= 1_s, \quad s \in I, \end{aligned}$$

где $[x_1, \dots, x_k] = [x_1] \otimes \dots \otimes [x_k]$ и отображение крашенных градуированных модулей $\tilde{\vartheta}: p(Q) \rightarrow K_I$, определяемое квадратично-скалярной крашенной алгеброй $R = T(M)/(Q)$, было рассмотрено выше.

Проверка условия $\vartheta(c'_2)c''_{n-2} = c'_{n-2}\vartheta(c''_2)$ для искривления $\vartheta: R^!_{\bullet} \rightarrow (K_I)_{\bullet-2}$ крашенной градуированной коалгебры $(R^!, \nabla)$ проводится аналогично тому, как это двойственным образом в некрашенном случае было сделано в [4] (см. также [6]).

Рассмотрим теперь понятие ко- B -конструкции для искривленной крашенной коалгебры с коединицей и коаугментацией.

Денадстройкой над крашенным градуированным модулем X называется крашенный градуированный модуль $S^{-1}X$, определяемый для произвольных $s, t \in I$ формулой $(S^{-1}X)(s, t)_{m-1} = X(s, t)_m$. Элементы в $S^{-1}X$ традиционно обозначаются через $[x]$, где $x \in X$, и имеют размерность $m - 1$, если размерность элемента x равна m .

Пусть задана любая связная крашенная ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией. Кроме того, пусть $(\bar{C}, \bar{\nabla})$ – крашенная градуированная коалгебра без коединицы, определяемая крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Под ко- B -конструкцией для искривленной крашенной градуированной коалгебры (C, ∇, ϑ) будем понимать крашенную дифференциальную алгебру $(F(C, \vartheta), d, \pi)$, которая задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} F(C, \vartheta) &= \bigoplus_{k \geq 0} (S^{-1}\overline{C})^{\otimes k}, \quad (S^{-1}\overline{C})^{\otimes 0} = K_I, \quad d = d_1 + d_2, \\ d_1([c_1, \dots, c_k]) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i+\mu_i} [c_1, \dots, c_{i-1}, \overline{\nabla}(c_i), c_{i+1}, \dots, c_k], \\ \overline{\nabla}(c_i) &= \sum_{(c_i)} c'_i \otimes c''_i \quad (\text{обозначение Свидлера}), \\ d_2([c_1, \dots, c_k]) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1+\nu_{i-1}} \vartheta(c_i)[c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_k], \\ \pi([c_1, \dots, c_q] \otimes [c_{q+1}, \dots, c_k]) &= [c_1, \dots, c_q, c_{q+1}, \dots, c_k], \end{aligned}$$

где $[c_1, \dots, c_k] = [c_1] \otimes \dots \otimes [c_k]$,

$$\begin{aligned} c_j &\in \overline{C}(s_j, t_j)_{q_j}, \quad s_j = t_{j+1}, \quad 1 \leq j \leq k, \\ c'_i &\in \overline{C}(s_i, t'_i)_{q'_i}, \quad \mu_i = s_1 - t'_i + q_1 + \dots + q_{i-1} + q'_i, \\ \nu_{i-1} &= s_1 - t_{i-1} + q_1 + \dots + q_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq k, \end{aligned}$$

и

$$[c_1, \dots, c_{i-1}, \overline{\nabla}(c_i), c_{i+1}, \dots, c_k] = \sum_{(c_i)} [c_1, \dots, c'_i, c''_i, \dots, c_k].$$

Рассмотрим теперь для любой искривленной крашенной коалгебры (C, ∇, ϑ) и произвольной крашенной дифференциальной алгебры (A, d, π) с единицей отображение $\vartheta: C_\bullet \rightarrow (K_I)_{\bullet-2}$ как отображение $\vartheta: C_\bullet \rightarrow (K_I)_{\bullet-2} \subset A_{\bullet-2}$, где вложение $(K_I)_{\bullet-2} \subset A_{\bullet-2}$ определяется при помощи единицы крашенной дифференциальной алгебры (A, d, π) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Искривленной скрещивающей коцепью или, более кратко, скрещивающей ϑ -коцепью из крашенной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) в крашенную дифференциальную алгебру (A, d, π) с единицей будем называть отображение крашенных градуированных модулей $\varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1}$ степени (-1) , для которого выполнено условие скрещивающей ϑ -коцепи

$$d\varphi + \varphi \cup \varphi + \vartheta = 0,$$

где отображение крашенных градуированных модулей $\varphi \cup \varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-2}$ степени -2 определяется формулой $\varphi \cup \varphi = \pi(\varphi \otimes \varphi)\nabla$.

Простым примером скрещивающей ϑ -коцепи из произвольной крашенной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) в крашенную дифференциальную алгебру $(F(C, \vartheta), d, \pi)$ является отображение

$$\varphi^F: C_\bullet \rightarrow F(C, \vartheta)_{\bullet-1}, \quad \varphi^F(c) = [c], \quad c \in C.$$

Без труда проверяется, что для каждой искривленной скрещивающей коцепи $\varphi: C_\bullet \rightarrow A_{\bullet-1}$ из крашенной ϑ -коалгебры (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией

в крашенную дифференциальную алгебру (A, d, π) определено отображение крашенных дифференциальных алгебр $F(\varphi): (F(C, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (A, d, \pi)$, задаваемое на образующих $[c_1, \dots, c_k]$ крашенного градуированного модуля $F(C, \vartheta)$ следующей формулой:

$$F(\varphi)([c_1, \dots, c_k]) = \pi^{(k)}(\varphi(c_1) \otimes \dots \otimes \varphi(c_k)),$$

где $\pi^{(1)}$ – тождественное отображение алгебры A и $\pi^{(k)} = \pi(1 \otimes \pi^{(k-1)})$, $k \geq 2$, – итерированное умножение алгебры A .

Заметим, что для любой квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) имеется скрещивающая ϑ -коцепь $\varphi_{\vartheta}^!: R_{\bullet}^! \rightarrow R_{\bullet-1}$, определяемая следующим правилом:

$$\varphi_{\vartheta}^!([x_1, \dots, x_k]) = \begin{cases} x_1, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k > 0, \end{cases}$$

где $(R^!, \nabla, \vartheta)$ – двойственная по Кошулю крашенная ϑ -коалгебра к квадратично-скалярной крашенной алгебре (R, π) . Из этого следует, что для каждой квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) определено, как было сказано выше, отображение $F(\varphi_{\vartheta}^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d = 0, \pi)$ крашенных дифференциальных алгебр.

2. Дифференциальные модули Ли над искривленными крашенными коалгебрами

Тензорным произведением крашенного дифференциального модуля (X, d) и дифференциального биградуированного модуля (Y, d) далее будем называть дифференциальный биградуированный модуль $(X \otimes Y, d)$, для которого

$$(X \otimes Y)_{n,m} = \bigoplus_{\substack{s \in I \\ p+q=m}} X(n, s)_p \otimes Y_{s,q}, \quad n \in I, \quad m \in \mathbb{Z},$$

и дифференциал $d: (X \otimes Y)_{n,\bullet} \rightarrow (X \otimes Y)_{n,\bullet-1}$ определяется на произвольном элементе $x \otimes y \in X(n, s)_p \otimes Y_{s,q}$ следующей формулой:

$$d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{n-s+p} x \otimes d(y).$$

Левым дифференциальным модулем (X, d, μ) над крашенной дифференциальной алгеброй (A, d, π) или, более кратко, *дифференциальным A -модулем* называется дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , снабженный левым действием $\mu: A \otimes X \rightarrow X$, которое является отображением дифференциальных биградуированных модулей бистепени $(0, 0)$, и удовлетворяет условию $\mu(\pi \otimes 1) = \mu(1 \otimes \mu)$. Двойственным образом вводится понятие дифференциального комодуля (X, d, τ) с левым кодействием $\tau: X \rightarrow C \otimes X$ над крашенной градуированной коалгеброй (C, ∇) .

Легко видеть, что если для любого дифференциального биградуированного модуля (X, d) рассмотреть соответствующую ему крашенную дифференциальную алгебру $(\text{hom}(X; X), d, \pi)$, то введение на (X, d) структуры дифференциального модуля (X, d, μ) над крашенной дифференциальной алгеброй (A, π) эквивалентно заданию некоторого отображения $\check{\mu}: (A, d, \pi) \rightarrow (\text{hom}(X; X), d, \pi)$ крашенных дифференциальных алгебр. В самом деле, отображения μ и $\check{\mu}$ однозначно определяют друг друга по формуле $(\check{\mu}(a))(x) = \mu(a \otimes x)$, где $a \in A$, $x \in X$.

