Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν -поперечники классов функций на прямой, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 827–848

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10372>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 16:12:34

Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями экспоненциального типа и средние ν -поперечники классов функций на прямой

С. Б. Вакарчук

На классах $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{Z}_+$, вычислены оценки сверху и снизу величин

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) := \sup \left\{ \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) / \left(\int_0^t \omega_k^p(f^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right)^{1/p} : f \in L_2^r(\mathbb{R}) \right\},$$

где $\mu, r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \leq r$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/\sigma$, ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0, t]$ функция, не эквивалентная нулю. В случаях $\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(1, t)$, где $\mu \in \mathbb{N}$, $1/\mu \leq p \leq 2$, и $\chi_{\sigma,k,r,\mu,2/k}(1, t)$, где $0 < t \leq \pi/(2\sigma)$, получены точные значения указанных величин. Также найдены точные значения средних ν -поперечников классов функций, определенных при помощи модуля непрерывности ω^* и мажоранты Ψ .

Библиография: 32 названия.

DOI: 10.4213/mzm10372

1. Введение

Пусть $L_2(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R} := \{x : -\infty < x < \infty\}$, есть пространство всех измеримых на действительной оси вещественных функций f , квадрат модуля которых интегрируем по Лебегу на любом конечном промежутке, а норма $\|f\| := \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} < \infty$. Под $L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{N}$, понимаем класс функций $f \in L_2(\mathbb{R})$, у которых производные $(r-1)$ -го порядка $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} \equiv f$) локально абсолютно непрерывны, а производные r -го порядка $f^{(r)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$. Отметим, что $L_2^r(\mathbb{R})$ является банаховым пространством с нормой $\|f\| + \|f^{(r)}\|$. При этом полагаем $L_2^0(\mathbb{R}) \equiv L_2(\mathbb{R})$. Через $B_{\sigma,2}$, где $0 < \sigma < \infty$, обозначим множество сужений на $\mathbb{R}$ всех целых функций экспоненциального типа σ , принадлежащих пространству $L_2(\mathbb{R})$. Для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ величину $\mathcal{A}_\sigma(f) := \inf \{\|f - g\| : g \in B_{\sigma,2}\}$, $0 < \sigma < \infty$, называют *наилучшим приближением* f элементами подпространства $B_{\sigma,2}$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. При этом для любого класса $\mathfrak{M} \subset L_2(\mathbb{R})$ полагают

$$\mathcal{A}_\sigma(\mathfrak{M}) := \sup \{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in \mathfrak{M}\}.$$

Напомним, что начало исследований, связанным с аппроксимацией функций, заданных на всей вещественной оси $\mathbb{R}$, было положено в работах Бернштейна (см.,

например, [1]), а средством приближения послужило подпространство целых функций конечного экспоненциального типа. В дальнейшем различные аспекты теории аппроксимации функций на $\mathbb{R}$ целыми функциями экспоненциального типа нашли свое отражение в работах Ахиезера, А. Ф. Тимана, М. Ф. Тимана, Никольского, Ибрагимова, Насибова, Попова, Лигуна, Бабенко, Арестова и других (см., например, [2]–[16]). Приведем некоторые из перечисленных результатов, касающихся вычисления окончательных в том или ином смысле соотношений, содержащих величины наилучших приближений $\mathcal{A}_\sigma(f)$ и модули непрерывности рассматриваемых функций. Отметим, что *модулем непрерывности k -го порядка функции $f \in L_2(\mathbb{R})$* называют величину

$$\omega_k(f, t) := \sup\{\|\Delta_h^k(f)\| : |h| \leq t\}, \quad \text{где } k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq t < \infty,$$

а

$$\Delta_h^k(f, x) := \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x + jh)$$

– *конечная разность k -го порядка функции f в точке x с шагом h* .

Ибрагимов и Насибов [7] показали, что для любого $0 < \sigma < \infty$ и произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_1\left(f, \frac{\pi}{\sigma}\right), \quad (1.1)$$

в котором константа $1/\sqrt{2}$ неулучшаема.

Попов в работе [8] отметил, что для любой функции $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, где $r \in \mathbb{Z}_+$, при $0 < \sigma < \infty$ имеет место соотношение

$$\mathcal{A}_\sigma(f) < \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^r} \left\{ \frac{\sigma}{2} \int_0^{\pi/\sigma} \omega_1^2(f^{(r)}, t) \sin \sigma t \, dt \right\}^{1/2}. \quad (1.2)$$

При этом для любого фиксированного $\sigma \in (0, \infty)$ константа $1/(\sqrt{2}\sigma^r)$ на рассматриваемом классе $L_2^r(\mathbb{R})$ является неулучшаемой. Из неравенства (1.2) при $r = 0$ следует оценка сверху в (1.1). В [8] для произвольной функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ также было получено неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) < \eta_{\sigma,k} \left\{ \int_0^{2\pi/\sigma} \omega_k^2(f, t) \varphi_\sigma(t) \, dt \right\}^{1/2}, \quad (1.3)$$

где $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq \sigma < \infty$,

$$\varphi_\sigma(t) := \sin\left(\sigma \frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin \sigma t, \quad \eta_{\sigma,k} := \frac{1}{2} \sqrt{\sigma(C_{2k}^k)^{-1}},$$

в котором константа $\eta_{\sigma,k}$ неулучшаема на $L_2(\mathbb{R})$ для любых фиксированных значений k и $\sigma > k$. В качестве следствия из соотношения (1.3) получаем неравенство

$$\mathcal{A}_\sigma(f) < (C_{2k}^k)^{-1} \omega_k\left(f, \frac{2\pi}{\sigma}\right), \quad (1.4)$$

в котором константу $(C_{2k}^k)^{-1}$ также нельзя уменьшить.

В связи с результатом (1.4) отметим, что в статье Арестова [13] была указана важная взаимосвязь точных констант в L_2 -неравенствах Джексона на периоде и прямой. В частности, из результатов Васильева [17] и работы [13] следует, что в неравенстве (1.4) точку $2\pi/\sigma$ в аргументе старшего модуля непрерывности можно заменить на меньшую точку $1, 4\pi/\sigma$.

Продолжая указанную тематику, Лигун и Доронин показали [11], что для произвольных чисел $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/\sigma$ и любой неотрицательной измеримой суммируемой на отрезке $[0, t]$ функции ψ , которая не эквивалентна нулю, имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{\alpha_{\sigma, r, t, k}(\psi)} \leq \sup_{f \in L_2^+(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\int_0^t \omega_k^2(f(r), \tau) \psi(\tau) d\tau} \leq \frac{1}{\inf\{\alpha_{u, r, t, k}(\psi) : \sigma \leq u < \infty\}}, \quad (1.5)$$

где

$$\alpha_{u, r, t, k}(\psi) := 2^k u^{2r} \int_0^t (1 - \cos u\tau)^k \psi(\tau) d\tau.$$

В указанной работе в качестве следствия из неравенства (1.5) был получен еще ряд окончательных результатов.

Следующее экстремальное соотношение:

$$\sup_{f \in L_2^+(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{2r} \mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\left\{ \int_0^t \omega_k^{2/k}(f(r), \tau) d\tau \right\}^k} = \left\{ \frac{\sigma}{2(\sigma t - \sin \sigma t)} \right\}^k, \quad (1.6)$$

где $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/(2\sigma)$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, было получено в работе автора [14]. При $0 < t \leq \pi/\sigma$ там же была показана справедливость двойного неравенства

$$\frac{1}{(\sigma t)^{2k} \sigma^{2r}} \leq \sup_{f \in L_2^+(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma^2(f)}{\omega_k^2(f(r), t)} \leq \frac{1}{\sigma^{2r}} \left\{ \frac{1}{(\sigma t)^2} + \frac{1}{2} \right\}^k. \quad (1.7)$$

Отметим, что при $r = 0$ верхние грани в соотношениях (1.5)–(1.7) вычисляются по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю. Это же касается и неравенств (1.1)–(1.4), в которых при $r = 0$ также рассматриваются не эквивалентные нулю функции $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Следует отметить, что периодический аналог соотношений (1.6), (1.7) в случае $k = 1$ ранее был установлен Тайковым в теореме 1, полученной в работе [18]. В случае аппроксимации целыми функциями экспоненциального типа на прямой результат (1.7) при $r = 0$ содержится в ранее упоминавшейся статье Арестова (см., [13; п. 1.3]). Данную статью можно рассматривать как продолжение исследований, проведенных ранее в работах [6]–[9], [11], [12], [14]–[16].

2. Неравенства типа Джексона в случае наилучшего приближения целыми функциями экспоненциального типа в пространстве $L_2(\mathbb{R})$

Приведем необходимые сведения, касающиеся преобразования Фурье (см., например, [3; гл. III, с. 170–173; гл. IV, с. 211–212]).

