Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо, Критерий вполне
неопределенности
матричной задачи Неванлинны–Пика, *Матем. замет-*
ки, 2014, том 96, выпуск 5, 658–673

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10373>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:46:42

Критерий вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны–Пика

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо

Получен новый критерий вполне неопределенности для классической и матричной задачи Неванлинны–Пика в терминах сходимости двух матричных рядов. Элементы этих рядов являются положительными матрицами и выражаются через некоторые аналоги классических параметров Шура.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10373

1. Постановка задачи. Пусть даны целые числа $m, n \geq 1$. Множество m -мерных комплексных столбцов $x = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_m)$ со стандартной структурой линейного пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и скалярным произведением $(x, y) = \sum_{j=1}^m \bar{x}_j y_j$ обозначим через $\mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}^{m \times n}$ обозначим множество комплексных матриц с m строками и n столбцами. Пусть

$$\mathbb{C}_H^{m \times m} = \{A \in \mathbb{C}^{m \times m} : (Ax, y) = (x, Ay) \text{ для всех } x, y \in \mathbb{C}^m\}$$

обозначает множество эрмитовых матриц. Эрмитова матрица $A \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ называется *неотрицательной*, если $(x, Ax) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ обозначим множество неотрицательных матриц m -го порядка. Неотрицательная матрица $A \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ называется *положительной*, если $(x, Ax) > 0$ для всех ненулевых векторов $x \in \mathbb{C}^m$. Через $\mathbb{C}_{>}^{m \times m}$ обозначим множество положительных матриц m -го порядка. Для матриц $A, B \in \mathbb{C}_H^{m \times m}$ запись $A \geq B$ (соответственно $A > B$) будет обозначать, что $A - B \in \mathbb{C}_{\geq}^{m \times m}$ (соответственно $A - B \in \mathbb{C}_{>}^{m \times m}$). Единичную матрицу m -го порядка обозначим через I_m , а нулевую матрицу с m строками и n столбцами обозначим через $O_{m \times n}$. Для упрощения записи мы часто будем опускать индексы у матриц I_m и $O_{m \times n}$, если эти индексы легко определяются из контекста. Если $f(z)$ некоторая матрица-функция (МФ), то запись $f^*(z)$ будет обозначать сокращение для записи $(f(z))^*$. Для верхней полуплоскости введем обозначение

$$\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}.$$

Голоморфная МФ $w: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$ называется *неванлинновской*, если

$$\frac{w(z) - w^*(z)}{2i} \geq O \quad \text{для всех } z \in \mathbb{C}_+.$$

Класс неванлинновских МФ фиксированного порядка $m \geq 1$ обозначим через $\mathcal{R}_m$.

В задаче Неванлинны–Пика по последовательности узлов интерполяции

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \subset \mathbb{C}_+, \quad z_j \neq z_k, \quad j \neq k,$$

и последовательности интерполируемых значений

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \subset \mathbb{C}^{m \times m}$$

требуется описать все неванлинновские МФ $w \in \mathcal{R}_m$ такие, что

$$w(z_j) = w_j, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Через $\mathcal{F}_\infty$ обозначим множество всех решений задачи (1.1).

Задача Неванлинны–Пика и ее многочисленные аналоги были рассмотрены в работах многих авторов (см., например, статьи [1]–[4]). В монографии [5] содержится анализ современного состояния теории интерполяционных задач для неванлинновских функций и их аналогов.

Наряду с (1.1) мы будем рассматривать и усеченные задачи Неванлинны–Пика

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.2)$$

Через $\mathcal{F}_n$ обозначим множество решений задачи (1.2). Отметим, что

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n, \quad \mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n.$$

С усеченной задачей Неванлинны–Пика свяжем следующие блочные матрицы:

$$T_n = \begin{pmatrix} z_1^{-1}I & & \\ & \ddots & \\ & & z_n^{-1}I \end{pmatrix}, \quad K_n = T_n^{-1} \begin{pmatrix} \frac{w_1 - w_1^*}{z_1 - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_1 - w_n^*}{z_1 - \bar{z}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n - w_1^*}{z_n - \bar{z}_1} & \cdots & \frac{w_n - w_n^*}{z_n - \bar{z}_n} \end{pmatrix} T_n^{-1*},$$

$$u_n = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, \quad v_n = \begin{pmatrix} I \\ \vdots \\ I \end{pmatrix}, \quad R_{T_n}(z) = (I - zT_n)^{-1}. \quad (1.3)$$

Легко видеть, что выполнено основное тождество

$$T_n K_n - K_n T_n^* = v_n u_n^* - u_n v_n^*. \quad (1.4)$$

Мы будем рассматривать тот случай, когда все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными

$$K_n > O_{nm \times nm}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В этом случае множество $\mathcal{F}_n \neq \emptyset$ и множество $\mathcal{F}_\infty \neq \emptyset$ (см. [1], [4]). Приведем описание множества $\mathcal{F}_n$ в терминах дробно-линейных преобразований.

Резольвентной матрицей для усеченной задачи (1.2) называется

$$U_n(z) = \begin{pmatrix} \alpha_n(z) & \beta_n(z) \\ \gamma_n(z) & \delta_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + z v_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} u_n & -z v_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} v_n \\ z u_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} u_n & I - z u_n^* R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} v_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Пара мероморфных в $\mathbb{C}_+$ МФ $\begin{pmatrix} p(z) \\ q(z) \end{pmatrix}$ называется *неванлинновской*, если

$$p(z)p^*(z) + g(z)g^*(z) > O, \quad \begin{pmatrix} p^*(z) & g^*(z) \end{pmatrix} \mathcal{J} \begin{pmatrix} p(z) \\ g(z) \end{pmatrix} \geq O.$$

Здесь $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} O_m & -iI_m \\ iI_m & O_m \end{pmatrix}$. Мы будем пользоваться очевидными равенствами

$$\mathcal{J}^2 = I_{2m}, \quad \mathcal{J}^* = \mathcal{J}.$$

Две неванлинновские пары $\begin{pmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix}$ называются *эквивалентными*, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C}_+$ МФ $Q(z)$ такая, что

$$\begin{pmatrix} p_1(z) \\ q_1(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2(z) \\ q_2(z) \end{pmatrix} Q(z).$$

Классы эквивалентности неванлинновских МФ обозначим через $\overline{\mathcal{R}}_m$.