Напомним, что для любых дифференциальных биградуированных модулей (X, d) и (Y, d) определен дифференциальный биградуированный модуль

$$\text{Hom}(X; Y) = \{\text{Hom}(X; Y)_{n,m}\}, \quad n, m \in \mathbb{Z}, \quad d: \text{Hom}(X; Y)_{*,\bullet} \rightarrow \text{Hom}(X; Y)_{*,\bullet-1}.$$

Элементами $\text{Hom}(X; Y)_{n,m}$ являются произвольные отображения биградуированных модулей $f: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+n,\bullet+m}$ бистепени (n, m) , и на элементах $f \in \text{Hom}(X; Y)_{n,m}$ дифференциал $d: \text{Hom}(X; Y)_{n,m} \rightarrow \text{Hom}(X; Y)_{n,m-1}$ задается следующей формулой:

$$d(f) = df + (-1)^{n+m+1} fd: X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*+n,\bullet+m-1}.$$

Пусть заданы любые дифференциальные биградуированные модули (X, d) , (Y, d) и крашенная градуированная коалгебра (C, ∇) . Рассмотрим соответствующий дифференциальным биградуированным модулям $(C \otimes X, 1 \otimes d)$, (Y, d) дифференциальный биградуированный модуль $(\text{Hom}(C \otimes X; Y), d)$ и определим для произвольных дифференциальных биградуированных модулей (X, d) , (Y, d) и (Z, d) отображение биградуированных модулей

$$\cup: (\text{Hom}(C \otimes Y; Z) \otimes \text{Hom}(C \otimes X; Y))_{*,\bullet} \rightarrow \text{Hom}(C \otimes X; Z)_{*,\bullet},$$

полагая $f \cup g = f(1 \otimes g)(\nabla \otimes 1)$, где $f \in \text{Hom}(C \otimes Y; Z)$, $g \in \text{Hom}(C \otimes X; Y)$. Легко проверяется, что $\cup$ – отображение дифференциальных биградуированных модулей и обладает свойством ассоциативности, т.е. для любого $f \in \text{Hom}(C \otimes Y, Z)_{n,m}$ справедливы равенства

$$d(f \cup g) = d(f) \cup g + (-1)^{n+m} f \cup d(g), \quad (f \cup g) \cup l = f \cup (g \cup l).$$

Как было сказано в п. 1, для каждой квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) определено отображение $F(\varphi_g^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d=0, \pi)$ крашенных дифференциальных алгебр, позволяющее рассматривать любой дифференциальный R -модуль как дифференциальный $F(R^!, \vartheta)$ -модуль.

Для описания гомотопических свойств дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей введем понятие дифференциального модуля Ли над искривленной крашенной коалгеброй. Это понятие является обобщением на случай искривленных крашенных коалгебр понятия дифференциального модуля Ли над искривленной коалгеброй [6] и, в частности, дифференциального модуля Ли над градуированной коалгеброй [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Дифференциальным модулем Ли (X, d, ψ) над искривленной крашенной коалгеброй (C, ∇, ϑ) с коаугментацией $\nu: K \rightarrow C$ и коединицей или, более кратко, дифференциальным (C, ϑ) -модулем Ли будем называть произвольный дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , рассматриваемый вместе с отображением $\psi: (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow X_{*,\bullet-1}$, для которого выполнены следующие условия:

$$d(\psi) + \psi \cup \psi + \widehat{\vartheta} = 0, \quad \psi(\nu \otimes 1) = 0,$$

где $\widehat{\vartheta}$ определяются формулой

$$\widehat{\vartheta} = \vartheta \otimes 1: (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow (K_I \otimes X)_{*,\bullet-2} = X_{*,\bullet-2}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Морфизмом $f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли будем называть пару отображений

$$f' : X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet}, \quad f'' : (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet},$$

где f' является отображением дифференциальных биградуированных модулей, и f'' удовлетворяет следующим условиям:

$$d(f'') - f'' \cup \psi + \psi \cup f'' - f' \psi + \psi(1 \otimes f') = 0, \quad f''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Отметим, что следствием условия

$$d(f'') - f'' \cup \psi + \psi \cup f'' - f' \psi + \psi(1 \otimes f') = 0$$

из определения 2.2 является равенство

$$f'' \cup \widehat{\vartheta} - \widehat{\vartheta} \cup f'' = \widehat{\vartheta}(1 \otimes f') - f' \widehat{\vartheta}.$$

Композиция $gf : X \rightarrow Z$ морфизмов дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли

$$f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi), \quad g = (g', g'') : (Y, d, \psi) \rightarrow (Z, d, \psi)$$

определяется следующей формулой:

$$gf = (g', g'')(f', f'') = (g' f', g'' \cup f'' + g''(1 \otimes f') + g' f'').$$

Ясно, что операция композиции морфизмов дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли ассоциативна, и что для каждого дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли (X, d, ψ) имеется тождественный морфизм $1_X = (1'_X, 1''_X) : (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$, где $1'_X = \text{id}_X$ – тождественное отображение модуля X и $1''_X = 0$. Таким образом, дифференциальные (C, ϑ) -модули Ли над любым коммутативным кольцом K с единицей и их морфизмы образуют категорию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Гомотопией $h = (h', h'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли

$$f = (f', f'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi), \quad g = (g', g'') : (X, d, \psi) \rightarrow (Y, d, \psi)$$

назовем пару отображений $h' : X_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+1}$ и $h'' : (C \otimes X)_{*,\bullet} \rightarrow Y_{*,\bullet+1}$, где h' является гомотопией между отображениями дифференциальных биградуированных модулей f' и g' , и h'' удовлетворяет следующим условиям:

$$d(h'') + h'' \cup \psi + \psi \cup h'' + h' \psi + \psi(1 \otimes h') = f'' - g'', \quad h''(\nu \otimes 1) = 0.$$

Ясно, что следствием условия

$$d(h'') + h'' \cup \psi + \psi \cup h'' + h' \psi + \psi(1 \otimes h') = f'' - g''$$

является равенство

$$h'' \cup \widehat{\vartheta} - \widehat{\vartheta} \cup h'' + h' \widehat{\vartheta} - \widehat{\vartheta}(1 \otimes h') = \psi \cup (f'' - g'') - (f'' - g'') \cup \psi.$$

Пусть заданы любые морфизмы $\eta: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi) : \xi$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и пусть задана гомотопия $h: (X, d, \psi) \rightarrow (X, d, \psi)$ между морфизмами дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия

$$\begin{aligned}\eta h &= (\eta', \eta'')(h', h'') = (\eta' h', \eta'' \cup h'' + \eta''(1 \otimes h') + \eta' h'') = (0, 0), \\ h\xi &= (h', h'')(\xi', \xi'') = (h' \xi', h'' \cup \xi'' + h''(1 \otimes \xi') + h' \xi'') = (0, 0), \\ hh &= (h', h'')(h', h'') = (h' h', h'' \cup h'' + h''(1 \otimes h') + h' h'') = (0, 0).\end{aligned}$$

Каждую указанную выше тройку $(\eta: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \psi) : \xi, h)$ будем называть SDR-ситуацией дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть задан любой дифференциальный модуль Ли (X, d, ψ) над связной крашенной ϑ -коалгеброй (C, ∇, ϑ) с коединицей и коаугментацией. Кроме того, пусть задана произвольная SDR-ситуация дифференциальных биградуированных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$. Тогда на дифференциальном биградуированном модуле (Y, d) имеется структура дифференциального (C, ϑ) -модуля Ли $(Y, d, \bar{\psi})$, которая задается формулой

$$\bar{\psi} = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi). \quad (2.1)$$

Более того, формулы

$$\bar{\xi}' = \xi, \quad \bar{\xi}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes \xi), \quad (2.2)$$

$$\bar{\eta}' = \eta, \quad \bar{\eta}'' = \eta \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h), \quad (2.3)$$

$$\bar{h}' = h, \quad \bar{h}'' = h \left(\sum_{n \geq 0} \psi \cup \underbrace{(h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)}_n \right) (1 \otimes h). \quad (2.4)$$