Из теоремы Планшереля следует, что для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} dt$$

почти всюду имеет конечную производную

$$\mathcal{F}(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-itx} - 1}{-it} dt, \quad (2.1)$$

для которой

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{F}(f, x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \quad (2.2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f, t) \frac{e^{itx} - 1}{it} dt. \quad (2.3)$$

Функцию $\mathcal{F}(f)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Кроме того, при $\lambda \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \mathcal{F}(f, t) e^{itx} dt \right|^2 dx \rightarrow 0.$$

В том случае, когда функция f (соответственно $\mathcal{F}(f)$) в формуле (2.1) (соответственно (2.3)) абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, дифференцирование можно произвести под знаком интеграла. Тогда преобразование Фурье (2.1) (соответственно преобразование (2.3)) примет вид

$$\mathcal{F}(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itx} dt \quad \left(\text{соответственно } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f, t) e^{itx} dt \right). \quad (2.4)$$

Формула (2.4) определяет преобразование Фурье для всех функций, абсолютно интегрируемых на $\mathbb{R}$. Напомним, что для целых функций $g \in B_{\sigma, 2}$ имеет место следующая

ТЕОРЕМА А (Пэли, Винер). *Функция g является целой конечного экспоненциального типа, не превосходящего σ , и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty$ тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \varphi(t) e^{itx} dt,$$

где φ – некоторая функция с интегрируемым квадратом на отрезке $[-\sigma, \sigma]$.

Известно (см., например, [19]), что если функция f и ее производная первого порядка $f^{(1)}$ принадлежат пространству $L_2(\mathbb{R})$ и f является локально абсолютно непрерывной, то преобразование Фурье (2.1) функции $f^{(1)}$ выражается через преобразование Фурье функции f по формуле $\mathcal{F}(f^{(1)}, x) = ix\mathcal{F}(f, x)$. В случае, когда функция $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, согласно [20; гл. V, § 4, теорема 3] все ее промежуточные производные $f^{(r-\mu)}$, где $1 \leq \mu \leq r-1$, также будут локально абсолютно непрерывными принадлежащими пространству $L_2(\mathbb{R})$ функциями. При этом

$$\mathcal{F}(f^{(r-\mu)}, x) = (ix)^{(r-\mu)} \mathcal{F}(f, x), \quad (2.5)$$

где $\mu = 0, \dots, r-1$. В связи со сказанным, определенный интерес представляет изучение на классе $L_2^r(\mathbb{R})$, $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, наряду с $\mathcal{A}_{\sigma}(f)$ поведения величин $\mathcal{A}_{\sigma}(f^{(r-\mu)})$, являющихся наилучшими приближениями промежуточных производных $f^{(r-\mu)}$, где

$1 \leq \mu \leq r - 1$, подпространством $B_{\sigma,2}$. Этому вопросу будет посвящена следующая теорема 1. Прежде чем ее сформулировать, введем такие обозначения:

$$(1 - \cos x)_* := \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{если } |x| \leq \pi, \\ 2, & \text{если } |x| \geq \pi, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\beta_{u,k,\mu,p}(\psi, t) := 2^{k/2} u^\mu \left\{ \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}, \quad (2.7)$$

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) := \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left\{ \int_0^t \omega_k^p(f^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}}, \quad (2.8)$$

где $\mu, r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \leq r$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < p \leq 2$, $0 < t$, $\sigma < \infty$, ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на отрезке $[0, t]$ функция, которая не эквивалентна нулю. Отметим, что при $r = 0$ верхняя грань в соотношении (2.8) вычисляется по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю.

Отметим, что в 2π -периодическом случае экстремальные характеристики, в определенном смысле подобные (2.8), ранее рассматривались, например, в работах Черных [21] ($k = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $p = 2$, $t = \pi/n$, $\psi(t) = \sin nt$), Тайкова [18] ($k = 1$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $p = 2$, $0 < t \leq \pi/n$, $\psi(t) \equiv 1$), Лигуна [22] ($k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $p = 2$, $0 < t \leq \pi/n$, ψ – неотрицательная измеримая суммируемая на $[0, \pi/n]$ функция, тождественно не равная нулю), Шалаева [23] ($k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $p = 2/k$, $t = \pi/n$, $\psi(t) = \sin nt$), Вакарчука [24] ($k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $p = 2/k$, $0 < t \leq \pi/(2n)$, $\psi(t) \equiv 1$), Шабозова и Юсупова [25] ($k, n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu = r$, $0 < p \leq 2$, $0 < t \leq \pi/n$, весовая функция ψ удовлетворяет условиям из работы [22]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < t \leq \pi/\sigma$ и $0 < p \leq 2$. Тогда имеет место двойное неравенство

$$\frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi, t)} \leq \chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) \leq \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,\mu,p}(\psi, t) : \sigma \leq u < \infty\}}. \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе Ибрагимова и Насибова [7] было показано, что для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$, имеющей преобразование Фурье (2.1) в смысле пространства $L_2(\mathbb{R})$, целая функция

$$\Lambda_\sigma(f, x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \mathcal{F}(f, \tau) e^{ix\tau} d\tau,$$

принадлежащая подпространству $B_{\sigma,2}$, является наименее уклоняющейся от функции f в смысле метрики $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \|f - \Lambda_\sigma(f)\| = \left\{ \int_{|\tau| \geq \sigma} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}.$$

Вследствие вещественности функции f функция $|\mathcal{F}(f)|$ является четной. Поэтому

$$\mathcal{A}_\sigma(f) = \left\{ 2 \int_{\sigma}^{\infty} |\mathcal{F}(f, \tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}. \quad (2.10)$$

Дальнейшие рассуждения проведем в два этапа, на первом из которых рассмотрим случай $r = \mu \in \mathbb{Z}_+$, а на втором – случай $r \in \mathbb{N}$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$, где $\mu < r$.

Пусть $r = \mu \in \mathbb{Z}_+$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, которая не эквивалентна нулю, если $r = 0$. Используя фундаментальные свойства преобразования Фурье [19] и, в частности, формулу (2.5), где $\mu = 0$, имеем

$$\mathcal{F}(\Delta_\tau^k(f^{(r)}), u) = (iu)^r (e^{iu\tau} - 1)^k \mathcal{F}(f, u). \quad (2.11)$$

Поскольку $\Delta_\tau^k(f^{(r)}) \in L_2(\mathbb{R})$, то по теореме Планшереля $\mathcal{F}(\Delta_\tau^k(f^{(r)})) \in L_2(\mathbb{R})$, и эти функции в силу формулы (2.2) имеют одинаковые нормы. Поэтому, используя равенство (2.11), получаем

$$\|\Delta_\tau^k(f^{(r)})\|^2 = 2 \int_0^\infty |\mathcal{F}(f, u)|^2 u^{2r} 2^k (1 - \cos \tau u)^k du. \quad (2.12)$$

Учитывая определение модуля непрерывности k -го порядка, из (2.12) имеем

$$\omega_k^2(f^{(r)}, \tau) \geq \|\Delta_\tau^k(f^{(r)})\|^2 \geq 2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, u)|^2 u^{2r} 2^k (1 - \cos \tau u)^k du. \quad (2.13)$$

Полагая

$$\mathcal{L}(f; u, \tau) := 2^{(1+k)p/2} |\mathcal{F}(f, u)|^p u^{rp} (1 - \cos u\tau)^{kp/2} \psi(\tau),$$

а также используя неравенство (2.13), обобщенное неравенство Минковского (см., например, [5; глава 1, п. 1.3]) и обозначение (2.7), получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_0^t \omega_k^p(f^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \\ & \geq \left\{ \int_0^t \left[2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, u)|^2 u^{2r} 2^k (1 - \cos u\tau)^k du \right]^{p/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \\ & = \left\{ \int_0^t \left[\int_\sigma^\infty \mathcal{L}^{2/p}(f; u, \tau) du \right]^{p/2} d\tau \right\}^{1/p} \geq \left\{ \int_\sigma^\infty \left[\int_0^t \mathcal{L}(f; u, \tau) d\tau \right]^{2/p} du \right\}^{(p/2) \cdot (1/p)} \\ & = \left\{ 2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, u)|^2 \left[2^{kp/2} u^{rp} \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} \psi(\tau) d\tau \right]^{2/p} du \right\}^{1/2} \\ & = \left\{ 2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f, u)|^2 \beta_{u,k,r,p}^2(\psi, t) du \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Используя формулу (2.10), из соотношения (2.14) имеем

$$\left\{ \int_0^t \omega_k^p(f^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \geq \mathcal{A}_\sigma(f) \inf\{\beta_{u,k,r,p}(\psi, t) : \sigma \leq u < \infty\}.$$

Из этого неравенства и формулы (2.8) получаем оценку сверху

$$\chi_{\sigma,k,r,p}(\psi, t) \leq \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,r,p}(\psi, t) : \sigma \leq u < \infty\}}. \quad (2.15)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, расположенной в левой части неравенства (2.15), рассмотрим целую функцию λ_ε экспоненциального типа $\sigma + \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ — произвольное число, $\sigma_* := \min(\sigma, 1)$,

$$\lambda_\varepsilon(x) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} (q_{\sigma+\varepsilon}(x) - q_\sigma(x)). \quad (2.16)$$