ТЕОРЕМА 1. Формула

$$w(z) = (\gamma_n(z)p(z) + \delta_n(z)q(z)) \cdot (\alpha_n(z)p(z) + \beta_n(z)q(z))^{-1}$$

устанавливает биективное соответствие между $\mathcal{F}_n$ и $\overline{\mathcal{R}}_m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 1 имеется в [1], [4].

Сформулируем некоторые известные результаты по теории матричных кругов Вейля, необходимые для дальнейшего исследования задачи Неванлинны–Пика. Зафиксируем точку $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$ и рассмотрим множество матриц

$$\mathcal{K}_n(z_0) = \{w(z_0) : w \in \mathcal{F}_n\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Множество $\mathcal{K}_n(z_0)$ допускает представление вида

$$\mathcal{K}_n(z_0) = \{c_n(z_0) + r_n(z_0)V\rho_n(z_0) : V^*V \leq I\}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\begin{aligned} c_n(z_0) &= (i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^*R_{T_n}^*(z_0)K_n^{-1}R_{T_n}(z_0)v_n)^{-1} \\ &\quad \times (i(\bar{z}_0 - z_0)u_n^*R_{T_n}^*(z_0)K_n^{-1}R_{T_n}(z_0)v_n - iI)^*, \\ r_n(z_0) &= (i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^*R_{T_n}^*(z_0)K_n^{-1}R_{T_n}(z_0)v_n)^{-1/2} > O, \\ \rho_n(z_0) &= (i(\bar{z}_0 - z_0)v_n^*R_{T_n}^*(\bar{z}_0)K_n^{-1}R_{T_n}(\bar{z}_0)v_n)^{-1/2} > O. \end{aligned} \quad (1.7)$$

С геометрической точки зрения множество $\mathcal{K}_n(z_0)$ из (1.6) можно считать матричным кругом с центром в точке $c_n(z_0)$, левым радиусом $r_n(z_0)$ и правым радиусом $\rho_n(z_0)$. Этот круг называется *матричным кругом Вейля*.

Из включения $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n$ следует, что

$$\mathcal{K}_{n+1}(z_0) \subset \mathcal{K}_n(z_0).$$

Пусть

$$\mathcal{K}_\infty(z_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{K}_n(z_0).$$

ТЕОРЕМА 3. При $n \rightarrow \infty$ существуют пределы

$$c_\infty(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n(z_0), \quad \rho_\infty(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(z_0) \geq O, \quad r_\infty(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z_0) \geq O.$$

Более того,

$$\mathcal{K}_\infty(z_0) = \{w(z_0) : w \in F_\infty\} = \{c_\infty(z_0) + r_\infty(z_0)V\rho_\infty(z_0) : V^*V \leq I\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем 2 и 3 имеется в [4], [6], [7].

Множество матриц $\mathcal{K}_\infty(z_0)$ называется *предельным кругом Вейля* в точке z_0 . Из теоремы Орлова [8] следует, что ранги радиусов предельных кругов Вейля не зависят от выбора точки $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Введем обозначения

$$m_+ = \text{rank } r_\infty(z_0), \quad m_- = \text{rank } \rho_\infty(z_0).$$

Ясно, что $0 \leq m_+, m_- \leq m$. Задача Неванлинны–Пика (1.1) называется *вполне неопределенной*, если

$$m_+ = m_- = m.$$

Основным результатом этой статьи является критерий вполне неопределенности задачи (1.1).

2. Мультипликативная структура резольвентной матрицы. Рассмотрим блочное разбиение матрицы K_j при $j > 1$

$$K_j = \begin{pmatrix} K_{j-1} & B_j \\ B_j^* & C_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ B_j^* K_{j-1}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_{j-1} & O \\ O & \hat{K}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & K_{j-1}^{-1} B_j \\ O & I \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\hat{K}_j = C_j - B_j^* K_{j-1}^{-1} B_j > O. \quad (2.2)$$

Рассмотрим аналогичные блочные разбиения матриц из (1.3)

$$T_j = \begin{pmatrix} T_{j-1} & O_{(j-1)m \times m} \\ O_{m \times (j-1)m} & z_j^{-1} I_m \end{pmatrix}, \quad R_{T_j}(z) = \begin{pmatrix} R_{T_{j-1}}(z) & O_{(j-1)m \times m} \\ O_{m \times (j-1)m} & (1 - z z_j^{-1})^{-1} I_m \end{pmatrix},$$

$$u_j = \begin{pmatrix} u_{j-1} \\ w_j \end{pmatrix}, \quad v_j = \begin{pmatrix} v_{j-1} \\ I_m \end{pmatrix}, \quad j > 1. \quad (2.3)$$

И пусть, далее,

$$\hat{v}_j = -B_j^* K_{j-1}^{-1} v_{j-1} + I_m, \quad \hat{u}_j = -B_j^* K_{j-1}^{-1} u_{j-1} + w_j, \quad j > 1. \quad (2.4)$$

Подставим блочные представления (2.1) и (2.3) в основное тождество (1.4). Воспользовавшись (2.4), получим индуцированные тождества ($j > 1$)

$$T_{j-1} K_{j-1} - K_{j-1} T_{j-1}^* = v_{j-1} u_{j-1}^* - u_{j-1} v_{j-1}^*, \quad (2.5)$$

$$K_{j-1} T_{j-1}^* K_{j-1}^* B_j - B_j \bar{z}_j^{-1} I_m = v_{j-1} \hat{u}_j^* - u_{j-1} \hat{v}_j^*, \quad (2.6)$$

$$z_j^{-1} I_m \hat{K}_j - \hat{K}_j \bar{z}_j^{-1} I_m = \hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*. \quad (2.7)$$

Множителями Бляшке–Потапова называются МФ

$$b_j(z) = I + \frac{z}{1 - \bar{z}_j^{-1}z} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \hat{K}_j^{-1} \hat{u}_j & -\hat{v}_j^* \hat{K}_j^{-1} \hat{v}_j \\ \hat{u}_j^* \hat{K}_j^{-1} \hat{u}_j & -\hat{u}_j^* \hat{K}_j^{-1} \hat{v}_j \end{pmatrix}, \quad j \geq 1. \quad (2.8)$$

Здесь

$$\hat{v}_1 = v_1, \quad \hat{u}_1 = u_1, \quad \hat{K}_1 = K_1. \quad (2.9)$$

Матрицы $(\hat{v}_j, \hat{u}_j)_{j=1}^\infty$, определенные формулами (2.4) и (2.9), называются *параметрами Шура*.