определяют SDR-ситуацию $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \bar{\psi}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сначала, что формула (2.1) действительно определяет отображение. В самом деле, так как крашенная ϑ -коалгебра (C, ∇, ϑ) является связной, и имеет место равенство $\psi(\nu \otimes 1) = 0$, то правая часть равенства (2.1), вычисленная на произвольном элементе, всегда содержит лишь конечное число отличных от нуля слагаемых. Аналогично рассуждения справедливы и для формул (2.2)–(2.4). Покажем теперь, что для отображения $\bar{\psi}$ выполнено соотношение $d(\bar{\psi}) + \bar{\psi} \cup \bar{\psi} + \hat{\vartheta} = 0$. Пользуясь, для краткости, обозначением $(h\psi)^{\cup k} = (h\psi) \cup \dots \cup (h\psi)$ (k сомножителей), получаем

$$\begin{aligned}d(\bar{\psi}) &= \eta \left(\sum_{n \geq 0} d(\psi) \cup (h\psi)^{\cup n} \right) (1 \otimes \xi) \\ &\quad - \eta \left(\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \psi \cup (h\psi)^{\cup(i-1)} \cup (d(h\psi)) \cup (h\psi)^{\cup(n-i)} \right) (1 \otimes \xi).\end{aligned}$$

Так как

$$d(\psi) = -\psi \cup \psi - \widehat{\vartheta}, \quad d(h) = \xi\eta - 1, \quad d(h\psi) = d(h)\psi - hd(\psi),$$

имеем равенство

$$d(h\psi) = \xi\eta\psi - \psi + h(\psi \cup \psi) + h\widehat{\vartheta}.$$

При помощи этого равенства, а также пользуясь формулами

$$\begin{aligned} h(\psi \cup \psi) &= (h\psi) \cup \psi, & \psi \cup (\xi\eta\psi) &= (\psi(1 \otimes \xi)) \cup (\eta\psi), \\ (h\psi) \cup (\xi\eta\psi) &= ((h\psi)(1 \otimes \xi)) \cup (\eta\psi), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} d(\overline{\psi}) &= -\overline{\psi} \cup \overline{\psi} - \eta \left(\sum_{n \geq 0} \widehat{\vartheta} \cup (h\psi)^{\cup n} \right) (1 \otimes \xi) \\ &\quad - \eta \left(\sum_{n \geq 1} \sum_{i=1}^n \psi \cup (h\psi)^{\cup(i-1)} \cup (h\widehat{\vartheta}) \cup (h\psi)^{\cup(n-i)} \right) (1 \otimes \xi). \end{aligned}$$

Так как $\widehat{\vartheta} = \widetilde{\vartheta} \otimes 1$, справедливо равенство

$$h\widehat{\vartheta} \cup h\psi = (h\widehat{\vartheta}(1 \otimes h)) \cup \psi = 0,$$

поскольку

$$h\widehat{\vartheta}(1 \otimes h) = (1_K \otimes h)(\widetilde{\vartheta} \otimes 1)(1 \otimes h) = hh\widehat{\vartheta} = 0.$$

Кроме того, имеют место равенства

$$h\widehat{\vartheta}(1 \otimes \xi) = h\xi\widehat{\vartheta} = 0, \quad \eta(\widehat{\vartheta} \cup (h\psi)) = (\eta\widehat{\vartheta}(1 \otimes h)) \cup \psi = (\eta h\widehat{\vartheta}) \cup \psi = 0.$$

Из этого получаем требуемое соотношение $d(\overline{\psi}) + \overline{\psi} \cup \overline{\psi} + \widehat{\vartheta} = 0$, поскольку справедливо равенство $\eta\widehat{\vartheta}(1 \otimes \xi) = \eta\xi\widehat{\vartheta} = \widehat{\vartheta}$. Легко видеть, что для $\overline{\psi}$ выполнено соотношение $\overline{\psi}(\nu \otimes 1) = 0$. Действительно, из равенства $\psi(\nu \otimes 1) = 0$ следует равенство

$$(h\psi)(1 \otimes \xi)(\nu \otimes 1) = h\psi(\nu \otimes 1)(1 \otimes \xi) = 0,$$

при помощи которого получаем искомое соотношение $\overline{\psi}(\nu \otimes 1) = 0$. Аналогично проверяется, что для морфизмов $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ и гомотопии $\bar{h}$ выполнены требуемые соотношения, и имеет место SDR-ситуация $(\bar{\eta}: (X, d, \psi) \rightleftharpoons (Y, d, \overline{\psi}) : \bar{\xi}, \bar{h})$ дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли.

Рассмотрим применение гомотопической техники дифференциальных (C, ϑ) -модулей Ли к описанию гомотопических свойств дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей, где $(R^!, \nabla, \vartheta)$ – двойственная по Кошулю крашенная ϑ -коалгебра к произвольной квадратично-скалярной крашенной алгебре (R, π) .

Прежде всего заметим, что задание на произвольном дифференциальном биградуированном модуле (X, d) структуры дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля (X, d, μ) эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального $(R^!, \vartheta)$ -модуля Ли

(X, d, ψ) . В самом деле, любой дифференциальный $F(R^1, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) определяет дифференциальный (R^1, ϑ) -модуль Ли (X, d, ψ_μ) со структурным отображением

$$\psi_\mu = \mu(\varphi^F \otimes 1): (R^1 \otimes X)_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1},$$

$\varphi^F: R^1_\bullet \rightarrow F(R^1, \vartheta)_{\bullet-1}$ – скрещивающая ϑ -коцепь из искривленной крашенной коалгебры в крашенную дифференциальную алгебру, задаваемая равенством $\varphi^F(x) = [x]$, $x \in R^1$. Обратно, если задан дифференциальный (R^1, ϑ) -модуль Ли (X, d, ψ) , то его структурное отображение $\psi: (R^1 \otimes X)_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet-1}$ определяет скрещивающую ϑ -коцепь $\tilde{\psi}: R^1_\bullet \rightarrow \text{hom}(X; X)_{\bullet-1}$. Эта скрещивающая ϑ -коцепь индуцирует отображение $\tilde{\mu}_\psi = F(\tilde{\psi}): F(R^1, \vartheta) \rightarrow \text{hom}(X; X)$ крашенных дифференциальных алгебр, которое определяет структурное отображение $\mu_\psi: (F(R^1, \vartheta) \otimes X)_{*, \bullet} \rightarrow X_{*, \bullet}$ дифференциального $F(R^1, \vartheta)$ -модуля (X, d, μ_ψ) .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Для любой квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) под $F(R^1, \vartheta)$ -отображением $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей будем понимать морфизм $f: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ соответствующих дифференциальных (R^1, ϑ) -модулей Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Для произвольной квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) под $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопией $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между $F(R^1, \vartheta)$ -отображениями $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей будем понимать гомотопию $h: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ между морфизмами соответствующих дифференциальных (R^1, ϑ) -модулей Ли $f, g: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$.

Пусть для произвольной квадратично-скалярной крашенной алгебры (R, π) заданы любые $F(R^1, \vartheta)$ -отображения $\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu): \xi$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей, которые удовлетворяют условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана некоторая $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопия $h: (X, d, \mu) \rightarrow (X, d, \mu)$ между $F(R^1, \vartheta)$ -отображениями дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей $\xi\eta$ и 1_X , для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Каждую указанную выше тройку $(\eta: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu): \xi, h)$ будем называть $F(R^1, \vartheta)$ -SDR-ситуацией дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей.

Следующее утверждение, которое является прямым следствием теоремы 2.1, устанавливает $F(R^1, \vartheta)$ -гомотопическую инвариантность структуры дифференциального $F(R^1, \vartheta)$ -модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных биградуированных модулей.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть задан любой дифференциальный $F(R^1, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) , где (R^1, ∇, ϑ) – двойственная по Кошулю крашенная ϑ -коалгебра к произвольной квадратично-скалярной крашенной алгебре (R, π) , и пусть задана любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных биградуированных модулей. Тогда на (Y, d) имеется структура дифференциального $F(R^1, \vartheta)$ -модуля $(Y, d, \mu_{\overline{\psi}})$, которая задается при помощи формулы (2.1). Более того, определена $F(R^1, \vartheta)$ -SDR-ситуация $(\overline{\eta}: (X, d, \mu) \rightleftharpoons (Y, d, \mu_{\overline{\psi}}): \overline{\xi}, \overline{h})$ дифференциальных $F(R^1, \vartheta)$ -модулей, которая определяется при помощи формул (2.2)–(2.4) и продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$.