Здесь $q_a(x) := (\sin ax)/x$, $a > 0$. При $x = 0$ полагаем $q_a(0) = a$. Поскольку преобразование Фурье функции q_a имеет следующий вид:

$$\mathcal{F}(q_a, x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \begin{cases} 1, & \text{если } |x| < a, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x| = a, \\ 0, & \text{если } |x| > a, \end{cases}$$

(см., например, [26; глава 5]), то для функции λ_ε имеем

$$\mathcal{F}(\lambda_\varepsilon, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma < |x| < \sigma + \varepsilon, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x| = \sigma \text{ или } |x| = \sigma + \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x| > \sigma + \varepsilon \text{ или } |x| < \sigma. \end{cases} \quad (2.17)$$

В силу формул (2.2) и (2.5), где $f := \lambda_\varepsilon$ и $\mu := 0$, очевидно, что $\lambda_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$. Из соотношений (2.10) и (2.17) получаем

$$\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}. \quad (2.18)$$

Учитывая, что $\mathcal{F}(\lambda_\varepsilon^{(r)}, x) = (ix)^r \mathcal{F}(\lambda_\varepsilon, x)$, на основании формул (2.6), (2.12) и (2.17) запишем

$$\|\Delta_h^k(\lambda_\varepsilon^{(r)})\|^2 = 2^{k+1} \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} u^{2r} (1 - \cos hu)^k du \leq 2^{k+1} \varepsilon (\sigma + \varepsilon)^{2r} (1 - \cos(\sigma + \varepsilon)h)_*^k,$$

где $|h| \leq \pi/\sigma$. Отсюда и из определения модуля непрерывности k -го порядка следует неравенство

$$\omega_k^p(\lambda_\varepsilon^{(r)}, \tau) \leq 2^{(k+1)p/2} \varepsilon^{p/2} (\sigma + \varepsilon)^{rp} (1 - \cos(\sigma + \varepsilon)\tau)_*^{kp/2}, \quad (2.19)$$

где $0 < \tau \leq \pi/\sigma$. Умножив левую и правую части неравенства (2.19) на функцию ψ и проинтегрировав левую и правую части полученного таким образом соотношения по τ в пределах от 0 до t , имеем

$$\int_0^t \omega_k^p(\lambda_\varepsilon^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \leq 2^{(k+1)p/2} \varepsilon^{p/2} (\sigma + \varepsilon)^{rp} \int_0^t (1 - \cos(\sigma + \varepsilon)\tau)_*^{kp/2} \psi(\tau) d\tau. \quad (2.20)$$

Полагая

$$\beta_{\sigma+\varepsilon, k, r, p}^*(\psi, t) := 2^{k/2} (\sigma + \varepsilon)^r \left\{ \int_0^t (1 - \cos(\sigma + \varepsilon)\tau)_*^{kp/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p} \quad (2.21)$$

и используя формулы (2.8), (2.18) и (2.20), (2.21), для $0 < t \leq \pi/\sigma$ запишем

$$\chi_{\sigma, k, r, p}(\psi, t) \geq \frac{\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon)}{\left\{ \int_0^t \omega_k^p(\lambda_\varepsilon^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}} \geq \frac{1}{\beta_{\sigma+\varepsilon, k, r, p}^*(\psi, t)}. \quad (2.22)$$

Из соотношений (2.21) и (2.6) следует, что величина $\beta_{\sigma+\varepsilon, k, r, p}^*(\psi, t)$ убывает, когда $\varepsilon \rightarrow 0+0$ при постоянстве остальных параметров, входящих в (2.21). Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \beta_{\sigma+\varepsilon, k, r, p}^*(\psi, t) = \beta_{\sigma, k, r, p}(\psi, t) \quad (2.23)$$

и для любого сколь угодно малого числа $\delta > 0$ можно подобрать такое число $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon(\delta) \in (0, \delta)$, для которого в силу (2.23) имеем

$$\frac{1}{\beta_{\sigma+\tilde{\varepsilon},k,r,p}^*(\psi,t)} > \frac{1}{\beta_{\sigma,k,r,p}(\psi,t)} - \delta. \quad (2.24)$$

Используя определение верхней грани множества, из (2.24) получаем

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \sigma_*)} \frac{1}{\beta_{\sigma+\varepsilon,k,r,p}^*(\psi,t)} = \frac{1}{\beta_{\sigma,k,r,p}(\psi,t)}. \quad (2.25)$$

Поскольку левая часть неравенства (2.22) не зависит от ε , то вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от его правой части, имеем

$$\chi_{\sigma,k,r,p}(\psi,t) \geq \frac{1}{\beta_{\sigma,k,r,p}(\psi,t)}. \quad (2.26)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.15) и снизу (2.26), при $r = \mu \in \mathbb{Z}_+$ получаем двойное неравенство

$$\frac{1}{\beta_{\sigma,k,r,p}(\psi,t)} \leq \chi_{\sigma,k,r,p}(\psi,t) \leq \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,r,p}(\psi,t) : \sigma \leq u < \infty\}}. \quad (2.27)$$

Переходя ко второму этапу доказательства полагаем, что $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+$ и $\mu < r$. Поскольку функцию $f^{(r-\mu)}$, где $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, можно рассматривать как элемент класса $L_2^\mu(\mathbb{R})$ и $L_2^r(\mathbb{R}) \subset L_2^\mu(\mathbb{R})$, то используя формулы (2.8) и (2.27), получаем оценку сверху в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi,t) &= \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left\{ \int_0^t \omega_k^p(f^{(r)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}} \\ &\leq \sup_{F \in L_2^\mu(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(F)}{\left\{ \int_0^t \omega_k^p(F^{(\mu)}, \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}} \\ &= \chi_{\sigma,k,\mu,p}(\psi,t) \leq \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,\mu,p}(\psi,t) : \sigma \leq u < \infty\}}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части соотношения (2.28), рассмотрим целую функцию $\lambda_\varepsilon \in L_2^r(\mathbb{R})$, заданную формулой (2.16). Согласно формуле (2.10) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)}) = \left\{ 2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)}, \tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2}. \quad (2.29)$$

Из равенств (2.5) и (2.17) получаем

$$\mathcal{F}(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)}, x) = (ix)^{(r-\mu)} \mathcal{F}(\lambda_\varepsilon, x) = (ix)^{r-\mu} \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma < |x| < \sigma + \varepsilon, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } |x| = \sigma \text{ или } |x| = \sigma + \varepsilon, \\ 0, & \text{если } |x| > \sigma + \varepsilon \text{ или } |x| < \sigma. \end{cases} \quad (2.30)$$

Используя равенства (2.29) и (2.30), запишем

$$\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)}) = \left\{ 2 \int_\sigma^{\sigma+\varepsilon} \tau^{2(r-\mu)} d\tau \right\}^{1/2} \geq \sqrt{2\varepsilon} \sigma^{r-\mu}. \quad (2.31)$$

Применяя формулы (2.7), (2.8), (2.20), (2.21) и (2.31), получаем

$$\begin{aligned} \chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) &\geq \frac{\mathcal{A}_\sigma(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)})}{\left\{ \int_0^t \omega_k^p(\lambda_\varepsilon^{(r)}) \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/p}} \\ &\geq \frac{(1 + \varepsilon/\sigma)^{-r} 2^{-k/2} \sigma^{-\mu}}{\left\{ \int_0^t (1 - \cos(\sigma + \varepsilon)\tau)_*^{kp/2} \psi(\tau) d\tau \right\}^{1/2}} \geq \frac{1}{(1 + \varepsilon/\sigma)^r \beta_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}^*(\psi, t)}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из соотношений (2.6) и (2.21) следует, что величина $(1 + \varepsilon/\sigma)^r \beta_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}^*(\psi, t)$ убывает в случае, когда $\varepsilon \rightarrow 0+0$, а все остальные параметры в выражении (2.21) постоянны. При этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^r \beta_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}^*(\psi, t) = \beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi, t).$$

На основании соображений, аналогичных имевшим место при завершении доказательства первого этапа данной теоремы, имеем

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \sigma_*)} \frac{1}{(1 + \varepsilon/\sigma)^r \beta_{\sigma+\varepsilon,k,\mu,p}^*(\psi, t)} = \frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi, t)}. \quad (2.33)$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от правой части неравенства (2.32) и учитывая, что его левая часть от ε не зависит, запишем оценку снизу

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) \geq \frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi, t)}. \quad (2.34)$$

Сопоставляя оценки сверху (2.28) и снизу (2.34) величины $\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t)$, получаем двойное неравенство при $r \in \mathbb{N}$, $\mu < r$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(\psi, t)} \leq \chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(\psi, t) \leq \frac{1}{\inf\{\beta_{u,k,\mu,p}(\psi, t) : \sigma \leq u < \infty\}}. \quad (2.35)$$

Объединяя результаты (2.27) и (2.35), получаем требуемые соотношения (2.9). Теорема 1 доказана.

Отметим, что результат Лигуна и Доронина (1.5) получаем как частный случай теоремы 1 при $\mu = r$ и $p = 2$.

