Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 217–230

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10374>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:25:16

Соответствия полугруппы эндоморфизмов отношения эквивалентности

Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина

В терминах различных конструкций сплетения полугруппы преобразований с малой категорией и прямого произведения сплетений групп описываются точные представления трех соответствий полугруппы всех эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности – полугруппы всех эндотопизмов, моноида всех сильных эндотопизмов и соответственно группы всех автотопизмов данной эквивалентности.

Библиография: 35 названий.

DOI: 10.4213/mzm10374

1. Введение. Основным объектом изучения в данной работе является понятие соответствия алгебраической системы в смысле Куроша [1]. Соответствия исследовались во многих областях математики: в теории групп [2]–[4] и теории полугрупп [5]–[8], в теории категорий [9], [10], в гомологической алгебре, алгебраической топологии и теории представлений [11]–[13], а также в теории универсальных алгебр [14]–[16]. В частности, в [3] найден порядок полугруппы соответствий циклических, диэдральных и элементарных абелевых конечных групп; в [4] описаны отношения Грина на полугруппе соответствий конечной группы, вычислены количество и порядки классов эквивалентностей Грина; в работах [6]–[8] исследована проблема определимости нильполугрупп, инверсных полугрупп и ортодоксальных полугрупп своими связками соответствий; в [14], [15] показано, что всякая компактно-порожденная решетка изоморфна решетке всех соответствий некоторой универсальной алгебры, и изучены связи между решетками всех подалгебр и решетками всех соответствий частичных универсальных алгебр. В этой работе, продолжая указанную цепочку исследований, мы изучаем соответствия полугруппы эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности.

Изучению полугрупп эндоморфизмов алгебраических систем и их различных абстрактных и комбинаторных свойств посвящено достаточно большое количество работ (см., например, [17]–[20]). Для полугрупп эндоморфизмов некоторых реляционных систем понятием, тесно связанным с соответствием, является понятие эндотопизма. Это понятие было введено Поповым [21] как обобщение понятия эндоморфизма на случай μ -арного отношения, вместе с тем при помощи полугрупп эндотопизмов были охарактеризованы с точностью до изотопизма определенные структуры μ -арных отношений. Полугруппы эндотопизмов шести различных типов для

произвольного отношения эквивалентности изучались авторами в [22], где найдены условия регулярности и корегулярности каждой из полугрупп эндотопизмов заданного типа и вычислен эндотип эквивалентности. Оказывается, что для любой эквивалентности полугруппа всех ее эндотопизмов является соответствием полугруппы эндоморфизмов той же эквивалентности. Понятие же изотопии появилось в исследованиях по топологии и впоследствии использовалось в теории квазигрупп как обобщение понятия изоморфизма. Для групп понятие изотопии не играет важной роли, поскольку по теореме Алберта любые две изотопные группы изоморфны [23]. Однако существуют примеры квазигрупп, изотопных группам, но не изоморфных им. Класс квазигрупп, изотопных группам, впервые был исследован Белоусовым в [24], где доказано, что такой класс квазигрупп характеризуется тождеством от пяти переменных. В этом направлении внимание также уделялось изучению строения групп автотопий и полугрупп эндотопий произвольных линейных, алинейных, смешанных линейных квазигрупп и Т-квазигрупп (см. [25], [26]).

Целью настоящей работы является описание точных представлений полугруппы всех эндотопизмов, моноида всех сильных эндотопизмов и группы всех автотопизмов отношения эквивалентности. Основные результаты работы распределены следующим образом. В п. 2 установлено, что моноид эндотопизмов эквивалентности есть соответствие моноида всех эндоморфизмов данной эквивалентности. В п. 3 доказано, что полугруппа эндотопизмов любой эквивалентности изоморфна подпрямому произведению сплетений полугруппы с малой категорией. Кроме того, описаны еще два точных представления полугруппы эндотопизмов эквивалентности и все изоморфизмы между моноидами эндотопизмов данных эквивалентностей. В п. 4 описаны представления моноида всех сильных эндотопизмов эквивалентности. Наконец, в п. 5 показано, что группа автотопизмов любой эквивалентности изоморфна прямому произведению сплетений групп.

2. Основные понятия. Пусть X – произвольное непустое множество. Через $\mathfrak{S}(X)$ обозначается симметрическая полугруппа на множестве X .

Эндоморфизмом отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется преобразование $f \in \mathfrak{S}(X)$, для которого условие $(x, y) \in \rho$ влечет $(xf, yf) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндоморфизмов отношения ρ относительно операции композиции преобразований образует полугруппу, которая называется *полугруппой эндоморфизмов* отношения ρ и обозначается $\text{End}(\rho)$.

Упорядоченная пара (φ, ψ) преобразований φ и ψ множества X называется *эндотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$, если из того, что $(x, y) \in \rho$, следует $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует полугруппу, которая называется *полугруппой эндотопизмов* отношения ρ . Эту полугруппу будем обозначать через $\text{Et}(\rho)$. Заметим, что пара тождественных подстановок множества X является единицей полугруппы $\text{Et}(\rho)$.