Важным частным случаем теоремы 2.2 является следующее утверждение, которое основано на том, что каждый дифференциальный модуль над любой квадратично-скалярной крашенной алгеброй (R, π) можно при помощи отображения

крашенных дифференциальных алгебр $F(\varphi_\vartheta^!): (F(R^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (R, d = 0, \pi)$ рассматривать как дифференциальный $F(R^!, \vartheta)$ -модуль.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть задан любой дифференциальный R -модуль (X, d, μ) , где (R, π) – произвольная квадратично-скалярная крашенная алгебра, и задана любая SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных биградуированных модулей. Если рассмотреть дифференциальный R -модуль $(X, d, \mu(F(\varphi_\vartheta^!) \otimes 1))$, то формулы (2.1)–(2.4) задают на (Y, d) структуру дифференциального $F(R^!, \vartheta)$ -модуля $(Y, d, \mu_{\overline{\varphi}})$ и, кроме того, определяют $F(R^!, \vartheta)$ -SDR-ситуацию $(\overline{\eta}: (X, d, \mu(F(\varphi_\vartheta^!) \otimes 1)) \rightleftharpoons (Y, d, \mu_{\overline{\varphi}}) : \overline{\xi}, \overline{h})$ дифференциальных $F(R^!, \vartheta)$ -модулей, которая продолжает SDR-ситуацию дифференциальных биградуированных модулей $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$.

3. Крашенная алгебра симплициальных граней и вырождений и ∞ -симплициальные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Крашенной алгеброй симплициальных граней и вырождений будем называть крашенную градуированную K -алгебру (S, π) , образующими которой являются элементы

$$\partial_i^n \in S(n-1, n)_0, \quad n-1 \in I, \quad s_i^n \in S(n+1, n)_0, \quad n \in I, \quad i \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq i \leq n,$$

связанные между собой соотношениями

$$\partial_i^{n-1} \partial_j^n = \partial_{j-1}^{n-1} \partial_i^n, \quad i < j, \quad n-1 \in I, \quad (3.1)$$

$$s_i^{n+1} s_j^n = s_{j+1}^{n+1} s_i^n, \quad i \leq j, \quad n \in I, \quad (3.2)$$

$$\partial_i^{n+1} s_j^n = \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \partial_i^n, & i < j, \quad n-1 \in I, \\ 1_n, & i = j, \quad i = j+1, \quad n \in I, \\ s_j^{n-1} \partial_{i-1}^n, & i > j+1, \quad n-1 \in I, \end{cases} \quad (3.3)$$

где $1_* = \{1_n\}_{n \in I}$ – единица крашенной алгебры (S, π) и $ab = \pi(a \otimes b)$, $a, b \in (S, \pi)$.

Легко видеть, что (S, π) является квадратично-скалярной крашенной алгеброй. В самом деле, рассмотрим крашенный градуированный модуль M , который определяется следующими условиями:

- 1) $M(s, t)_m = 0$ при $s, t \in I$, $m > 0$,
- 2) $M(s, t)_0 = 0$ при $(s, t) \neq (n-1, n)$, $n-1 \in I$, и $(s, t) \neq (n+1, n)$, $n \in I$,
- 3) $M(n-1, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими ∂_i^n , где $n-1 \in I$, $0 \leq i \leq n$,
- 4) $M(n+1, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими s_i^n , где $n \in I$, $0 \leq i \leq n$.

Рассмотрим теперь в крашенном градуированном модуле $M^{\otimes 2} \oplus K_I$ подмодуль Q , который определяется следующими условиями:

- 1) $Q(s, t)_m = 0$ при $s, t \in I$, $m > 0$,
- 2) $Q(s, t)_0 = 0$ при $(s, t) \neq (n-2, n)$, $n-2 \in I$, $(s, t) \neq (n+2, n)$, $n \in I$, и $(s, t) \neq (n, n)$, $n \in I$.
- 3) $Q(n-2, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими $\partial_i^{n-1} \otimes \partial_j^n - \partial_{j-1}^{n-1} \otimes \partial_i^n$, где $n-2 \in I$, $0 \leq i < j \leq n$.

- 4) $Q(n+2, n)_0$ – свободный K -модуль с образующими $s_i^{n+1} \otimes s_j^n - s_{j+1}^{n+1} \otimes s_i^n$, где $n \in I$, $0 \leq i \leq j \leq n$.
 5) $Q(n, n)_0$ – свободный K -модуль, образующими которого являются элементы

$$\begin{aligned} \partial_{i+1}^{n+1} \otimes s_i^n - 1_n, & \quad n \in I, \quad 0 \leq i \leq n, \\ \partial_i^{n+1} \otimes s_i^n - 1_n, & \quad n \in I, \quad 0 \leq i \leq n, \\ \partial_i^{n+1} \otimes s_j^n - s_{j-1}^{n-1} \otimes \partial_i^n, & \quad n-1 \in I, \quad 0 \leq i < j \leq n, \\ \partial_i^{n+1} \otimes s_j^n - s_j^{n-1} \otimes \partial_{i-1}^n, & \quad n-1 \in I, \quad 1 \leq j+1 < i \leq n+1. \end{aligned}$$

Ясно, что крашенная алгебра симплициальных граней и вырождений (S, π) изоморфна фактор-алгебре $T(M)/(Q)$ и, следовательно, (S, π) является квадратично-скалярной крашенной алгеброй.

Для описания двойственной по Кошулю крашенной ϑ -коалгебры $(S^!, \nabla, \vartheta)$ к квадратично-скалярной крашенной алгебре симплициальных граней и вырождений $S = T(M)/(Q)$ рассмотрим сначала перестановочное отображение крашенных градуированных модулей $T: SM \otimes SM \rightarrow SM \otimes SM$, которое определим на образующих крашенного градуированного модуля $SM \otimes SM$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} T([\partial_i^{n-1}] \otimes [\partial_j^n]) &= \begin{cases} [\partial_{j-1}^{n-1}] \otimes [\partial_i^n], & i < j, \quad n-2 \in I, \\ [\partial_j^{n-1}] \otimes [\partial_{i+1}^n], & i \geq j, \quad n-2 \in I, \end{cases} \\ T([s_i^{n+1}] \otimes [s_j^n]) &= \begin{cases} [s_{j+1}^{n+1}] \otimes [s_i^n], & i \leq j, \quad n \in I, \\ [s_j^{n+1}] \otimes [s_{i-1}^n], & i > j, \quad n \in I, \end{cases} \\ T([\partial_i^{n+1}] \otimes [s_j^n]) &= \begin{cases} [s_{j-1}^{n-1}] \otimes [\partial_i^n], & i < j, \quad n-1 \in I, \\ [s_j^{n-1}] \otimes [\partial_{i-1}^n], & i > j+1, \quad n-1 \in I, \end{cases} \\ T([\partial_{i+1}^{n+1}] \otimes [s_i^n]) &= [\partial_{i+1}^{n+1}] \otimes [s_i^n], \quad i \geq 0, \quad n \in I, \\ T([\partial_i^{n+1}] \otimes [s_i^n]) &= [\partial_i^{n+1}] \otimes [s_i^n], \quad i \geq 0, \quad n \in I, \\ T([s_i^{n-1}] \otimes [\partial_j^n]) &= \begin{cases} [\partial_{j+1}^{n+1}] \otimes [s_i^n], & i < j, \quad n-1 \in I, \\ [s_j^{n+1}] \otimes [s_{i+1}^n], & i \geq j, \quad n-1 \in I. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко видеть, что для отображения T имеет место равенство $T^2 = \text{id}$. Пусть Σ_n – симметрическая группа перестановок чисел $1, 2, \dots, n$. Определим действие произвольной транспозиции $\tau = (k+1, k) \in \Sigma_n$, $1 \leq k \leq n-1$, на крашенном градуированном модуле $(SM)^{\otimes n}$, полагая

$$\tau([a_1] \otimes \dots \otimes [a_n]) = [a_1] \otimes \dots \otimes T([a_k] \otimes [a_{k+1}]) \otimes \dots \otimes [a_n],$$