3. Некоторые следствия из теоремы 1

Из доказанной теоремы 1 вытекает ряд следствий, которые по нашему мнению представляют и самостоятельный интерес.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\psi \equiv 1$, $\mu, k, r \in \mathbb{N}$, $\mu \leq r$, $1/\mu \leq p \leq 2$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/\sigma$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\chi_{\sigma,k,r,\mu,p}(1, t) = \frac{1}{\beta_{\sigma,k,\mu,p}(1, t)}. \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\theta(u) := \{2^{-k/2}\beta_{u,k,\mu,p}(1,t)\}^p = u^{\mu p} \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau,$$

зависящую от одной переменной u , принимающей значения на множестве $[\sigma, \infty)$. Очевидно, что если функция θ будет неубывающей при $\sigma \leq u < \infty$, то такой же будет и величина $\beta_{u,k,\mu,p}(1,t)$ по переменной u при фиксированных значениях остальных параметров, входящих в нее. Исходя из сказанного, вычислим производную первого порядка функции θ

$$\theta^{(1)}(u) = \mu p u^{\mu p-1} \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau + u^{\mu p} \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau. \quad (3.2)$$

Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться в справедливости равенства

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial u} (1 - \cos u\tau)^{kp/2} = \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - \cos u\tau)^{kp/2}, \quad (3.3)$$

где переменные u и τ отличны от нуля. Используя формулы (3.2) и (3.3), получаем

$$\theta^{(1)}(u) = u^{\mu p-1} \left\{ \mu p \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau + \int_0^t \tau \frac{\partial}{\partial \tau} (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau \right\}. \quad (3.4)$$

Воспользовавшись процедурой интегрирования по частям при вычислении второго интеграла в правой части равенства (3.4), имеем

$$\theta^{(1)}(u) = u^{\mu p-1} \left\{ t(1 - \cos ut)^{kp/2} + (\mu p - 1) \int_0^t (1 - \cos u\tau)^{kp/2} d\tau \right\}. \quad (3.5)$$

Учитывая, что $p \geq 1/\mu$, из формулы (3.5) при любом $\sigma \leq u < \infty$ имеем $\theta^{(1)}(u) \geq 0$. Следовательно, $\inf\{\theta(u) : \sigma \leq u < \infty\} = \theta(\sigma)$, а это, в свою очередь, означает, что

$$\inf\{\beta_{u,k,\mu,p}(1,t) : \sigma \leq u < \infty\} = \beta_{\sigma,k,\mu,p}(1,t). \quad (3.6)$$

Используя формулы (2.9) и (3.6), получаем в рассматриваемом случае соотношение (3.1), чем и завершаем доказательство следствия 1.

Дополнением к следствию 1, содержащим ряд возможных случаев изменения параметров экстремальной характеристики (2.8), является

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\psi \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu, r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \leq r$, $p = 2/k$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/(2\sigma)$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^+(\mathbb{R})} \frac{\sigma^\mu \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\left\{ \int_0^t \omega_k^{2/k}(f(r), \tau) \psi(\tau) d\tau \right\}^{k/2}} = \left\{ \frac{\sigma}{2(\sigma t - \sin \sigma t)} \right\}^{k/2}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим величину

$$\tilde{\theta}(u) := \beta_{u,k,\mu,2/k}(1,t) = 2^{k/2} u^\mu \left\{ \int_0^t (1 - \cos u\tau) d\tau \right\}^{k/2} = (2t)^{k/2} u^\mu \left(1 - \frac{\sin ut}{ut} \right)^{k/2} \quad (3.8)$$

как функцию независимой переменной $u \in [\sigma, \infty)$ при фиксированных значениях остальных параметров, определяющих соотношение (2.7). Учитывая ограничение $0 < t \leq \pi/(2\sigma)$ и поведение функции $\sin(x)/x$ (см., например, [27; п. 1.2, с. 129, 132]), имеем

$$\inf_{\sigma \leq u < \infty} \left(1 - \frac{\sin ut}{ut}\right)^{k/2} = \left(1 - \sup_{\sigma \leq u < \infty} \frac{\sin ut}{ut}\right)^{k/2} = \left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{k/2}. \quad (3.9)$$

Используя формулы (3.8), (3.9), запишем

$$\inf_{\sigma \leq u < \infty} \tilde{\theta}(u) = \tilde{\theta}(\sigma) = (2t)^{k/2} \sigma^\mu \left(1 - \frac{\sin \sigma t}{\sigma t}\right)^{k/2}. \quad (3.10)$$

Требуемое равенство (3.7) получаем из соотношений (2.9) и (3.8), (3.10). Следствие 2 доказано.

Необходимо отметить, что при $\mu = r$ результат автора (1.6) содержится в формуле (3.7).

Гусейновым и Мухтаровым в [28; гл. II, § 1] было показано, что если ω есть модуль непрерывности, то функция $\omega^*(t) := (1/t) \int_0^t \omega(\tau) d\tau$, $t > 0$, также будет модулем непрерывности. Поскольку, как отмечалось в [28], $\lim_{t \rightarrow 0+0} \omega^*(t) = 0$, то полагают $\omega^*(0) = 0$. Согласно сказанному для произвольного элемента $f \in L_2(\mathbb{R})$ функция

$$\omega^*(f, t) := \frac{1}{t} \int_0^t \omega_1(f, \tau) d\tau \quad (3.11)$$

также является модулем непрерывности первого порядка и может использоваться наряду с классическим модулем непрерывности $\omega_1(f)$ для решения экстремальных задач теории приближений в пространстве $L_2(\mathbb{R})$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mu, r \in \mathbb{N}$ и $\mu \leq r$, $0 < \sigma < \infty$, $0 < t \leq \pi/\sigma$. Тогда имеет место равенство

$$\sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\sigma^{\mu-1} \mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\omega^*(f^{(r)}, t)} = \frac{t}{4(1 - \cos(\sigma t/2))}. \quad (3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся равенством (3.1), в котором положим $k := 1$, $p := 1$, и формулой (2.8), запишем

$$\chi_{\sigma, 1, r, \mu, 1}(1, t) = \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\int_0^t \omega_1(f^{(r)}, \tau) d\tau} = \frac{1}{\beta_{\sigma, 1, \mu, 1}(1, t)} = \frac{\sigma^{-\mu}}{\sqrt{2} \int_0^t (1 - \cos \sigma \tau)^{1/2} d\tau}. \quad (3.13)$$

Проводя необходимые вычисления в правой части формулы (3.13) и используя формулу (3.11), получаем требуемое равенство (3.12), чем и завершаем доказательство данного следствия.

4. Неравенства, содержащие наилучшее приближение и модуль непрерывности в $L_2(\mathbb{R})$

Наряду с изучением поведения экстремальной характеристики (2.8), определенный интерес представляет и исследование экстремальной характеристики

$$\tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) := \sup_{f \in L_2^r(\mathbb{R})} \frac{\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)})}{\omega_k(f^{(r)}, t)}, \quad (4.1)$$

где $\mu, r \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \leq r$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < t$, $\sigma < \infty$. Напомним, что при $r = 0$ верхняя грань в соотношении (4.1) вычисляется по всем функциям $f \in L_2(\mathbb{R})$, которые не эквивалентны нулю. Указанному вопросу посвящена следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < t \leq \pi/\sigma$. Тогда справедливо двойное неравенство

$$\frac{1}{\sigma^\mu (\sigma t)^k} \leq \tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) \leq \frac{1}{\sigma^\mu} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sigma t)^2} \right\}^{k/2}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенств (2.5) и (2.10) имеем

$$\mathcal{A}_\sigma(f^{(r-\mu)}) = \left\{ 2 \int_\sigma^\infty |\mathcal{F}(f^{(r-\mu)}, u)|^2 du \right\}^{1/2} = \left\{ 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 du \right\}^{1/2}. \quad (4.3)$$

Используя соотношение (4.3), запишем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)}) &= 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 \cos \tau u du \\ &= 2 \int_\sigma^\infty \{u^{r-\mu} |\mathcal{F}(f, u)|\}^{2(1-1/k)} \{u^{r-\mu} |\mathcal{F}(f, u)|\}^{2/k} (1 - \cos \tau u) du. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Применяя к правой части равенства (4.4) неравенство Гёльдера и учитывая определение модуля непрерывности k -го порядка и формулы (2.12) и (4.3), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)}) &= 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 \cos \tau u du \\ &\leq \left\{ 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 du \right\}^{1-1/k} \left\{ 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos \tau u)^k du \right\}^{1/k} \\ &\leq \mathcal{A}_\sigma^{2(1-1/k)}(f^{(r-\mu)}) \frac{1}{2\sigma^{2\mu/k}} \left\{ 2^{k+1} \int_\sigma^\infty u^{2r} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos \tau u)^k du \right\}^{1/k} \\ &\leq \mathcal{A}_\sigma^{2(1-1/k)}(f^{(r-\mu)}) \frac{\omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau)}{2\sigma^{2\mu/k}}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Проинтегрируем левую и правую части неравенства (4.5) вначале по переменной τ в пределах от 0 до v , а затем проинтегрируем полученное таким образом соотношение по v в пределах от 0 до t , где $0 < t \leq \pi/\sigma$. В результате этого имеем