ТЕОРЕМА 4. *Резольвентная матрица $U_n(z)$ допускает представление в виде произведения множителей Бляшке–Потапова*

$$U_n(z) = b_1(z) \cdot b_2(z) \cdots b_n(z). \quad (2.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы получается непосредственными вычислениями с использованием индуцированных тождеств (2.5)–(2.7) (см. аналогичные вычисления в [9], [10]).

ТЕОРЕМА 5. *Пусть для всех $j \geq 1$ множители Бляшке–Потапова определены в (2.8). Тогда*

1) *матрицы $\hat{K}_j$ допускают представление*

$$\hat{K}_j = z_j \frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{z_j - \bar{z}_j} \bar{z}_j > O \quad (2.11)$$

и при всех $j \geq 1$ матрицы $\hat{u}_j$ и $\hat{v}_j$ невырождены;

2) *множители Бляшке–Потапова допускают представления*

$$b_j(z) = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \mathcal{P}_j, \quad (2.12)$$

в которых матрицы $\mathcal{P}_j$ выражаются через параметры Шура по формулам

$$\mathcal{P}_j = \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} \quad (2.13)$$

и удовлетворяют условиям

$$\mathcal{P}_j^2 = -\mathcal{P}_j, \quad \mathcal{P}_j \mathcal{J} \geq O; \quad (2.14)$$

3) *определители множителей Бляшке–Потапова вычисляются по формулам*

$$\det b_j(z) = \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z} \right)^m; \quad (2.15)$$

4) *$\mathcal{J}$ -формы множителей Бляшке–Потапова вычисляются по формулам*

$$\mathcal{J} - b_j(z) \mathcal{J} b_j^*(z) = \left(\left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 - 1 \right) \mathcal{P}_j \mathcal{J}; \quad (2.16)$$

5) *для следов матриц $\mathcal{P}_j$ имеем*

$$\operatorname{tr} \mathcal{P}_j = -m. \quad (2.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Равенство и неравенство в (2.11) следуют из (2.7) и (2.2) соответственно. Теперь из (2.11) имеем

$$\operatorname{Im}(\hat{u}_j \hat{v}_j^*) = \frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{2i} > 0.$$

Отсюда немедленно получаем невырожденность произведения $\hat{u}_j \hat{v}_j^*$ и, следовательно, невырожденность матриц $\hat{u}_j$ и $\hat{v}_j$.

2) Подставим (2.11) в (2.8). После очевидных преобразований получим (2.12). Далее имеем (см. (2.13))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j^2 &= \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} \\ &= - \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^* \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^* \\ i \end{pmatrix}^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} = -\mathcal{P}_j. \end{aligned}$$

И, наконец,

$$\mathcal{P}_j \mathcal{J} = \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \geq 0.$$

3) Покажем, что матрицы

$$\begin{aligned} T &= \begin{pmatrix} I & I \\ \hat{v}_j^{-1} \hat{u}_j & \hat{u}_j^* \hat{v}_j^{-1*} \end{pmatrix}, \\ T^{-1} &= \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{v}_j \hat{u}_j^* \hat{v}_j^{-1*} & -\hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{v}_j \\ -\hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{u}_j & \hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{v}_j \end{pmatrix} \end{aligned}$$

взаимно обратны. Пусть $T^{-1}T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\begin{aligned} a_{11} &= \hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{v}_j \hat{u}_j^* \hat{v}_j^{-1*} - \hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} \hat{v}_j \hat{v}_j^{-1} \hat{u}_j \\ &= \hat{v}_j^* (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*)^{-1} (\hat{v}_j \hat{u}_j^* - \hat{u}_j \hat{v}_j^*) \hat{v}_j^{-1*} = I. \end{aligned}$$

Аналогичным образом убеждаемся в том, что $a_{12} = 0$, $a_{21} = 0$, $a_{22} = I$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} T^{-1}b_j(z)T &= I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} T^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} (\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*)^{-1} (-\hat{u}_j, \hat{v}_j) T \\ &= I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \begin{pmatrix} O \\ \hat{v}_j^* \end{pmatrix} (\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*)^{-1} (O, -(\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*) \hat{v}_j^{*-1}) \\ &= I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \begin{pmatrix} O \\ I \end{pmatrix} (O, -I) = \begin{pmatrix} I & O \\ O & \left(1 - \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)}\right) I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & O \\ O & \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_j - z}{\bar{z}_j - z}\right) I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда следует формула (2.15) и тот факт, что

$$T^{-1} \mathcal{P}_j T = \begin{pmatrix} O & O \\ O & -I \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

4) Непосредственными вычислениями с использованием (2.14) получаем равенство (2.16).

5) Формула (2.17) немедленно следует из (2.18).

Теорема 5 доказана.

Покажем, что множители Бляшке–Потапова (2.12) допускают стандартное представление, часто встречающееся в математической литературе. Имеем

$$\begin{aligned} b_j(z) &= I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \mathcal{P}_j = I + \mathcal{P}_j + \left(\frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} - 1 \right) \mathcal{P}_j \\ &= I + \mathcal{P}_j + b_{z_j}(z) \mathcal{P}_j. \end{aligned}$$

Здесь скалярный множитель Бляшке

$$b_{z_j}(z) = -\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j}$$

отличается от простейшего множителя Бляшке для верхней полуплоскости $(z - z_j)/(z - \bar{z}_j)$ лишь равным по модулю единице множителем $-\bar{z}_j/z_j$.