где $[a_1], \dots, [a_n]$ – любые образующие SM . Стандартная процедура разложения произвольной перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ в произведение $\sigma = \tau_q \dots \tau_1$ транспозиций соседних чисел определяет левое действие $\nu: \Sigma_n \times (SM)^{\otimes n} \rightarrow (SM)^{\otimes n}$ группы Σ_n на крашенном градуированном модуле $(SM)^{\otimes n}$ по следующему правилу:

$$\nu(\sigma, [a_1] \otimes \dots \otimes [a_n]) = \tau_q(\dots(\tau_1([a_1] \otimes \dots \otimes [a_n])) \dots).$$

Ясно, что это действие Σ_n на $(SM)^{\otimes n}$ имеет неподвижные точки. Обозначим для любого элемента $[a_1] \otimes \dots \otimes [a_n] \in (SM)^{\otimes n}$ через $\mathcal{O}([a_1] \otimes \dots \otimes [a_n]) \subset (SM)^{\otimes n}$ орбиту этого элемента относительно указанного выше действия Σ_n на $(SM)^{\otimes n}$.

Отметим, что из определения перестановочного отображения T следует, что для любого элемента $[a_1] \otimes \cdots \otimes [a_k] \in (SM)^{\otimes k}(m, n)$, $m, n \in I$, в его орбите $\mathcal{O}([a_1] \otimes \cdots \otimes [a_k])$ имеется ровно один элемент следующего вида:

$$[\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \otimes \cdots \otimes [\partial_{i_p}^{n+q}] \otimes [s_{j_q}^{n+q-1}] \otimes \cdots \otimes [s_{j_1}^n],$$

где

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p+q = k \geq 1, \quad m = n+q-p, \quad i_1 < \cdots < i_p, \quad j_1 < \cdots < j_q.$$

Элементы такого вида в $(SM)^{\otimes k}$, $k \geq 1$, далее будем называть *упорядоченными элементами*.

Опишем двойственную по Кошулю крашенную ϑ -коалгебру $(S^!, \nabla, \vartheta)$ к квадратично-скалярной крашенной алгебре симплициальных граней и вырождений (S, π) . Легко видеть, что $(S^!)^{(k)}(m, n)_l = 0$, $l \neq k$, $k \geq 1$, $n, m \in I$. Аналогично стандартному вычислению двойственной по Кошулю коалгебры к симметрической алгебре градуированного векторного пространства (см., например, [5]) получаем, что образующими свободного K -модуля $(S^!)^{(k)}(m, n)_k$, $k \geq 1$, $n, m \in I$, являются элементы

$$[\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n] = \sum_{\mathcal{O}(\alpha)} (-1)^\varepsilon [a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}], \quad (3.4)$$

где

$$\alpha = [\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \otimes \cdots \otimes [\partial_{i_p}^{n+q}] \otimes [s_{j_q}^{n+q-1}] \otimes \cdots \otimes [s_{j_1}^n]$$

– любой упорядоченный элемент, $k = p+q$, $m = n+q-p$ и $\mathcal{O}(\alpha) = \{[a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}]\}$
– орбита элемента α . Показатель степени ε в (3.4) задается формулой

$$\varepsilon = \text{sign}([a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}]) = i_1 + \cdots + i_p + j_1 + \cdots + j_q + l_1 + \cdots + l_{p+q},$$

где числа $l_1, \dots, l_{p+q}$ определяются равенством

$$[a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}] = [\nu_{l_1}^{k_1}] \otimes \cdots \otimes [\nu_{l_{p+q}}^{k_{p+q}}],$$

в котором $\nu_{l_i}^{k_i}$ является $\partial_{l_i}^{k_i}$ или $s_{l_i}^{k_i}$, $1 \leq i \leq p+q$, причем $k_{p+q} = n$ и $\nu_{l_1}^{k_1}$ является $\partial_{l_1}^{m+1}$ или $s_{l_1}^{m-1}$. Например, по формуле (3.4) имеем

$$\begin{aligned} [\partial_1^n] \hat{\wedge} [\partial_2^{n+1}] \hat{\wedge} [s_2^n] &= [\partial_1^n] \otimes [\partial_2^{n+1}] \otimes [s_2^n] - [\partial_1^n] \otimes [\partial_1^{n+1}] \otimes [s_2^n] + [\partial_1^n] \otimes [s_1^{n-1}] \otimes [\partial_1^n], \\ [\partial_3^n] \hat{\wedge} [\partial_4^{n+1}] \hat{\wedge} [s_1^n] &= [\partial_3^n] \otimes [\partial_4^{n+1}] \otimes [s_1^n] + [\partial_3^n] \otimes [s_1^{n-1}] \otimes [\partial_3^n] \\ &\quad - [s_1^{n-2}] \otimes [\partial_2^{n-1}] \otimes [\partial_3^n] - [\partial_3^n] \otimes [\partial_3^{n+1}] \otimes [s_1^n] \\ &\quad + [\partial_3^n] \otimes [s_1^{n-1}] \otimes [\partial_2^n] + [s_1^{n-2}] \otimes [\partial_2^{n-1}] \otimes [\partial_2^n] \end{aligned}$$

и

$$[\partial_{i+1}^{n+1}] \hat{\wedge} [s_i^n] = [\partial_{i+1}^{n+1}] \otimes [s_i^n], \quad [\partial_i^{n+1}] \hat{\wedge} [s_i^n] = [\partial_i^{n+1}] \otimes [s_i^n], \quad i \geq 0.$$

Опишем коумножение крашенной градуированной коалгебры $(S^!, \nabla)$. Пусть

$$\alpha = [\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \otimes \cdots \otimes [\partial_{i_p}^{n+q}] \otimes [s_{j_q}^{n+q-1}] \otimes \cdots \otimes [s_{j_1}^n]$$

– любой упорядоченный элемент. Для каждого $\gamma = [a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}] \in \mathcal{O}(\alpha)$ обозначим через $P(\gamma)$ множество всех представлений элемента γ в виде

$$\gamma = ([a_1] \otimes \cdots \otimes [a_z]) \otimes ([a_{z+1}] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}]), \quad 1 \leq z \leq p+q-1,$$

где $[a_1] \otimes \cdots \otimes [a_z]$ и $[a_{z+1}] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}]$ являются упорядоченными элементами. Аналогично стандартному вычислению коумножения в двойственной по Кошулю коалгебре к симметрической алгебре градуированного векторного пространства (см., например, [5]), получаем, что коумножение крашенной коалгебры $(S^!, \nabla)$ задается на образующих

$$\beta = [\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n]$$

модуля

$$(S^!)^{(k)}(m, n)_k, \quad m, n \in I, \quad k \geq 1, \quad p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p+q = k, \quad m = n+q-p,$$

следующей формулой:

$$\begin{aligned} \nabla(\beta) &= 1_{n+q-p} \otimes \beta \\ &+ \sum_{P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))} (-1)^{\text{sign}(\gamma)} ([a_1] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [a_z]) \otimes ([a_{z+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [a_{p+q}]) + \beta \otimes 1_n, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = [\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \otimes \cdots \otimes [\partial_{i_p}^{n+q}] \otimes [s_{j_q}^{n+q-1}] \otimes \cdots \otimes [s_{j_1}^n], \quad \gamma = [a_1] \otimes \cdots \otimes [a_{p+q}].$$

Искривление $\vartheta: S^!_{\bullet} \rightarrow (K_I)_{\bullet-2}$ крашенной градуированной коалгебры $(S^!, \nabla)$ задается на указанных выше образующих кращенного градуированного модуля $S^!$ следующими формулами:

$$\begin{aligned} \vartheta([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n]) &= 0, \quad (p, q) \neq (1, 1), \\ \vartheta([\partial_i^{n+1}] \hat{\wedge} [s_j^n]) &= \begin{cases} 1, & i = j, \quad i = j+1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь ко- B -конструкцию $(F(S^!, \vartheta), d, \pi)$ для двойственной по Кошулю крашенной ϑ -коалгебры $(S^!, \nabla, \vartheta)$ к крашенной алгебре симплицальных граней и вырождений (S, π) . Из данного выше описания структуры крашенной ϑ -коалгебры $(S^!, \nabla, \vartheta)$ следует, что образующими свободной крашенной градуированной алгебры $(F(S^!, \vartheta), \pi)$ являются элементы

$$[[\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n]] \in F(S^!, \vartheta)(n+q-p, n)_{p+q-1},$$