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{2} \mathcal{A}_\sigma^2(f^{(r-\mu)}) &\leq 2 \int_\sigma^\infty u^{2(r-\mu-1)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos tu) du \\ &\quad + \frac{\mathcal{A}_\sigma^{2(1-1/k)}(f^{(r-\mu)})}{2\sigma^{2\mu/k}} \int_0^t \int_0^v \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau dv. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Используя равенства (2.10) и (2.12), определение модуля непрерывности k -го порядка и неравенство Гёльдера, получим оценку сверху первого слагаемого в правой

части неравенства (4.6)

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_{\sigma}^{\infty} u^{2(r-\mu-1)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos tu) du \\
 & \leq \frac{2}{\sigma^2} \int_{\sigma}^{\infty} \{u^{r-\mu} |\mathcal{F}(f, u)|\}^{2(1-1/k)} \{u^{r-\mu} |\mathcal{F}(f, u)| (1 - \cos tu)^{k/2}\}^{2/k} du \\
 & \leq \frac{1}{\sigma^2} \left\{ 2 \int_{\sigma}^{\infty} u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 du \right\}^{1-1/k} \left\{ 2 \int_{\sigma}^{\infty} u^{2(r-\mu)} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos tu)^k du \right\}^{1/k} \\
 & \leq \frac{1}{\sigma^2} \mathcal{A}_{\sigma}^{2(1-1/k)}(f^{(r-\mu)}) \left\{ \frac{2}{2^k \sigma^{2\mu}} \int_{\sigma}^{\infty} 2^k u^{2r} |\mathcal{F}(f, u)|^2 (1 - \cos tu)^k du \right\}^{1/k} \\
 & \leq \frac{1}{2\sigma^{2(1+\mu/k)}} \mathcal{A}_{\sigma}^{2(1-1/k)}(f^{(r-\mu)}) \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t). \tag{4.7}
 \end{aligned}$$

Произведя во втором слагаемом правой части неравенства (4.6) интегрирование по частям и учитывая соотношение (4.7), перепишем неравенство (4.6) в следующем виде:

$$t^{2k} \mathcal{A}_{\sigma}^2(f^{(r-\mu)}) \leq \frac{1}{\sigma^{2(k+\mu)}} \left\{ \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, t) + \sigma^2 \int_0^t (t - \tau) \omega_k^{2/k}(f^{(r)}, \tau) d\tau \right\}^k.$$

Отсюда получаем

$$t^{2k} \mathcal{A}_{\sigma}^2(f^{(r-\mu)}) \leq \frac{1}{\sigma^{2(k+\mu)}} \omega_k^2(f^{(r)}, t) \left\{ 1 + \frac{(\sigma t)^2}{2} \right\}^k.$$

Следовательно, для $0 < t \leq \pi/\sigma$ с учетом формулы (4.1) имеем

$$\tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) \leq \frac{1}{\sigma^{\mu}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{(\sigma t)^2} \right\}^{k/2}. \tag{4.8}$$

Для получения оценки снизу экстремальной характеристики (4.1) рассмотрим функцию $\lambda_{\varepsilon} \in L_2^r(\mathbb{R})$, заданную формулой (2.16). Для нее запишем

$$\tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) \geq \frac{\mathcal{A}_{\sigma}(\lambda_{\varepsilon}^{(r-\mu)})}{\omega_k(\lambda_{\varepsilon}^{(r)}, t)}. \tag{4.9}$$

Полагая

$$\xi_{u, k, r}(t) := u^r (1 - \cos ut)^{k/2}, \tag{4.10}$$

$$\tilde{\xi}_{u, k, r}(t) := u^r (1 - \cos ut)_*^{k/2} \tag{4.11}$$

и используя формулу (2.19), где $p = 1$, а также формулу (2.31), из неравенства (4.9) получаем

$$\tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) \geq \frac{\sigma^{r-\mu}}{2^{k/2} \tilde{\xi}_{\sigma+\varepsilon, k, r}(t)}. \tag{4.12}$$

В случае $u := \sigma + \varepsilon$ из формул (4.11) и (2.6) следует, что величина $\tilde{\xi}_{\sigma+\varepsilon, k, r}(t)$ убывает при $\varepsilon \rightarrow 0+0$ и постоянстве остальных параметров, входящих в соотношение (4.11). При этом $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \tilde{\xi}_{\sigma+\varepsilon, k, r}(t) = \xi_{\sigma, k, r}(t)$. Используя определение верхней грани, отсюда имеем

$$\sup_{\varepsilon \in (0, \sigma_*)} \frac{1}{\tilde{\xi}_{\sigma+\varepsilon, k, r}(t)} = \frac{1}{\xi_{\sigma, k, r}(t)}. \tag{4.13}$$

Вычисляя верхнюю грань по $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ от правой части неравенства (4.12) и учитывая формулы (4.13), (4.10) и (2.6), имеем

$$\tilde{\chi}_{\sigma, k, r, \mu}(t) \geq \frac{1}{\sigma^\mu (\sigma t)^k}. \quad (4.14)$$

Требуемое соотношение (4.2) получаем из неравенств (4.8) и (4.14). Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае $\mu := r$ из соотношения (4.2) вытекает ранее полученный результат автора (1.7).

5. Средние ν -поперечники классов функций, заданных на всей вещественной оси

5.1. Введение Магарил-Ильяевым определения средней размерности (см., например, [29], [30]), которое явилось определенной модификацией соответствующего понятия, данного ранее Тихомировым [31], позволило определить асимптотические характеристики подпространств, подобные поперечникам, где роль размерности выполняла средняя размерность. В результате этого оказалось возможным сравнивать аппроксимативные свойства подпространства $B_{\sigma, 2}$ с аналогичными характеристиками иных подпространств из $L_2(\mathbb{R})$ той же средней размерности и решать в $L_2(\mathbb{R})$ экстремальные задачи теории аппроксимации оптимизационного содержания.

Прежде чем ввести необходимые экстремальные характеристики, приведем ряд понятий и определений из работ [29], [30]. Пусть $BL_2(\mathbb{R})$ есть единичный шар в $L_2(\mathbb{R})$, $\text{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$ является совокупностью всех линейных подпространств в $L_2(\mathbb{R})$,

$$\text{Lin}_n(L_2(\mathbb{R})) := \{\mathcal{L} \in \text{Lin}(L_2(\mathbb{R})) : \dim \mathcal{L} \leq n\}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

и

$$d(Q, A, L_2(\mathbb{R})) := \sup\{\inf\{\|x - y\| : y \in A\} : x \in Q\}$$

есть наилучшее приближение множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ множеством $A \subset L_2(\mathbb{R})$. Под A_T , где $T > 0$, понимаем сужение множества $A \subset L_2(\mathbb{R})$ на отрезок $[-T, T]$, а через $\text{Lin}_C L_2(\mathbb{R})$ обозначим совокупность таких подпространств $\mathcal{L} \in \text{Lin}(L_2(\mathbb{R}))$, для которых множество $(\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T$ предкомпактно в $L_2([-T, T])$ при любом $T > 0$.

Если $\mathcal{L} \in \text{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и $T, \varepsilon > 0$, то существуют такие $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\mathcal{M} \in \text{Lin}_n(L_2(\mathbb{R}))$, для которых $d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T, T])) < \varepsilon$ [29]. Пусть

$$D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \min\{n \in \mathbb{Z}_+ : \text{найдется } \mathcal{M} \in \text{Lin}_n(L_2([-T, T])) \text{ такой, что} \\ d((\mathcal{L} \cap BL_2(\mathbb{R}))_T, \mathcal{M}, L_2([-T, T])) < \varepsilon\}.$$

Данная функция не убывает по T и не возрастает по ε . Величину

$$\overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) := \lim\left\{\liminf\left\{\frac{D_\varepsilon(T, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R}))}{2T} : T \rightarrow \infty\right\} : \varepsilon \rightarrow 0\right\},$$

где $\mathcal{L} \in \text{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$, называют *средней размерностью* подпространства $\mathcal{L}$ в $L_2(\mathbb{R})$. В [29] было показано, что

$$\overline{\dim}(B_{\sigma, 2}, L_2(\mathbb{R})) = \frac{\sigma}{\pi}. \quad (5.1)$$

Пусть Q есть центрально-симметричное подмножество из $L_2(\mathbb{R})$ и $\nu > 0$ является произвольным числом. Тогда под *средним ν -поперечником по Колмогорову* множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ понимают величину

$$\bar{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf \{d(Q, \mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) : \mathcal{L} \in \text{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) \leq \nu\}.$$

Подпространство, на котором достигается внешняя нижняя грань, называется *экстремальным*.

Средним линейным ν -поперечником множества Q в $L_2(\mathbb{R})$ называют величину

$$\bar{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \inf \{\sup \{\|f - V(f)\| : f \in Q\} : (X, V)\},$$

где нижняя грань берется по всем парам (X, V) таким, что X есть нормированное пространство, непосредственно вложенное в $L_2(\mathbb{R})$, а $V: X \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ является непрерывным линейным оператором, для которого $\text{Im } V \in \text{Lin}_C(L_2(\mathbb{R}))$ и выполнено неравенство $\overline{\dim}(\text{Im } V, L_2(\mathbb{R})) \leq \nu$, $Q \subset X$. Здесь $\text{Im } V$ есть образ оператора V . Пару, на которой достигается нижняя грань, называют *экстремальной*.