3. Нормированные множители Бляшке–Потапова. Матрица $\mathcal{V}$ называется $\mathcal{J}$ -растягивающей (соответственно $\mathcal{J}$ -унитарной), если выполнено неравенство $\mathcal{V}\mathcal{J}\mathcal{V}^* - \mathcal{J} \geq O$ (соответственно равенство $\mathcal{V}\mathcal{J}\mathcal{V}^* - \mathcal{J} = O$). Известно (см., например, [11]), что если матрица $\mathcal{V}$ является $\mathcal{J}$ -растягивающей (соответственно $\mathcal{J}$ -унитарной), то и матрица $\mathcal{V}^*$ является $\mathcal{J}$ -растягивающей (соответственно $\mathcal{J}$ -унитарной). Очевидно, что $\mathcal{J}$ -унитарные матрицы невырождены и из $\mathcal{J}$ -унитарности матрицы $\mathcal{V}$ следует $\mathcal{J}$ -унитарность матрицы $\mathcal{V}^{-1}$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть дан множитель Бляшке–Потапова $b_j(z)$ (см. (2.12)) и произвольная $\mathcal{J}$ -унитарная матрица $\mathcal{V}$. Тогда

1) МФ

$$b'_j(z) = \mathcal{V} b_j(z) \mathcal{V}^{-1} \quad (3.1)$$

является множителем Бляшке–Потапова вида

$$b'_j(z) = I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \mathcal{P}'_j, \quad (3.2)$$

где

$$\mathcal{P}'_j = \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1}; \quad (3.3)$$

2) матрица $\mathcal{P}'_j$ допускает представление

$$\mathcal{P}'_j = \begin{pmatrix} \hat{v}'_j{}^* \\ \hat{u}'_j{}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}'_j \hat{v}'_j{}^* - \hat{v}'_j \hat{u}'_j{}^* \\ i \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v}'_j & \hat{u}'_j \end{pmatrix} \mathcal{J}, \quad (3.4)$$

где модифицированные параметры Шура $\hat{v}'_j, \hat{u}'_j$ задаются формулами

$$(\hat{v}'_j, \hat{u}'_j) = (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{V}^*; \quad (3.5)$$

3) выполнены равенства

$$(\mathcal{P}'_j)^2 = -\mathcal{P}'_j, \quad \mathcal{P}'_j \mathcal{J} \geq O, \quad \text{tr } \mathcal{P}'_j = -m; \quad (3.6)$$

4) имеют место формулы

$$\det b'_j(z) = \left(\frac{\bar{z}_j z_j - z}{z_j \bar{z}_j - z} \right)^m, \quad \mathcal{J} - b'_j(z) \mathcal{J} b_j^*(z) = \left(\left| \frac{z - z_j}{z - \bar{z}_j} \right|^2 - 1 \right) \mathcal{P}'_j \mathcal{J}. \quad (3.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Формулы (3.2), (3.3) немедленно следуют из (3.1) и (2.12).
2) Сначала докажем равенство

$$\frac{\hat{u}'_j \hat{v}_j'^* - \hat{v}'_j \hat{u}_j'^*}{2i} = \frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{2i}. \quad (3.8)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u}'_j \hat{v}_j'^* - \hat{v}'_j \hat{u}_j'^*}{2i} &= -\frac{1}{2}(\hat{v}'_j, \hat{u}'_j) \mathcal{J} \begin{pmatrix} \hat{v}_j'^* \\ \hat{u}_j'^* \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{V}^* \mathcal{J} \mathcal{V} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2}(\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} = \frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{2i}. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'_j &= \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{V}^* \mathcal{J} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{v}_j'^* \\ \hat{u}_j'^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}'_j \hat{v}_j'^* - \hat{v}'_j \hat{u}_j'^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}'_j, \hat{u}'_j) \mathcal{J}. \end{aligned}$$

Здесь второе равенство следует из справедливого для $\mathcal{J}$ -унитарных матриц соотношения $\mathcal{V}^* \mathcal{J} = \mathcal{J} \mathcal{V}^{-1}$ и определения матрицы $\mathcal{P}_j$, а последнее из (3.5) и (3.8).

3) Воспользовавшись (3.3), (2.14), (2.17), получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}'_j)^2 &= \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} = \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} = -\mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} = -\mathcal{P}'_j, \\ \mathcal{P}'_j \mathcal{J} &= \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1} \mathcal{J} = \mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{J} \mathcal{V}^* \geq O, \\ \text{tr } \mathcal{P}'_j &= \text{tr}(\mathcal{V} \mathcal{P}_j \mathcal{V}^{-1}) = \text{tr } \mathcal{P}_j = -m. \end{aligned}$$

4) Воспользовавшись (3.1) и (2.15), получим

$$\det b'_j(z) = \det(\mathcal{V} b_j(z) \mathcal{V}^{-1}) = \det b_j(z) = \left(\frac{\bar{z}_j z_j - z}{z_j \bar{z}_j - z} \right)^m.$$

Первое из равенств (3.7) доказано. Второе равенство в (3.7) доказывается аналогичным образом.

Теорема 6 доказана.

ТЕОРЕМА 7. *Зафиксируем некоторую точку из верхней полуплоскости, не совпадающую с узлами интерполяции $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Тогда для множителей Бляшке–Потапова (2.12) имеют место $\mathcal{J}$ -полярные представления (см. [11])*

$$b_j(z_0) = \exp(\alpha_j \mathcal{P}_j) \cdot \mathcal{U}_j, \quad j \geq 1. \quad (3.9)$$

Здесь

$$\alpha_j = -\ln \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right| > 0, \quad \mathcal{J} - \mathcal{U}_j \mathcal{J} \mathcal{U}_j^* = O. \quad (3.10)$$

Для множителей Бляшке–Потапова (3.1) $b'_j(z) = \mathcal{V} b_j(z) \mathcal{V}^{-1}$ имеют место аналогичные $\mathcal{J}$ -полярные представления

$$b'_j(z_0) = \exp(\alpha_j \mathcal{P}'_j) \cdot \mathcal{U}'_j, \quad \mathcal{J} - \mathcal{U}'_j \mathcal{J} \mathcal{U}'_j{}^* = O, \quad j \geq 1. \quad (3.11)$$

Матрицы $\mathcal{P}'_j$ выражаются по формулам (3.4) через модифицированные параметры Шура $(\hat{v}'_j, \hat{u}'_j) = (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{V}^*$ (см. (3.5)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся элементарным неравенством

$$\left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 - 1 < 0, \quad z_0, z_j \in \mathbb{C}_+.$$

Отсюда, из (2.14) и (2.16) следует неравенство

$$\mathcal{J} - b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \leq O. \quad (3.12)$$