где

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p+q \geq 1, \quad n+q-p \in I, \quad i_1 < \cdots < i_p, \quad j_1 > \cdots > j_q.$$

Дифференциал $d = d_1 + d_2$ на образующих крашенной градуированной алгебры $(F(S^!, \vartheta), \pi)$ задается следующими формулами:

$$\begin{aligned} d_1 &([[\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n]]) \\ &= \sum_{P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))} (-1)^{\text{sign}(\gamma)+1} \pi([a_1] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [a_z]) \otimes ([a_{z+1}] \hat{\wedge} \cdots \hat{\wedge} [a_{p+q}]), \end{aligned}$$

$$d_2([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \wedge \dots \wedge [\partial_{i_p}^{n+q}] \wedge [s_{j_q}^{n+q-1}] \wedge \dots \wedge [s_{j_1}^n]) = 0, \quad (p, q) \neq (1, 1),$$

$$d_2([\partial_i^{n+1}] \wedge [s_j^n]) = \begin{cases} 1, & i = j, i = j + 1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))$ такое же, как и в указанной выше формуле для коумножения ∇ крашенной градуированной коалгебры $(S^!, \nabla)$.

Напомним (см., например, [8]), что *дифференциальным симплициальным модулем* называется дифференциальный биградуированный модуль (X, d) , где $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, рассматриваемый вместе с двумя семействами отображений модулей $\partial_i^n: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$, $s_i^n: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n+1,\bullet}$, $0 \leq i \leq n$, $n \geq 0$, которые являются отображениями дифференциальных модулей, т.е. удовлетворяют условиям

$$d\partial_i^n + \partial_i^n d = 0, \quad ds_i^n + s_i^n d = 0, \quad i \geq 0,$$

и для которых выполнены коммутационные соотношения (3.1)–(3.3) с заменой в этих соотношениях 1_n на 1_{X_n} . Отображения ∂_i^n и s_i^n называются, соответственно, *симплициальными операторами граней* и *симплициальными операторами вырождений* или, более кратко, просто *гранями* и *вырождениями дифференциального биградуированного модуля* X . В случае, когда исключены недоразумения, далее вместо ∂_i^n , s_i^n и 1_{X_n} будем писать просто ∂_i , s_i и 1_X .

Очевидно, что задание на дифференциальном биградуированном модуле (X, d) , где $X = \{X_{n,m}\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$, структуры дифференциального симплициального модуля (X, d, ∂_i, s_j) эквивалентно заданию на (X, d) структуры дифференциального S -модуля (X, d, μ) . Структурное отображение $\mu: S \otimes X \rightarrow X$ этого S -модуля однозначно определяется при помощи отображения крашенных дифференциальных алгебр $\check{\mu}: (S, d = 0, \pi) \rightarrow (\text{hom}(X, X), d, \pi)$, которое задается на образующих ∂_i^n и s_j^n крашенной алгебры (S, π) формулами

$$\check{\mu}(\partial_i^n) = \partial_i: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}, \quad \check{\mu}(s_j^n) = s_j: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n+1,\bullet}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. *Дифференциальным ∞ -симплициальным модулем* или, более кратко, *∞ -симплициальным модулем*, будем называть любой $F(S^!, \vartheta)$ -модуль (X, d, μ) . *Морфизмами ∞ -симплициальных модулей* и *гомотопиями* между ними соответственно будем называть $F(S^!, \vartheta)$ -отображения $F(S^!, \vartheta)$ -модулей и $F(S^!, \vartheta)$ -гомотопии между ними. Под *∞ -SDR-ситуацией ∞ -симплициальных модулей* будет пониматься соответствующая $F(S^!, \vartheta)$ -SDR-ситуация $F(S^!, \vartheta)$ -модулей.

Аналогично дифференциальным симплициальным модулям ∞ -симплициальные модули удобно рассматривать с функциональной точки зрения. Пусть задан любой ∞ -симплициальный модуль (X, d, μ) . При помощи отображения крашенных дифференциальных алгебр $\check{\mu}: (F(S^!, \vartheta), d, \pi) \rightarrow (\text{hom}(X, X), d, \pi)$, которое соответствует структурному отображению μ , определим семейство отображений

$$(\widetilde{\partial s}) = \{(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-p+q, \bullet+p+q-1}\},$$

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad p+q \geq 1, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n+q, \quad n+q-1 \geq j_q > \dots > j_1 \geq 0,$$

$$(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} = \check{\mu}([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \wedge \dots \wedge [\partial_{i_p}^{n+q}] \wedge [s_{j_q}^{n+q-1}] \wedge \dots \wedge [s_{j_1}^n]).$$

Отображения $(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $(\widetilde{\partial s})$ при $q = 0$ будем обозначать через $\partial_{(i_1, \dots, i_p)}$. Отображения $(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $(\widetilde{\partial s})$ при $p = 0$ будем обозначать через $s_{(j_q, \dots, j_1)}$. Из формулы для дифференциала в $(F(S^!, \vartheta), d, \pi)$ следует, что отображения из семейства $(\widetilde{\partial s})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} d((\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}) \\ = \sum_{P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))} (-1)^{\text{sign}(\gamma)+1} (\partial s)_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} (\partial s)_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)}, \quad (p, q) \neq (1, 1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$d((\partial s)_{(i | j)}) = \begin{cases} s_{(j-1)} \partial_{(i)} - \partial_{(i)} s_{(j)}, & i < j, \\ 1 - \partial_{(i)} s_{(j)}, & i = j, \quad i = j + 1, \\ s_{(j)} \partial_{(i-1)} - \partial_{(i)} s_{(j)}, & i > j + 1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где множество $P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))$ является таким же, как и в указанной выше формуле для коумножения ∇ коалгебры $(S^!, \nabla)$, $t + c = p$, $k + d = q$, $\gamma = [a_1] \otimes \dots \otimes [a_{p+q}]$,

$$([a_1] \otimes \dots \otimes [a_z]) \otimes ([a_{z+1}] \otimes \dots \otimes [a_{p+q}]) \in P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha)), \quad 1 \leq z \leq p + q - 1,$$

и

$$\begin{aligned} (\partial s)_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} &= \check{\mu}([a_1] \widehat{\wedge} \dots \widehat{\wedge} [a_z]), & z = t + k, \\ (\partial s)_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)} &= \check{\mu}([a_{t+k+1}] \widehat{\wedge} \dots \widehat{\wedge} [a_{p+q}]), & p + q - z = c + d. \end{aligned}$$

Например, по формуле (3.5) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d((\partial s)_{(2|2,1)}) &= -\partial_{(2)} s_{(2,1)} - (\partial s)_{(2|2)} s_{(1)} + (\partial s)_{(2|1)} s_{(1)}, \\ d((\partial s)_{(1,2|2)}) &= -\partial_{(1)} (\partial s)_{(2|2)} - \partial_{(1,2)} s_{(2)} + \partial_{(1)} (\partial s)_{(1|2)} - (\partial s)_{(1|1)} \partial_{(1)}, \\ d((\partial s)_{(3,4|1)}) &= -\partial_{(3)} (\partial s)_{(4|1)} - \partial_{(3,4)} s_{(1)} \\ &\quad + (\partial s)_{(3|1)} \partial_{(3)} - s_{(1)} \partial_{(2,3)} + \partial_{(3)} (\partial s)_{(3|1)} - (\partial s)_{(3|1)} \partial_{(2)}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что задание ∞ -симплициального модуля (X, d, μ) эквивалентно заданию указанной выше тройки $(X, d, (\widetilde{\partial s}))$, удовлетворяющей соотношениям (3.5) и (3.6). Далее тройку $(X, d, (\widetilde{\partial s}))$ также будем называть ∞ -симплициальным модулем, и соответствующие друг другу тройки (X, d, μ) и $(X, d, (\widetilde{\partial s}))$ будем отождествлять.