Величину

$$\bar{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) := \sup \{ \sup \{ \rho > 0 : \mathcal{L} \cap \rho B L_2(\mathbb{R}) \subset Q \} : \mathcal{L} \in \text{Lin}_C(L_2(\mathbb{R})), \overline{\dim}(\mathcal{L}, L_2(\mathbb{R})) > \nu, \bar{d}_\nu(\mathcal{L} \cap B L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1 \}$$

называют *средним ν -поперечником по Бернштейну* множества Q в $L_2(\mathbb{R})$. Последнее условие, налагаемое на $\mathcal{L}$ при вычислении внешней верхней грани, означает, что рассматриваются только те подпространства, для которых справедлив аналог теоремы Тихомирова о поперечнике шара. Этому требованию удовлетворяет, например, подпространство $B_{\sigma,2}$, если $\sigma > \nu\pi$, т.е. $\bar{d}_\nu(B_{\sigma,2} \cap B L_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Для множества $Q \subset L_2(\mathbb{R})$ между перечисленными выше его экстремальными характеристиками имеют место следующие неравенства

$$\bar{b}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leq \bar{d}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})) \leq \bar{\delta}_\nu(Q, L_2(\mathbb{R})). \quad (5.2)$$

5.2. Непрерывную и неубывающую на множестве $[0, \infty)$ функцию Ψ назовем *мажорантой*, если $\Psi(0) = 0$ (см., например, [32; гл. I, § 2, п. 3]). Пусть Ψ – некоторая мажоранта. Через $W^r(\omega^*, \Psi)$, где $r \in \mathbb{N}$, обозначим класс всех функций $f \in L_2^r(\mathbb{R})$, у которых производные r -го порядка $f^{(r)}$ удовлетворяют условию $\omega^*(f^{(r)}, t) \leq \Psi(t)$ для любого $0 \leq t < \infty$. Наилучшее приближение данного класса подпространством $B_{\sigma,2}$ обозначим $\mathcal{A}_\sigma(W^r(\omega^*, \Psi))$, т.е.

$$\mathcal{A}_\sigma(W^r(\omega^*, \Psi)) := \sup \{\mathcal{A}_\sigma(f) : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть ν – произвольное конечное положительное число, Ψ – мажоранта, удовлетворяющая условию

$$\frac{\Psi(t)}{\Psi(\pi/\sigma)} \geq \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{4}{\sigma t} \sin^2\left(\frac{\sigma t}{4}\right), & \text{если } 0 < t \leq \frac{\pi}{\sigma}, \\ 1 - \frac{\pi - 2}{\sigma t}, & \text{если } \frac{\pi}{\sigma} \leq t < \infty, \end{cases} \quad (5.3)$$

для любого конечного значения $\sigma > \nu\pi$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) = \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega^*, \Psi)) = \frac{\pi^{1-r}}{4\nu^r} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad (5.4)$$

где $\overline{\Pi}_\nu(\cdot)$ – любой из средних ν -поперечников, рассмотренных в п. 5.1. При этом пара $(L_2^r(\mathbb{R}), \Lambda_{\nu\pi})$, где линейный оператор $\Lambda_{\nu\pi}$ определяется формулой

$$\Lambda_{\nu\pi}(f, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\nu\pi}^{\nu\pi} \mathcal{F}(f, \tau) e^{ix\tau} d\tau,$$

будет экстремальной для среднего линейного ν -поперечника $\overline{\delta}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R}))$, а подпространство $B_{\nu\pi, 2}$ будет экстремальным для среднего ν -поперечника по Колмогорову $\overline{d}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R}))$. Множество мажорант, удовлетворяющих условию (5.3), непусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (5.1), вычислим среднюю размерность подпространства целых функций $B_{\nu\pi, 2}$:

$$\overline{\dim}(B_{\nu\pi, 2}, L_2(\mathbb{R})) = \nu. \quad (5.5)$$

Для произвольной функции $f \in W^r(\omega^*, \Psi)$ в силу соотношения (3.12), в котором полагаем $t := \pi/\sigma$, $\mu := r$, получаем оценку сверху величины наилучшего приближения

$$\mathcal{A}_\sigma(f) \leq \frac{\pi}{4\sigma^r} \omega^*\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{\sigma}\right) \leq \frac{\pi}{4\sigma^r} \Psi\left(\frac{\pi}{\sigma}\right). \quad (5.6)$$

Полагая в формуле (5.6) $\sigma := \nu\pi$, из соотношения (5.2), определения среднего линейного ν -поперечника и формул (5.5), (5.6) имеем оценки сверху

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) &\leq \overline{\delta}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) \leq \sup\{\|f - \Lambda_{\nu\pi}(f)\| : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\} \\ &= \mathcal{A}_{\nu\pi}(W^r(\omega^*, \Psi)) \leq \frac{\pi^{1-r}}{4\nu^r} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Перейдем к получению оценок снизу рассматриваемых средних ν -поперечников. Согласно п. 5.1 подпространство целых функций $B_{\widehat{\sigma}, 2}$, где $\widehat{\sigma} := \nu\pi(1 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, 1)$ – произвольное число, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к подпространствам, участвующим в определении среднего ν -поперечника по Бернштейну. При этом согласно формуле (5.1) имеем $\overline{\dim}(B_{\widehat{\sigma}, 2}, L_2(\mathbb{R})) = \nu(1 + \varepsilon)$, а в силу [29], [30] выполнено $\overline{d}_\nu(B_{\widehat{\sigma}, 2} \cap BL_2(\mathbb{R}), L_2(\mathbb{R})) = 1$.

Далее рассмотрим множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho)$, являющееся результатом пересечения шара $\rho_\varepsilon BL_2(\mathbb{R})$ радиуса

$$\rho_\varepsilon := \frac{\pi}{4(\widehat{\sigma})^r} \Psi\left(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\right) \quad (5.8)$$

с подпространством целых функций $B_{\widehat{\sigma}, 2}$, т.е.

$$\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon) := B_{\widehat{\sigma}, 2} \cap \rho_\varepsilon BL_2(\mathbb{R}) = \{g \in B_{\widehat{\sigma}, 2} : \|g\| \leq \rho_\varepsilon\}.$$

Покажем, что множество $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$ принадлежит классу $W^r(\omega^*, \Psi)$.

Согласно теореме Пэли–Винера произвольный элемент $g \in B_{\widehat{\sigma},2}$ можно представить в виде

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \varphi(\tau) e^{ix\tau} d\tau, \quad (5.9)$$

где φ – некоторая функция с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля на отрезке $[-\widehat{\sigma}, \widehat{\sigma}]$. Используя формулу (5.9), запишем

$$\Delta_h^1(g, x) = g(x+h) - g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (e^{i\tau h} - 1) \varphi(\tau) e^{ix\tau} d\tau. \quad (5.10)$$

На основании формулы (2.11), в которой полагаем $f := g$, $\tau := h$, $r := 0$, $k := 1$, а также в силу теоремы Планшереля и формулы (5.9) из равенства (5.10) получаем

$$\|\Delta_h^1(g)\|^2 = 2 \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (1 - \cos \tau h) |\varphi(\tau)|^2 d\tau. \quad (5.11)$$

Поскольку из формулы (2.6) и из чисто геометрических соображений следует, что для любого $\tau \in [-\sigma, \sigma]$ справедливо неравенство $1 - \cos \tau h \leq (1 - \cos \widehat{\sigma} h)_*$, то используя определение модуля непрерывности первого порядка ω_1 , равенство (5.11) и соотношение $\|g\|^2 = \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} |\varphi(\tau)|^2 d\tau$, имеем

$$\omega_1(g, t) \leq 2 \left(\sin \frac{\widehat{\sigma} t}{2} \right)_* \|g\|. \quad (5.12)$$

Здесь

$$(\sin x)_* := \begin{cases} \sin x, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{если } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Из данного в разделе 3 статьи определения модуля непрерывности ω^* и из неравенства (5.12) получаем

$$\omega^*(g, t) \leq \frac{2}{t} \|g\| \int_0^t \left(\sin \frac{\widehat{\sigma} \tau}{2} \right)_* d\tau. \quad (5.13)$$

Используя неравенство Бернштейна для целых функций $g \in B_{\widehat{\sigma},2}$, запишем (см., например, [3], [5])

$$\|g^{(r)}\| \leq (\widehat{\sigma})^r \|g\|. \quad (5.14)$$

Из неравенств (5.13) и (5.14) для произвольной функции $g \in B_{\widehat{\sigma},2}$ имеем

$$\omega^*(g^{(r)}, t) \leq \frac{2}{t} (\widehat{\sigma})^r \|g\| \int_0^t \left(\sin \frac{\widehat{\sigma} \tau}{2} \right)_* d\tau. \quad (5.15)$$

Продолжая рассуждения, покажем справедливость неравенства

$$\omega^*(g^{(r)}, t) \leq \Psi(t), \quad t \geq 0, \quad (5.16)$$

для любого элемента $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$. Для этого рассмотрим два случая: $0 \leq t \leq \pi/\widehat{\sigma}$ и $\pi/\widehat{\sigma} \leq t < \infty$.