Из неравенства $0 < |(z_0 - z_j)/(z_0 - \bar{z}_j)|^2 < 1$ и из (3.10) следует, что $\alpha_j > 0$. Отсюда и из (2.14) имеем

$$\alpha_j \mathcal{P}_j \mathcal{J} \geq O. \quad (3.13)$$

Имеет место равенство

$$b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \mathcal{J} = (\exp(\alpha_j \mathcal{P}_j))^2. \quad (3.14)$$

Действительно, воспользовавшись (2.16), получим

$$b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) \mathcal{J} = (b_j(z_0) \mathcal{J} b_j^*(z_0) - \mathcal{J}) \mathcal{J} + I = \left(1 - \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \right) \mathcal{P}_j + I.$$

Из (2.14) следует, что $\mathcal{P}_j^k = (-1)^{k+1} \mathcal{P}_j$, $k > 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} (\exp(\alpha_j \mathcal{P}_j))^2 &= \exp(2\alpha_j \mathcal{P}_j) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\alpha_j \mathcal{P}_j)^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\alpha_j)^k (-1)^{k+1}}{k!} \mathcal{P}_j \\ &= I - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2\alpha_j)^k}{k!} \mathcal{P}_j = I + (1 - \exp(-2\alpha_j)) \mathcal{P}_j \\ &= I + \left(1 - \exp \ln \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \right) \mathcal{P}_j = I + \left(1 - \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \right) \mathcal{P}_j. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств следует (3.14). Соотношения (3.12)–(3.14) показывают, что формула (3.9) задает $\mathcal{J}$ -полярное представление матрицы $b_j(z_0)$ (см. [11]). $\mathcal{J}$ -полярное представление (3.11) доказывается аналогичным образом.

Теорема 7 доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть дана задача Неванлинны–Пика (1.1) такая, что все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными и зафиксирована некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Пусть (см. теорему 4) резольвентная матрица $U_n(z)$ представлена в виде произведения множителей Бляшке–Потапова

$$U_n(z) = \prod_{j=1}^n b_j(z) = \prod_{j=1}^n \left(I + \frac{(\bar{z}_j - z_j)z}{|z_j|^2(1 - \bar{z}_j^{-1}z)} \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{v}_j^* \\ \hat{u}_j^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u}_j \hat{v}_j^* - \hat{v}_j \hat{u}_j^* \\ i \end{pmatrix}^{-1}}_{\mathcal{P}_j} (\hat{v}_j, \hat{u}_j) \mathcal{J} \right), \quad (3.15)$$

где параметры Шура $(\hat{v}_j, \hat{u}_j)_{j=1}^\infty$ определены формулами (2.4) и (2.9). Тогда существует бесконечная последовательность $\mathcal{J}$ -унитарных матриц

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \dots, \mathcal{U}_n, \dots$$

такая, что

$$U_n(z) = \mathbf{b}_1(z)\mathbf{b}_2(z)\mathbf{b}_3(z) \cdots \mathbf{b}_n(z)\mathcal{U}_n \cdots \mathcal{U}_3\mathcal{U}_2\mathcal{U}_1, \quad n \geq 1. \quad (3.16)$$

Множители Бляшке–Потапова $\mathbf{b}_j(z)$ из (3.16) связаны с множителями $b_j(z)$ из (3.15) соотношениями

$$\mathbf{b}_1(z) = b_1(z)\mathcal{U}_1^{-1}, \quad \mathbf{b}_j(z) = (\mathcal{U}_{j-1} \cdots \mathcal{U}_1)b_j(z)(\mathcal{U}_{j-1} \cdots \mathcal{U}_1)^{-1}\mathcal{U}_j^{-1}, \quad j > 1.$$

В точке z_0 множители $\mathbf{b}_j(z)$ нормированы к $\mathcal{J}$ -модулю

$$\mathbf{b}_j(z_0) = \exp(\alpha_j \mathcal{P}'_j), \quad j \geq 1, \quad (3.17)$$

где

$$\alpha_j = -\ln \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|, \quad \mathcal{P}'_j = \left(\frac{\hat{v}_j'^*}{\hat{u}_j'^*} \right) \left(\frac{\hat{u}_j'\hat{v}_j'^* - \hat{v}_j'\hat{u}_j'^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j', \hat{u}_j')\mathcal{J} \quad (3.18)$$

и модифицированные параметры Шура имеют вид

$$(\hat{v}_1', \hat{u}_1') = (\hat{v}_1, \hat{u}_1), \quad (\hat{v}_j', \hat{u}_j') = (\hat{v}_j, \hat{u}_j)\mathcal{U}_1^* \cdots \mathcal{U}_{j-1}^*. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим метод математической индукции. При $n = 1$ резольвентная матрица $U_1(z) = b_1(z)$. Рассмотрим $\mathcal{J}$ -полярное представление матрицы $b_1(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}_1) \cdot \mathcal{U}_1$ и положим $\mathbf{b}_1(z) = b_1(z)\mathcal{U}_1^{-1}$. Теперь резольвентную матрицу запишем в виде $U_1(z) = \mathbf{b}_1(z)\mathcal{U}_1$. Отметим, что $\mathbf{b}_1(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}_1)$ и теорема доказана при $n = 1$.

Пусть формула (3.16) доказана для некоторого $n \geq 1$. Отсюда и из теоремы 4 имеем

$$U_{n+1}(z) = U_n(z)b_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n}} \mathbf{b}_j(z) \cdot \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right) b_{n+1}(z) \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right)^{-1} \cdot \prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j. \quad (3.20)$$

Рассмотрим множитель Бляшке–Потапова

$$\begin{aligned} b'_{n+1}(z) &= \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right) b_{n+1}(z) \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right)^{-1} \\ &= I + \frac{(\bar{z}_{n+1} - z_{n+1})z}{|z_{n+1}|^2(1 - \bar{z}_{n+1}^{-1}z)} \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right) \mathcal{P}_{n+1} \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right)^{-1}, \end{aligned}$$

который можно записать в виде

$$b'_{n+1}(z) = I + \frac{(\bar{z}_{n+1} - z_{n+1})z}{|z_{n+1}|^2(1 - \bar{z}_{n+1}^{-1}z)} \mathcal{P}'_{n+1}.$$