Отметим теперь, что частным случаем формулы (3.5) являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d(\partial_{(i)}) &= 0, \quad i \geq 0, & d(\partial_{(i,j)}) &= \partial_{(j-1)} \partial_{(i)} - \partial_{(i)} \partial_{(j)}, \quad i < j, \\ d(s_{(i)}) &= 0, \quad i \geq 0, & d(s_{(i,j)}) &= s_{(j)} s_{(i-1)} - s_{(i)} s_{(j)}, \quad i > j. \end{aligned}$$

Эти соотношения, если их рассматривать вместе с (3.6), говорят о том, что для любого ∞ -симплициального модуля $(X, d, (\widetilde{\partial s}))$ отображения дифференциальных модулей $\partial_{(i)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-1,\bullet}$ и $s_{(j)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n+1,\bullet}$ удовлетворяют с точностью до гомотопий симплициальным коммутационным соотношениям (3.1)–(3.3). Другими словами, четверка $(X, d, \partial_{(i)}, s_{(j)})$ является с точностью до гомотопий дифференциальным симплициальным модулем.

Напомним (см., например, [8]), что отображением дифференциальных симплициальных модулей $f: (X, d, \partial_i, s_j) \rightarrow (Y, d, \partial_i, s_j)$ называется отображение дифференциальных биградуированных модулей $f: (X_{n,\bullet}, d) \rightarrow (Y_{n,\bullet}, d)$, $n \geq 0$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\partial_i f = f \partial_i: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n-1,\bullet}, \quad s_i f = f s_i: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n+1,\bullet}, \quad 0 \leq i \leq n. \quad (3.7)$$

Рассмотрим теперь понятие морфизма ∞ -симплициальных модулей с функциональной точки зрения. Пусть задан произвольный морфизм ∞ -симплициальных модулей $f = (f', f''): (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$. Определим для морфизма $f = (f', f'')$ семейство отображений

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= \{f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-p+q, \bullet+p+q}\}, \\ p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n+q, \quad n+q-1 \geq j_q > \dots > j_1 \geq 0, \end{aligned}$$

полагая $f_{(\emptyset|\emptyset)} = f'(x)$ при $p = 0, q = 0$, и полагая при $p+q \geq 1$

$$f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}(x) = f''(([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \wedge \dots \wedge [\partial_{i_p}^{n+q}] \wedge [s_{j_q}^{n+q-1}] \wedge \dots \wedge [s_{j_1}^n]) \otimes x).$$

Отображения $f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $\tilde{f}$ при $p > 0, q = 0$ будем обозначать через $f_{(i_1, \dots, i_p)}^\partial$. Отображения $f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $\tilde{f}$ при $p = 0, q > 0$, будем обозначать через $f_{(j_q, \dots, j_1)}^s$. Так как для любого ∞ -симплициального модуля (X, d, μ) и каждого $x \in X_{n,\bullet}$ имеет место равенство

$$(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}(x) = \psi_\mu(([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \wedge \dots \wedge [\partial_{i_p}^{n+q}] \wedge [s_{j_q}^{n+q-1}] \wedge \dots \wedge [s_{j_1}^n]) \otimes x),$$

то из определения 2.2 получаем, что отображения из семейства $\tilde{f}$ удовлетворяют соотношениям $d(f_{(\emptyset|\emptyset)}) = 0$ и

$$\begin{aligned} d(f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}) &= -(\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} \\ &+ \sum_{P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))} (-1)^{\text{sign}(\gamma)+1} ((\partial s)_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} f_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)} \\ &- f_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} (\partial s)_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)}), \quad (3.8) \end{aligned}$$

где $p \geq 0, q \geq 0, p+q \geq 1$, и множество $P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))$ и наборы $(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k), (x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)$ являются такими же, как и в формуле (3.5). Например, по формуле (3.8) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d(f_{(1,2|2)}) &= -(\partial s)_{(1,2|2)} f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(1,2|2)} - \partial_{(1)} f_{(2|2)} - \partial_{(1,2)} f_{(2)}^s + \partial_{(1)} f_{(1|2)} \\ &- (\partial s)_{(1|1)} f_{(1)}^\partial + f_{(1)}^\partial (\partial s)_{(2|2)} + f_{(1,2)}^\partial s_{(2)} - f_{(1)}^\partial (\partial s)_{(1|2)} + f_{(1|1)} \partial_{(1)}, \\ d(f_{(i+1|i)}) &= -(\partial s)_{(i+1|i)} f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(i+1|i)} - \partial_{(i+1)} f_{(i)}^s + f_{(i+1)}^\partial s_{(i)}, \quad i \geq 0, \\ d(f_{(i|i)}) &= -(\partial s)_{(i|i)} f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(i|i)} - \partial_{(i)} f_{(i)}^s + f_{(i)}^\partial s_{(i)}, \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что рассмотрение произвольного морфизма ∞ -симплициальных модулей $f: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ эквивалентно рассмотрению указанного выше семейства отображений $\tilde{f}: (X, d, (\partial s)) \rightarrow (Y, d, (\partial s))$, удовлетворяющих соотношениям (3.9).

Далее семейство отображений $\tilde{f}$ также будем называть *морфизмом ∞ -симплициальных модулей*, и соответствующие друг другу морфизмы f и $\tilde{f}$ будем отождествлять.

Отметим теперь, частным случаем формулы (3.8) являются следующие соотношения:

$$d(f_{(i)}^\partial) = -\partial_{(i)}f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)}\partial_{(i)}, \quad d(f_{(i)}^s) = -s_{(i)}f_{(\emptyset|\emptyset)} + f_{(\emptyset|\emptyset)}s_{(i)}, \quad i \geq 0.$$

Эти соотношения говорят о том, что для любого морфизма ∞ -симплициальных модулей $\tilde{f}: (X, d, (\partial s)) \rightarrow (Y, d, (\partial s))$ отображение дифференциальных биградуированных модулей $f_{(\emptyset|\emptyset)}: (X_{n,\bullet}, d) \rightarrow (Y_{n,\bullet}, d)$, $n \geq 0$, удовлетворяет с точностью до гомотопий условиям (3.7). Другими словами, $f_{(\emptyset|\emptyset)}$ является с точностью до гомотопий отображением $f_{(\emptyset|\emptyset)}: (X, d, \partial_{(i)}, s_{(j)}) \rightarrow (Y, d, \partial_{(i)}, s_{(j)})$, заданных с точностью до гомотопий дифференциальных симплициальных модулей.

Под гомотопией между отображениями дифференциальных симплициальных модулей далее будем понимать гомотопию между морфизмами $\mathbb{Z}$ -градуированных цепных комплексов в аддитивной категории симплициальных модулей. Таким образом, гомотопией между отображениями дифференциальных симплициальных модулей $f, g: (X, d, \partial_i, s_j) \rightarrow (Y, d, \partial_i, s_j)$ является произвольная гомотопия $h: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n,\bullet+1}$, $n \geq 0$, между отображениями $f, g: (X_{n,\bullet}, d) \rightarrow (Y_{n,\bullet}, d)$, $n \geq 0$, биградуированных дифференциальных модулей, для которой выполнены следующие условия:

$$\partial_i h + h \partial_i = 0: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n-1,\bullet+1}, \quad s_j h + h s_j = 0: X_{n,\bullet} \rightarrow Y_{n+1,\bullet+1}. \quad (3.9)$$

Рассмотрим теперь понятие гомотопии между морфизмами ∞ -симплициальных модулей с функциональной точки зрения. Пусть задана произвольная гомотопия $h: (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$ между морфизмами ∞ -симплициальных модулей $f = (f', f'')$, $g = (g', g''): (X, d, \psi_\mu) \rightarrow (Y, d, \psi_\mu)$. Определим для гомотопии $h = (h', h'')$ семейство отображений

$$\tilde{h} = \{h_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}: X_{n,\bullet} \rightarrow X_{n-p+q, \bullet+p+q+1}\},$$

$$p \geq 0, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n+q, \quad n+q-1 \geq j_q > \dots > j_1 \geq 0,$$

полагая $h_{(\emptyset|\emptyset)} = h'(x)$ при $p = 0, q = 0$, и полагая при $p+q \geq 1$

$$h_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}(x) = h''([\partial_{i_1}^{n+q-p+1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [\partial_{i_p}^{n+q}] \hat{\wedge} [s_{j_q}^{n+q-1}] \hat{\wedge} \dots \hat{\wedge} [s_{j_1}^n]) \otimes x).$$