Пусть вначале $0 \leq t \leq \pi/\widehat{\sigma}$. Используя определение класса $W^r(\omega^*, \Psi)$, неравенство (5.15), формулу (5.8) и первое из ограничений на мажоранту Ψ в условии (5.3), в котором вместо σ берем $\widehat{\sigma}$, для произвольной функции $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$ получаем

$$\omega^*(g^{(r)}, t) \leq \frac{2}{t}(\widehat{\sigma})^r \|g\| \int_0^t \sin \frac{\widehat{\sigma}\tau}{2} d\tau \leq \frac{2\pi}{t\widehat{\sigma}} \sin^2\left(\frac{\widehat{\sigma}t}{4}\right) \Psi\left(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\right) \leq \Psi(t). \quad (5.17)$$

Далее полагаем $\pi/\widehat{\sigma} \leq t < \infty$. На основании аналогичных соображений и второго ограничения на мажоранту Ψ в условии (5.3) для любого элемента $g \in \mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$ имеем

$$\omega^*(g^{(r)}, t) \leq \frac{2}{t} \left\{ \int_0^{\pi/\widehat{\sigma}} \sin \frac{\widehat{\sigma}\tau}{2} d\tau + t - \frac{\pi}{\widehat{\sigma}} \right\} (\widehat{\sigma})^r \|g\| \leq \frac{2}{\pi} \left\{ 1 - \frac{\pi-2}{\widehat{\sigma}t} \right\} \Psi\left(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\right) \leq \Psi(t). \quad (5.18)$$

Из соотношений (5.17) и (5.18) следует справедливость неравенства (5.16), что означает принадлежность множества $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon)$ классу $W^r(\omega^*, \Psi)$.

Используя определение среднего ν -поперечника по Бернштейну и формулу (5.8), запишем

$$\bar{b}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) \geq \bar{b}_\nu(\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon), L_2(\mathbb{R})) \geq \frac{\pi^{1-r}}{4\nu^r} \mathcal{K}_{1+\varepsilon}(\Psi, \nu, r), \quad (5.19)$$

где

$$\mathcal{K}_x(\Psi, \nu, r) := \frac{1}{x^r} \Psi\left(\frac{1}{\nu x}\right).$$

Очевидно, что при $\varepsilon \rightarrow 0+0$ величина $\mathcal{K}_{1+\varepsilon}(\Psi, \nu, r)$ является возрастающей и имеет в качестве предела значение $\Psi(1/\nu)$. Тогда из определения верхней грани получаем

$$\sup_{\varepsilon \in (0,1)} \mathcal{K}_{1+\varepsilon}(\Psi, \nu, r) = \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (5.20)$$

Поскольку в цепочке неравенств (5.19) левая часть не зависит от ε , то на основании свойств верхней грани числового множества и в силу соотношений (5.20) и (5.2) имеем

$$\bar{\Pi}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) \geq \bar{b}_\nu(W^r(\omega^*, \Psi), L_2(\mathbb{R})) \geq \frac{\pi^{1-r}}{4\nu^r} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (5.21)$$

Для рассматриваемых экстремальных характеристик класса $W^r(\omega^*, \Psi)$ равенства (5.4) следуют из сопоставления оценок сверху (5.6) с оценками снизу (5.21).

В завершение доказательства теоремы покажем, что множество мажорант, удовлетворяющих условию (5.3), непусто. С этой целью рассмотрим, например, функцию $\widehat{\Psi}(t) := t^\zeta$, где $\zeta := \pi/2 - 1$, для которой условие (5.3) запишется в следующем виде:

$$\left(\frac{t\sigma}{\pi}\right)^\zeta \geq \frac{\pi}{2} \begin{cases} \frac{4}{\sigma t} \sin^2\left(\frac{\sigma t}{4}\right), & \text{если } 0 < t \leq \frac{\pi}{\sigma}, \\ 1 - \frac{\pi-2}{\sigma t}, & \text{если } \frac{\pi}{\sigma} \leq t < \infty. \end{cases} \quad (5.22)$$

Докажем, что неравенства (5.22) имеют место. Полагая $u := t\sigma/\pi$, вместо (5.22) получаем эквивалентные соотношения

$$u^\zeta \geq \frac{1}{2} \begin{cases} \frac{4}{u} \sin^2\left(\frac{\pi u}{4}\right), & \text{если } 0 < u \leq 1, \\ \pi - \frac{\pi-2}{u}, & \text{если } 1 \leq u < \infty. \end{cases} \quad (5.23)$$

В случае $0 < u \leq 1$, исходя из (5.23), рассмотрим вспомогательную функцию

$$Y(u) := u^\zeta - \frac{2}{u} \sin^2\left(\frac{\pi u}{4}\right). \quad (5.24)$$

При $u \rightarrow 0 + 0$ из (5.24) в силу эквивалентности бесконечно малых получаем приближенную формулу

$$Y(u) \doteq u^\zeta \left(1 - \frac{\pi^2}{8} u^{1-\zeta}\right). \quad (5.25)$$

Поскольку величина $\zeta \in (0.57, 0.58)$, то из равенства (5.25) следует существование такого интервала $(0, \varepsilon) \subset (0, 1)$, во всех точках которого функция Y принимает лишь положительные значения. Покажем, что Y является знакопостоянной функцией на всем интервале $(0, 1)$. Используя формулу (5.24), представим функцию Y в виде

$$Y(u) = \frac{1}{u} Y_1(u), \quad (5.26)$$

где

$$Y_1(u) := u^{\zeta+1} - 2 \sin^2\left(\frac{\pi u}{4}\right). \quad (5.27)$$

В силу равенства (5.26) необходимо показать, что функция Y_1 является знакопостоянной на интервале $(0, 1)$, т.е. что $Y_1(u) > 0$. Исходя из формулы (5.27), это равносильно доказательству справедливости неравенства $u^{\zeta+1} > 2 \sin^2(\pi u/4)$ для любого $u \in (0, 1)$. Очевидно, что данное неравенство равносильно соотношению $u^{(\zeta+1)/2} > \sqrt{2} \sin(\pi u/4)$, $0 < u < 1$. Таким образом, первоначальная задача свелась к доказательству знакоположительности функции

$$Y_2(u) := u^{(\zeta+1)/2} - \sqrt{2} \sin \frac{\pi u}{4} \quad (5.28)$$

при $u \in (0, 1)$. Доказательство этого факта проведем, применив метод рассуждений от противного. Полагаем, что Y_2 является знакопеременной функцией, т.е. существует некоторая точка $z \in (0, 1)$, в которой Y_2 меняет знак. Исходя из непрерывности функции Y_2 , рассмотрим ее на отрезке $[0, 1]$. В силу формулы (5.28) и предположения относительно точки z получаем $Y_2(0) = Y_2(z) = Y_2(1) = 0$. Тогда из теоремы Ролля следует, что производная первого порядка функции Y_2 , т.е.

$$Y_2^{(1)}(u) = \frac{\zeta + 1}{2} u^{(\zeta-1)/2} - \sqrt{2} \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi u}{4}, \quad (5.29)$$

должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух различных нулей. Учитывая, что $\zeta = \pi/2 - 1$, из формулы (5.29) получаем $Y_2^{(1)}(1) = 0$. Из теоремы Ролля следует, что производная второго порядка функции Y_2 , т.е.

$$Y_2^{(2)}(u) = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \sin \frac{\pi u}{4} - \frac{(\zeta - 1)^2}{4} u^{(\zeta-3)/2}, \quad (5.30)$$

также должна иметь на интервале $(0, 1)$ не менее двух различных нулей. Однако производная $Y_2^{(2)}$ в силу вида формулы (5.30) может иметь на $(0, 1)$ не более одного нуля, поскольку является разностью двух функций, первая из которых монотонно

возрастает и выпукла вверх, а вторая монотонно убывает и выпукла вниз. Полученное противоречие доказывает справедливость неравенства $Y_2(u) > 0$ для любого $u \in (0, 1)$, а значит, и справедливость первого из неравенств в условии (5.22).

Для доказательства справедливости второго неравенства в указанном условии рассмотрим согласно соотношению (5.23) вспомогательную функцию

$$Z(u) := u^\zeta - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi - 2}{2u}, \quad (5.31)$$

где $1 \leq u < \infty$. Производная первого порядка этой функции

$$Z^{(1)}(u) = \zeta u^{\zeta-1} - \frac{\pi - 2}{2u^2} = \frac{1}{u^2} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) u^{\zeta+1} + 1 - \frac{\pi}{2} \right\}$$

принимает положительные значения при $1 < u < \infty$. Поскольку в силу формулы (5.31) $Z(1) = 0$, то очевидно, что функция Z является положительной и монотонно возрастающей на рассматриваемом интервале. Следовательно, второе неравенство в условии (5.22) также имеет место и функция $\tilde{\Psi}$ является мажорантой, удовлетворяющей условию (5.3). Теорема 3 доказана.