Здесь матрица

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right) \cdot \mathcal{P}_{n+1} \cdot \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right)^{-1}$$

с помощью модифицированных параметров Шура

$$(\widehat{v}'_{n+1}, \widehat{u}'_{n+1}) = (\widehat{v}_{n+1}, \widehat{u}_{n+1}) \left(\prod_{j=1}^{\overleftarrow{n}} \mathcal{U}_j \right)^*$$

записывается в виде (см. (3.4))

$$\mathcal{P}'_{n+1} = \begin{pmatrix} \widehat{v}'_{n+1}^* \\ \widehat{u}'_{n+1}^* \end{pmatrix} \left(\frac{\widehat{u}'_{n+1} \widehat{v}'_{n+1}^* - \widehat{v}'_{n+1} \widehat{u}'_{n+1}^*}{i} \right)^{-1} (\widehat{v}'_{n+1}, \widehat{u}'_{n+1}) \mathcal{J}.$$

Рассмотрим $\mathcal{J}$ -полярное представление (3.11) матрицы $b'_{n+1}(z_0)$

$$b'_{n+1}(z_0) = \exp(\alpha_{n+1} \mathcal{P}'_{n+1}) \cdot \mathcal{U}_{n+1}$$

и нормированный множитель Бляшке–Потапова

$$\mathbf{b}_{n+1}(z) = b'_{n+1}(z) \mathcal{U}_{n+1}^{-1}.$$

Теперь (3.20) можно записать в виде

$$U_{n+1}(z) = \prod_{j=1}^{\overrightarrow{n+1}} \mathbf{b}_j(z) \prod_{j=1}^{\overleftarrow{n+1}} \mathcal{U}_j.$$

По построению множитель $\mathbf{b}_{n+1}(z)$ в точке z_0 нормирован к $\mathcal{J}$ -модулю

$$\mathbf{b}_{n+1}(z_0) = \exp(\alpha_{n+1} \mathcal{P}'_{n+1}).$$

Теорема 8 доказана.

Таким образом, резольвентная матрица (1.5) допускает мультипликативное представление

$$U_n(z) = \mathbf{b}_1(z) \cdot \mathbf{b}_2(z) \cdots \mathbf{b}_n(z) \mathcal{V}_n. \quad (3.21)$$

Здесь матрицы

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n \cdots \mathcal{U}_1$$

являются $\mathcal{J}$ -унитарными.

Основной конструкцией при работе с резольвентными матрицами является конструкция вида $U_n(z) \mathcal{J} U_n^*(z)$. Поэтому резольвентная матрица определена с точностью до умножения справа на произвольную $\mathcal{J}$ -унитарную матрицу. Теперь из (3.21) следует, что произведение Бляшке–Потапова нормированных множителей

$$\mathfrak{U}_n(z) = \mathbf{b}_1(z) \cdot \mathbf{b}_2(z) \cdots \mathbf{b}_n(z) \quad (3.22)$$

является резольвентной матрицей, которую мы будем называть нормированной резольвентной матрицей. Из (3.21) и (3.22) имеем

$$U_n(z) = \mathfrak{U}_n(z) \mathcal{V}_n, \quad \mathcal{J} - \mathcal{V}_n \mathcal{J} \mathcal{V}_n^* = O. \quad (3.23)$$

4. Критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны–Пика. Из определения резольвентной матрицы (1.5) и основного тождества (1.4) следует (см.

[12], [13]), что

$$\mathcal{J} - U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(\lambda) = i(z - \bar{\lambda}) \begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix} R_{T_n^*}(z) K_n^{-1} R_{T_n^*}^*(\lambda) \begin{pmatrix} v_n & u_n \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Подставим в это равенство $\bar{z}$ вместо λ . Получим $\mathcal{J} - U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(\bar{z}) = O$. Отсюда немедленно следует обратимость $U_n(z)$ и равенство

$$U_n^{-1}(z) = \mathcal{J}U_n^*(\bar{z})\mathcal{J}. \quad (4.2)$$

Подставим в (4.1) $\bar{z}$ вместо z и λ и умножим (4.1) слева и справа на $\mathcal{J}$. Воспользовавшись (4.2) и очевидным равенством $R_{T_n^*}^*(\bar{z}) = R_{T_n}(z)$, получим

$$\mathcal{J} - U_n^{-1*}(z)\mathcal{J}U_n^{-1}(z) = i(\bar{z} - z)\mathcal{J} \begin{pmatrix} v_n^* \\ u_n^* \end{pmatrix} R_{T_n}^*(z) K_n^{-1} R_{T_n}(z) \begin{pmatrix} v_n & u_n \end{pmatrix} \mathcal{J}.$$

Прямыми вычислениями с использованием (4.1) и (1.7) убеждаемся в том, что

$$U_n(z)\mathcal{J}U_n^*(z) = \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z) & O \\ O & -r_n^2(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_n^*(z) \\ O & I \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Или, переходя к обратным матрицам,

$$U_n^{-1*}(z)\mathcal{J}U_n^{-1}(z) = \begin{pmatrix} I & -c_n^*(z) \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^2(z) & O \\ O & -r_n^{-2}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -c_n(z) & I \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

ТЕОРЕМА 9. Пусть задача Неванлинны–Пика (1.1) является вполне неопределенной и точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Тогда сходится произведение

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \quad (4.5)$$

и сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.10) и (2.15)

$$\det U_n(z_0) = \prod_{j=i}^n \left(\frac{\bar{z}_j}{z_j} \cdot \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right)^m.$$

Поэтому из (4.3) и очевидного равенства $\det \mathcal{J} = (-1)^m$ имеем

$$(-1)^m \cdot \left(\prod_{j=i}^n \left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 \right)^m = (-1)^m (\det r_n(z_0))^2 \cdot (\det \rho_n(z_0))^{-2}. \quad (4.7)$$

Задача (1.1) вполне неопределена, т.е. $\det r_{\infty}(z_0) \neq 0$ и $\det \rho_{\infty}(z_0) \neq 0$. Переходя к пределу $n \rightarrow \infty$ в равенстве (4.7), получим сходимость произведения (4.5). Теперь сходимость ряда (4.6) следует из очевидного равенства

$$\left| \frac{z_0 - z_j}{z_0 - \bar{z}_j} \right|^2 = 1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}. \quad (4.8)$$

Теорема 9 доказана.