Отображения $h_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $\tilde{h}$ при $p > 0, q = 0$ будем обозначать через $h_{(i_1, \dots, i_p)}^\partial$. Отображения $h_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}$ из семейства $\tilde{h}$ при $p = 0, q > 0$, будем обозначать через $h_{(j_q, \dots, j_1)}^s$. Из формулы (3.10) следует, что отображения из семейства $\tilde{h}$ удовлетворяют соотношениям $d(h_{(\emptyset|\emptyset)}) = f_{(\emptyset|\emptyset)} - g_{(\emptyset|\emptyset)}$ и

$$\begin{aligned} d(h_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)}) &= f_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} - g_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} \\ &\quad - (\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} h_{(\emptyset|\emptyset)} - h_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(i_1, \dots, i_p | j_q, \dots, j_1)} \\ &\quad + \sum_{P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))} (-1)^{\text{sign}(\gamma)+1} ((\partial s)_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} h_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)} \\ &\quad \quad \quad + h_{(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)} (\partial s)_{(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)}), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p + q \geq 1$, и множество $P(\gamma \in \mathcal{O}(\alpha))$ и наборы $(l_1, \dots, l_t | m_1, \dots, m_k)$, $(x_1, \dots, x_c | y_1, \dots, y_d)$ являются такими же, как и в формуле (3.5). Например, по формуле (3.10) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} d(h_{(1,2|2)}) &= f_{(1,2|2)} - g_{(1,2|2)} - (\partial s)_{(1,2|2)} h_{(\emptyset|\emptyset)} \\ &\quad - h_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(1,2|2)} - \partial_{(1)} h_{(2|2)} - \partial_{(1,2)} h_{(2)}^s + \partial_{(1)} h_{(1|2)} \\ &\quad - (\partial s)_{(1|1)} h_{(1)}^\partial - h_{(1)}^\partial (\partial s)_{(2|2)} - h_{(1,2)}^\partial s_{(2)} + h_{(1)}^\partial (\partial s)_{(1|2)} - h_{(1|1)} \partial_{(1)}, \\ d(h_{(i|i)}) &= f_{(i|i)} - g_{(i|i)} - (\partial s)_{(i|i)} h_{(\emptyset|\emptyset)} - h_{(\emptyset|\emptyset)} (\partial s)_{(i|i)} - \partial_{(i)} h_{(i)}^s - h_{(i)}^\partial s_{(i)}, \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что задание гомотопии $h: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ между морфизмами ∞ -симплициальных модулей $f, g: (X, d, \mu) \rightarrow (Y, d, \mu)$ эквивалентно заданию указанного выше семейства отображений $\tilde{h}: (X, d, (\partial s)) \rightarrow (Y, d, (\partial s))$, удовлетворяющих соотношениям (3.10). Далее семейство отображений $\tilde{h}$ также будем называть гомотопией между морфизмами ∞ -симплициальных модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: (X, d, (\partial s)) \rightarrow (Y, d, (\partial s))$, и соответствующие друг другу гомотопии h и $\tilde{h}$ будем отождествлять.

Отметим теперь, что частным случаем формулы (3.10) являются равенства

$$\begin{aligned} d(h_{(i)}^\partial) &= f_{(i)}^\partial - g_{(i)}^\partial - \partial_{(i)} h_{(\emptyset|\emptyset)} - h_{(\emptyset|\emptyset)} \partial_{(i)}, \quad i \geq 0, \\ d(h_{(i)}^s) &= f_{(i)}^s - g_{(i)}^s - s_{(i)} h_{(\emptyset|\emptyset)} - h_{(\emptyset|\emptyset)} s_{(i)}, \quad i \geq 0. \end{aligned}$$

Эти равенства имеют хорошую гомотопическую интерпретацию в следующем частном случае. Пусть заданы любые отображения $f, g: (X, d, \partial_i, s_j) \rightarrow (Y, d, \partial_i, s_j)$ дифференциальных симплициальных модулей, которые рассматриваются как морфизмы ∞ -симплициальных модулей $\tilde{f}, \tilde{g}: X \rightarrow Y$, и пусть задана гомотопия $\tilde{h}: X \rightarrow Y$ между $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$. Так как в данном случае $f_{(i)}^\partial = g_{(i)}^\partial = 0$ и $f_{(i)}^s = g_{(i)}^s = 0$, указанные выше равенства переписываются в виде равенств

$$d(h_{(i)}^\partial) = 0 - (\partial_{(i)} h_{(\emptyset|\emptyset)} + h_{(\emptyset|\emptyset)} \partial_{(i)}), \quad d(h_{(i)}^s) = 0 - (s_{(i)} h_{(\emptyset|\emptyset)} + h_{(\emptyset|\emptyset)} s_{(i)}), \quad i \geq 0,$$

которые означают, что отображение $h_{(\emptyset|\emptyset)}$ из семейства $\tilde{h}$ удовлетворяет с точностью до гомотопий условиям (3.9). Таким образом, для любой гомотопии $\tilde{h}$ между отображениями дифференциальных симплициальных модулей f и g , рассматриваемых как морфизмы ∞ -симплициальных модулей, отображение $h_{(\emptyset|\emptyset)}$ является с точностью до гомотопий гомотопией между отображениями дифференциальных симплициальных модулей $f, g: (X, d, \partial_i, s_j) \rightarrow (Y, d, \partial_i, s_j)$.

Установим теперь гомотопическую инвариантность структуры ∞ -симплициального модуля при гомотопических эквивалентностях типа SDR-ситуаций дифференциальных биградуированных модулей. Если применить теорему 2.2 к квадратично-скалярной крашенной алгебре граней и вырождений (S, π) , то получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть заданы любой ∞ -симплициальный модуль $(X, d, (\partial s))$ и произвольная SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d): \xi, h)$ дифференциальных биградуированных модулей. Тогда на (Y, d) имеется структура ∞ -симплициального модуля $(Y, d, (\partial s))$, задаваемая при помощи формулы (2.1). Более того, формулы (2.2)–(2.4)

определяют ∞ -SDR-ситуацию $(\tilde{\eta}: (X, d, (\widetilde{\partial s})) \rightleftharpoons (Y, d, (\widetilde{\partial s})) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$ дифференциальных ∞ -симплициальных модулей, которая продолжает заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть заданы любой дифференциальный симплициальный модуль (X, d, ∂_i, s_j) и произвольная SDR-ситуация $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$ дифференциальных биградуированных модулей. Если рассмотреть (X, d, ∂_i, s_j) как дифференциальный S -модуль (X, d, μ) , и считать этот S -модуль ∞ -симплициальным модулем $(X, d, \mu(F(\varphi_{\partial}^!) \otimes 1))$, то формулы (2.1)–(2.4) задают на (Y, d) структуру дифференциального ∞ -симплициального модуля $(Y, d, \mu_{\overline{\varphi}})$ и определяют ∞ -SDR-ситуацию $(\overline{\eta}: (X, d, \mu(F(\varphi_{\partial}^!) \otimes 1)) \rightleftharpoons (Y, d, \mu_{\overline{\varphi}}) : \overline{\xi}, \overline{h})$ дифференциальных ∞ -симплициальных модулей, продолжающую заданную SDR-ситуацию $(\eta: (X, d) \rightleftharpoons (Y, d) : \xi, h)$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Смирнов, “ A_{∞} -симплициальные объекты и A_{∞} -топологические группы”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 913–919.
- [2] V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe, J. D. Stasheff, “Perturbation theory in differential homological algebra. II”, *Illinois J. Math.*, **35**:3 (1991), 357–373.
- [3] В. А. Смирнов, “Гомологии B -конструкций и ко- B -конструкций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 80–96.
- [4] Л. Е. Посицельский, “Неоднородная квадратичная двойственность и кривизна”, *Функц. анализ и его прил.*, **27**:3 (1993), 57–66.
- [5] J.-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren Math. Wiss., **346**, Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [6] С. В. Лапин, “Гомотопические свойства дифференциальных модулей Ли над искривленными коалгебрами и двойственность по Кошулю”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 354–372.
- [7] В. А. Смирнов, “Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:3 (1998), 121–154.
- [8] В. А. Смирнов, *Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии*, Факториал, М., 2002.

С. В. Лапин
E-mail: slapin@mail.ru

Поступило
 03.09.2013