Определенный интерес, по нашему мнению, представляет вычисление наилучших приближений промежуточных производных функций $f \in W^r(\omega^*, \Psi)$ подпространствами целых функций экспоненциального типа. Этому вопросу посвящено следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\mu, r \in \mathbb{N}$, $\mu \leq r$, ν – произвольное конечное положительное число, Ψ – мажоранта, удовлетворяющая условию (5.3) для любого конечного значения $\sigma > \nu\pi$. Тогда справедливо равенство

$$\sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)}) : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\} = \frac{\pi^{1-\mu}}{4\nu^\mu} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (5.32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая в следствии 3 $\sigma := \nu\pi$, $t := \pi/\sigma$ и используя определение класса $W^r(\omega^*, \Psi)$, получаем оценку сверху

$$\sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)}) : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\} \leq \frac{\pi^{1-\mu}}{4\nu^\mu} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (5.33)$$

Пусть далее $\tilde{\varepsilon} := \varepsilon\nu\pi$, где $\varepsilon \in (0, \sigma_*)$ – произвольное число, $\sigma_* = \min(\sigma, 1)$, $\hat{\sigma} := \sigma + \tilde{\varepsilon} = \nu\pi(1 + \varepsilon)$. Для получения оценки снизу экстремальной характеристики, записанной в левой части неравенства (5.33), рассмотрим целую функцию $\lambda_{\tilde{\varepsilon}}$, определенную формулой (2.16) и являющуюся целой экспоненциального типа $\hat{\sigma}$. Согласно формулам (2.2) и (2.17) имеем

$$\|\lambda_{\tilde{\varepsilon}}\|^2 = 2 \int_{\sigma}^{\sigma+\tilde{\varepsilon}} |\mathcal{F}(\lambda_{\tilde{\varepsilon}}, \tau)|^2 d\tau = 2\tilde{\varepsilon}. \quad (5.34)$$

Для целой функции

$$\lambda_{\tilde{\varepsilon}}^*(x) := \frac{\rho_{\varepsilon}}{\sqrt{2\tilde{\varepsilon}}} \lambda_{\tilde{\varepsilon}}(x), \quad (5.35)$$

где величина ρ_{ε} определена формулой (5.8), используя равенство (5.34), получаем $\|\lambda_{\tilde{\varepsilon}}^*\| = \rho_{\varepsilon}$. Следовательно, целая функция (5.35) принадлежит множеству $\mathcal{B}_{\hat{\sigma}}(\rho_{\varepsilon})$,

введенному при доказательстве теоремы 3. Поскольку $\mathcal{B}_{\widehat{\sigma}}(\rho_\varepsilon) \subset W^r(\omega^*, \Psi)$, то функция λ_ε^* является элементом класса $W^r(\omega^*, \Psi)$. На основании соотношений (2.31), (5.8) и (5.35) получаем

$$\begin{aligned} \sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)}) : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\} &\geq \mathcal{A}_{\nu\pi}((\lambda_\varepsilon^*)^{(r-\mu)}) = \frac{\rho_\varepsilon}{\sqrt{2\varepsilon}} \mathcal{A}_{\nu\pi}(\lambda_\varepsilon^{(r-\mu)}) \geq \rho_\varepsilon(\nu\pi)^{r-\mu} \\ &= \frac{\pi(\nu\pi)^{r-\mu}}{4(\widehat{\sigma})^r} \Psi\left(\frac{\pi}{\widehat{\sigma}}\right) = \frac{\pi^{1-\mu}}{4\nu^\mu} \mathcal{K}_{1+\varepsilon}(\Psi, \nu, r), \end{aligned} \quad (5.36)$$

где величина $\mathcal{K}_{1+\varepsilon}(\Psi, \nu, r)$ определена в конце доказательства теоремы 3. Проводя рассуждения, аналогичные имевшим место при получении оценки снизу (5.21), и используя равенство (5.20), из соотношения (5.36) имеем

$$\sup\{\mathcal{A}_{\nu\pi}(f^{(r-\mu)}) : f \in W^r(\omega^*, \Psi)\} \geq \frac{\pi^{1-\mu}}{4\nu^\mu} \Psi\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (5.37)$$

Требуемое равенство (5.32) получаем, сопоставляя неравенства (5.33) и (5.37), чем и завершаем доказательство утверждения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Бернштейн, “О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени”, *Собрание сочинений*, Т. 2, АН СССР, М., 1952, 371–375.
- [2] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [3] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматлит, М., 1960.
- [4] М. Ф. Тиман, “Приближение функций, заданных на всей вещественной оси, целыми функциями экспоненциального типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 1968, № 2, 89–101.
- [5] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.
- [6] И. И. Ибрагимов, *Теория приближения целыми функциями*, Элм, Баку, 1979.
- [7] И. И. Ибрагимов, Ф. Г. Насибов, “Об оценке наилучшего приближения суммируемой функции на вещественной оси посредством целых функций конечной степени”, *Докл. АН СССР*, **194**:5 (1970), 1013–1016.
- [8] В. Ю. Попов, “О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа”, *Изв. вузов. Матем.*, 1972, № 6, 65–73.
- [9] Ф. Г. Насибов, “О приближении в L_2 целыми функциями”, *Докл. АН Азерб. ССР*, **42**:4 (1986), 3–6.
- [10] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbb{R}^m)$ ”, *Сборник научных трудов, Тр. ИММ УрО РАН*, **5**, 1998, 183–198.
- [11] В. Г. Доронин, А. А. Лигун, “О точных неравенствах типа Джексона для целых функций в L_2 ”, *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. матем.*, **15**:8 (2007), 89–93.
- [12] А. А. Лигун, В. Г. Доронин, “Точные константы в неравенствах типа Джексона для L_2 -аппроксимации на прямой”, *Укр. матем. журн.*, **61**:1 (2009), 92–98.
- [13] V. V. Arestov, “On Jackson inequalities for approximation in L^2 of periodic functions by trigonometric polynomials and of functions on the line by entire functions”, *Approxim Theory*, M. Drinov Acad. Publ. House, Sofia, 2004, 1–19.
- [14] S. B. Vakarchuk, “Exact constant in an inequality of Jackson type for L_2 -approximation on the line and exact values of mean widths of functional classes”, *East J. Approx.*, **10**:1-2 (2004), 27–39.

- [15] С. Б. Вакарчук, М. Б. Вакарчук, “О наилучшем среднеквадратическом приближении целыми функциями конечной степени на прямой”, *Вісник Дніпропетровського ун-ту. Сер. матем.*, **17**:6/1 (2009), 36–41.
- [16] С. Б. Вакарчук, В. Г. Доронин, “Наилучшие среднеквадратические приближения целыми функциями конечной степени на прямой и точные значения средних поперечников функциональных классов”, *Укр. матем. журн.*, **62**:8 (2010), 1032–1043.
- [17] С. Н. Васильев, “Неравенство Джексона–Стечкина в $L_2[-\pi, \pi]$ ”, *Теория приближений. Асимптотические разложения*, Сборник статей, Тр. ИММ УрО РАН, **7**, 2001, 75–84.
- [18] Л. В. Тайков, “Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности функций из L_2 ”, *Матем. заметки*, **20**:3 (1976), 433–438.
- [19] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, Гостехиздат, М., 1948.
- [20] Э. Беккенбах, Р. Беллман, *Неравенства*, Мир, М., 1965.
- [21] Н. И. Черных, “О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 ”, *Матем. заметки*, **2**:5 (1967), 513–522.
- [22] А. А. Лигун, “Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 ”, *Матем. заметки*, **24**:6 (1978), 785–792.
- [23] В. В. Шалаев, “О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков”, *Укр. матем. журн.*, **43**:1 (1991), 125–129.
- [24] С. Б. Вакарчук, “Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 ”, *Матем. заметки*, **80**:1 (2006), 11–19.
- [25] М. Ш. Шабозов, Г. А. Юсупов, “Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников”, *Матем. заметки*, **90**:5 (2011), 764–775.
- [26] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Вища школа, Харьков, 1984.
- [27] В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко, *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики*, Наука, М., 1987.
- [28] А. И. Гусейнов, Х. Ш. Мухтаров, *Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений*, Наука, М., 1980.
- [29] Г. Г. Магарил-Ильяев, “Средняя размерность, поперечники и оптимальное восстановление соболевских классов функций на прямой”, *Матем. сб.*, **182**:11 (1991), 1635–1656.
- [30] Г. Г. Магарил-Ильяев, “Средняя размерность и поперечники классов функций на прямой”, *Докл. АН СССР*, **318**:1 (1991), 35–38.
- [31] В. М. Тихомиров, “Об аппроксимативных характеристиках гладких функций многих переменных”, *Теория кубатурных формул и вычислительная математика*, Наука, Новосибирск, 1980, 183–188.
- [32] А. И. Шевчук, *Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций*, Наукова думка, Киев, 1992.

С. Б. Вакарчук

Днепропетровский университет им. Альфреда

Нобеля, Украина

E-mail: sbvakarchuk@mail.ru

Поступило

09.08.2013

Исправленный вариант

10.12.2013