ТЕОРЕМА 10. Пусть дана задача Неванлинны–Пика (1.1) такая, что все усеченные задачи (1.2) являются вполне неопределенными и зафиксирована некоторая точка $z_0 \in \mathbb{C}_+ \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$. Пусть, далее, модифицированные параметры Шура $(\hat{v}'_j, \hat{u}'_j)_{j=1}^\infty$ определены формулами (3.19). Для того, чтобы матричная задача Неванлинны–Пика (1.1) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \hat{v}'_j{}^* \left(\frac{\hat{u}'_j \hat{v}'_j{}^* - \hat{v}'_j \hat{u}'_j{}^*}{i} \right)^{-1} \hat{v}'_j, \\ & \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \hat{u}'_j{}^* \left(\frac{\hat{u}'_j \hat{v}'_j{}^* - \hat{v}'_j \hat{u}'_j{}^*}{i} \right)^{-1} \hat{u}'_j. \end{aligned} \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть задача (1.1) является вполне неопределенной, т.е. $r_\infty(z_0) > 0$ и $\rho_\infty(z_0) > 0$. Из (3.23) следует, что (4.3) и (4.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_n(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^*(z_0) &= \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z_0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z_0) & O \\ O & -r_n^2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{U}_n^{-1*}(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^{-1}(z_0) &= \begin{pmatrix} I & -c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^2(z_0) & O \\ O & -r_n^{-2}(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -c_n(z_0) & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ правые части этих равенств стремятся к невырожденным матрицам. Поэтому и левые части стремятся к невырожденным матрицам при $n \rightarrow \infty$. Но тогда существуют константы $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что

$$\|\mathcal{J} - \mathfrak{U}_n(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^*(z_0)\| < C_1, \quad \|\mathcal{J} - \mathfrak{U}_n^{-1*}(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^{-1}(z_0)\| < C_2. \quad (4.10)$$

В точке z_0 резольвентная матрица $\mathfrak{U}_n(z_0)$ является произведением $\mathcal{J}$ -модулей (см. (3.17), (3.22))

$$\mathfrak{U}_n(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}'_1) \cdot \exp(\alpha_2 \mathcal{P}'_2) \cdots \exp(\alpha_n \mathcal{P}'_n). \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) следует сходимость ряда $\sum_{j=1}^\infty \alpha_j \mathcal{P}'_j$ (см. [11]), который можно записать в виде (см. (3.18) и (4.8))

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \right) \mathcal{P}'_j. \quad (4.12)$$

Ряд (4.6) сходится. Поэтому

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(\bar{z}_j - z_j)(\bar{z}_0 - z_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} = 0.$$

Отсюда следует, что ряд (4.12) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$- \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \mathcal{P}'_j$$

или, что тоже самое, сходится ряд

$$4 \operatorname{Im} z_0 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \begin{pmatrix} \hat{v}'_j{}^* \\ \hat{u}'_j{}^* \end{pmatrix} \left(\frac{\hat{u}'_j \hat{v}'_j{}^* - \hat{v}'_j \hat{u}'_j{}^*}{i} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v}'_j \\ \hat{u}'_j \end{pmatrix} \mathcal{J}.$$

Отсюда немедленно следует (4.9).

Достаточность. Пусть сходятся ряды в (4.9). Тогда сходятся и ряды (см., например, [14])

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \hat{u}_j'^* \left(\frac{\hat{u}_j' \hat{v}_j'^* - \hat{v}_j' \hat{u}_j'^*}{i} \right)^{-1} \hat{v}_j',$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \hat{v}_j'^* \left(\frac{\hat{u}_j' \hat{v}_j'^* - \hat{v}_j' \hat{u}_j'^*}{i} \right)^{-1} \hat{u}_j'.$$

Из (4.9) и (4.14) следует сходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} z_j}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \cdot \left(\frac{\hat{v}_j'^*}{\hat{u}_j'^*} \right) \left(\frac{\hat{u}_j' \hat{v}_j'^* - \hat{v}_j' \hat{u}_j'^*}{i} \right)^{-1} (\hat{v}_j', \hat{u}_j') \mathcal{J},$$

члены которого лишь постоянным множителем отличается от членов ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \mathcal{P}_j'. \quad (4.13)$$

Из сходимости ряда (4.15) следует сходимость ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \operatorname{tr} \mathcal{P}_j'$$

и, так как $\operatorname{tr} \mathcal{P}_j' = -m$ (см. (3.6)), сходится ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2}.$$

Отсюда немедленно следует, что ряд (4.15) сходится и расходится вместе с рядом

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(z_j - \bar{z}_j)(z_0 - \bar{z}_0)}{|z_0 - \bar{z}_j|^2} \right) \mathcal{P}_j',$$

который (см. (4.8) и (3.10)) можно записать в виде $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \mathcal{P}_j'$. Сходимость этого ряда (см. [11]) обеспечивает сходимость к невырожденному пределу бесконечного матричного произведения $\prod_{j=0}^{\infty} \exp(\alpha_j \mathcal{P}_j')$, т.е. при $n \rightarrow \infty$ к невырожденной матрице сходится последовательность матриц (см. (3.17) и (3.21))

$$\mathfrak{U}_n(z_0) = \exp(\alpha_1 \mathcal{P}_1') \cdot \exp(\alpha_2 \mathcal{P}_2') \cdots \exp(\alpha_n \mathcal{P}_n').$$

Поэтому при $n \rightarrow \infty$ к невырожденной матрице сходятся левая часть равенства

$$\mathfrak{U}_n(z_0) \mathcal{J} \mathfrak{U}_n^*(z_0) = \begin{pmatrix} I & O \\ c_n(z_0) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n^{-2}(z_0) & O \\ O & -r_n^2(z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & c_n^*(z_0) \\ O & I \end{pmatrix}.$$

Отсюда немедленно следует, что $r_{\infty}(z_0) > 0$ и $\rho_{\infty}(z_0) > 0$.

Теорема 10 доказана.

Критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны–Пика (4.9) аналогичен критерию Гамбургера вполне неопределенности проблемы моментов. Для сравнения этих критериев сформулируем необходимые результаты по матричной проблеме моментов Гамбургера (см. [14]–[19]).

Последовательность эрмитовых $m \times m$ матриц $(s_j)_{j=0}^{\infty}$ называется *позитивной*, если все блочные матрицы Ганкеля $H_j = (s_{p+q})_{p,q=0}^j$, $j \geq 0$ положительны. Позитивной последовательности $m \times m$ матриц $(s_j)_{j=0}^{\infty}$ поставим в соответствие матричную проблему моментов Гамбургера, в которой требуется описать все неотрицательные матричные меры σ такие, что

$$s_j = \int_{\mathbb{R}} t^j \sigma(dt) \quad \text{для всех } j \geq 0. \quad (4.14)$$

С проблемой моментов связан симметрический оператор, для дефектных чисел которого $m_{\pm}$ справедливо следующее:

- а) имеют место неравенства $0 \leq m_+$, $m_- \leq m$ (см. [16]);
- б) максимального значения m дефектные числа m_+ и m_- достигают одновременно (см. [17]);
- в) дефектными числами m_+ и m_- могут быть любые два числа, которые удовлетворяют условиям $0 \leq m_+$, $m_- \leq m - 1$ (см. [18], [19]).

Проблема моментов (4.14) называется *вполне неопределенной*, если дефектные числа соответствующего симметрического оператора максимальны $m_+ = m_- = m$.

Для того, чтобы матричная проблема моментов (4.14) была вполне неопределенной, необходимо и достаточно, чтобы сходились матричные ряды

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_j^*(0)P_j(0), \quad \sum_{j=0}^{\infty} Q_j^*(0)Q_j(0). \quad (4.15)$$

Здесь через $P_j(z)$ и $Q_j(z)$ обозначены соответственно матричные многочлены 1-го и 2-го рода, ассоциированные с матричной проблемой моментов (4.14).

Аналогия между критериями вполне неопределенности (4.9) и (4.15) не заканчивается простым внешним сходством. С помощью теоремы Гамбургера–Неванлинны проблема моментов сводится к задаче описания неванлинновских МФ с предписанным асимптотическим поведением в бесконечности. А эту задачу можно рассматривать как кратную интерполяционную задачу для неванлинновских МФ с единственным узлом интерполяции в точке $z = \infty$. Члены рядов (4.9) содержат скалярные множители $\operatorname{Im} z_j / |z_0 - \bar{z}_j|^2$. Эти множители приводят к расходимости рядов (4.9), если узлы интерполяции не достаточно быстро стягиваются к границе области определения неванлинновских МФ $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. У интерполяционной задачи, соответствующей проблеме моментов, единственным узлом интерполяции является точка $z = \infty$. Поэтому члены рядов (4.15) не содержат множителей вида $\operatorname{Im} z_j / |z_0 - \bar{z}_j|^2$. Отметим, что члены рядов (4.15) можно выразить через параметры Шура и тем самым углубить аналогию между критериями вполне неопределенности (4.9) и (4.15).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. В. Ковалишина, В. П. Потапов, “Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны–Пика”, *Докл. АН Арм. ССР*, **59**:1 (1974), 17–22.

- [2] И. П. Федчина, “Критерий разрешимости касательной проблемы Неванлинны–Пика”, *Матем. исследования*, **7**:4 (26) (1972), 213–226.
- [3] А. А. Нудельман, “Об одной проблеме типа проблемы моментов”, *Докл. АН СССР*, **233**:5 (1977), 792–795.
- [4] И. В. Ковалишина, “Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:3 (1983), 455–497.
- [5] D. Z. Arov, H. Dym, *J-Contractive Matrix Valued Functions and Related Topics*, Encyclopedia Math. Appl., **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008.
- [6] Ю. Л. Шмұльян, “Операторные шары”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **6**, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1968, 68–81.
- [7] V. K. Dubovoj, B. Fritzsche, B. Kirstein, *Matricial Version of the Classical Schur Problem*, Teubner-Texte Math., **129**, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1992.
- [8] С. А. Орлов, “Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:3 (1976), 593–644.
- [9] Ю. М. Дюкарев, “Факторизация оператор-функций мультипликативного класса Стильтеса”, *Докл. НАН Украины*, 2000, №9, 23–26.
- [10] Ю. М. Дюкарев, “О неопределенности интерполяционных задач в классе Стильтеса”, *Матем. сб.*, **196**:3 (2005), 61–88.
- [11] В. П. Потапов, “Мультипликативная структура J -нерастягивающих матриц-функций”, Тр. ММО, **4**, ГИТТЛ, М., 1955, 125–236.
- [12] Yu. M. Dyukarev, “Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolation problems in the Stieltjes class”, *Topics in Interpolation Theory*, Oper. Theory Adv. Appl., **95**, Birkhäuser, Basel, 1997, 165–184.
- [13] Ю. М. Дюкарев, “Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I”, *Матем. физ., анал., геом.*, **6**:1/2 (1999), 30–54.
- [14] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наукова думка, Киев, 1965.
- [15] М. Г. Крейн, “Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) ”, *Укр. матем. журн.*, **1**:2 (1949), 3–66.
- [16] М. Г. Крейн, “Бесконечные J матрицы и матричная проблема моментов”, *Докл. АН СССР*, **69**:3 (1949), 125–128.
- [17] В. И. Коган, “Об операторах, порожденных l_p -матрицами в случае максимальных индексов дефекта”, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, **11**, Изд-во Харьк. ун-та, Харьков, 1970, 103–107.
- [18] Ю. М. Дюкарев, “О дефектных числах симметрических операторов, порожденных блочными матрицами Якоби”, *Матем. сб.*, **197**:8 (2006), 73–100.
- [19] Ю. М. Дюкарев, “Примеры блочных матриц Якоби, порождающих симметрические операторы с любыми возможными дефектными числами”, *Матем. сб.*, **201**:12 (2010), 83–92.

Ю. М. Дюкарев

Харьковский национальный университет

им. В. Н. Каразина

E-mail: Yu.Dyukarev@karazin.ua

Поступило

20.05.2013

Исправленный вариант

07.04.2014

А. Е. Чоке Риверо

Instituto de Física y Matemáticas, Universidad

Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Mexico

E-mail: abdon@ifm.umich.mx