Если φ и ψ – подстановки множества X и $(x, y) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $(x\varphi, y\psi) \in \rho$ при любых $x, y \in X$, то упорядоченная пара (φ, ψ) называется *автотопизмом* отношения $\rho \subseteq X \times X$. Множество всех автотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует группу, которая называется *группой автотопизмов* отношения ρ . Обозначим эту группу через $\text{At}(\rho)$. Очевидно, что $\text{At}(\rho)$ есть подгруппа $\text{Et}(\rho)$.

Для произвольного множества X положим $i_X = \{(a, a) \mid a \in X\}$ и $\omega_A = A \times A$, где $A \subseteq X$. Отношения эквивалентности i_X , ω_X называются *тривиальными* отношениями на множестве X .

Рассмотрим несколько примеров.

(а) Упорядоченная пара (τ, σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения $\rho = i_X$ тогда и только тогда, когда $\tau = \sigma$. В этом случае $\text{Et}(\rho) = i_{\text{End}(\rho)} = i_{\mathfrak{S}(X)}$ и $\text{At}(\rho) = i_{\text{Aut}(\rho)} = i_{S(X)}$, где $S(X)$ – симметрическая группа на X .

(б) Возьмем $\rho = \omega_X$. Тогда любая упорядоченная пара (τ, σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения ρ . Следовательно,

$$\text{Et}(\rho) = \omega_{\mathfrak{S}(X)}, \quad \text{At}(\rho) = \omega_{S(X)}.$$

(с) Пусть ρ – отношение неравенства на X , т.е. $\rho = \omega_X \setminus i_X$. Упорядоченную пару (τ, σ) преобразований множества X назовем *инъективной*, если $a\tau = b\sigma$ влечет $a = b$ при любых $a, b \in X$. Заметим, что при инъективных τ, σ пара (τ, σ) не всегда инъективна, а также инъективность пары (τ, σ) не обязательно влечет инъективность преобразований τ, σ . Итак, $(\tau, \sigma) \in \text{Et}(\rho)$ в том и только том случае, если (τ, σ) инъективно.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X . Через X/α будем обозначать фактор-множество множества X по эквивалентности α , а через $\bar{x}$ – класс эквивалентности, содержащий $x \in X$.

ЛЕММА 1. *Упорядоченная пара (τ, σ) преобразований множества X будет эндотопизмом отношения эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $\bar{a} \in X/\alpha$ существует такой класс $\bar{b} \in X/\alpha$, что $\bar{a}\tau \subseteq \bar{b}$ и $\bar{a}\sigma \subseteq \bar{b}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\tau, \sigma) \in \text{Et}(\alpha)$, тогда для любого $\bar{a} \in X/\alpha$ и любых $x, y \in \bar{a}$ из условия $(x, y) \in \alpha$ следует $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$, откуда $x\tau, y\sigma \in \bar{b}$ для некоторого $\bar{b} \in X/\alpha$. В силу произвольности $x, y \in \bar{a}$ имеем $\bar{a}\tau \subseteq \bar{b}$ и $\bar{a}\sigma \subseteq \bar{b}$.

Предположим, что для преобразований $\tau, \sigma \in \mathfrak{S}(X)$ и каждого $\bar{a} \in X/\alpha$ существует такой $\bar{b} \in X/\alpha$, что $\bar{a}\tau \subseteq \bar{b}$ и $\bar{a}\sigma \subseteq \bar{b}$. Тогда для любых $x, y \in X$ из того, что $(x, y) \in \alpha$ следует $x, y \in \bar{x}$, откуда по предположению $x\tau, y\sigma \in \bar{b}$ для некоторого $\bar{b} \in X/\alpha$. Таким образом, $(x\tau, y\sigma) \in \alpha$ и, как следствие, $(\tau, \sigma) \in \text{Et}(\alpha)$. Лемма доказана.

Поскольку эндотопизмом отношения $\rho \subseteq X \times X$ является упорядоченная пара преобразований множества X , множество $\text{Et}(\rho)$ можно рассматривать как бинарное отношение на симметрической полугруппе $\mathfrak{S}(X)$.

Для бинарного отношения ρ на множестве X множества

$$\text{pr}_1 \rho = \{x \in X \mid \exists y \in X : (x, y) \in \rho\}, \quad \text{pr}_2 \rho = \{y \in X \mid \exists x \in X : (x, y) \in \rho\}$$

называются соответственно *первой* и *второй проекциями* отношения ρ на множестве прямого произведения $X \times X$.

Используя строение эндоморфизмов отношения эквивалентности [27] и лемму 1, получаем, что для любого отношения эквивалентности α на множестве X справедливы вложения

$$\text{pr}_1 \text{Et}(\alpha) \subseteq \text{End}(\alpha), \quad \text{pr}_2 \text{Et}(\alpha) \subseteq \text{End}(\alpha).$$

Более того, отношение $\text{Et}(\alpha)$ будет отношением эквивалентности на полугруппе эндоморфизмов $\text{End}(\alpha)$.

Пусть G – универсальная алгебра. Если подалгебру из $G \times G$ рассматривать как бинарное отношение на множестве G , то множество $\text{Rel}(G)$ всех подалгебр из $G \times G$ будет полугруппой относительно операции композиции бинарных отношений. Элементы этой полугруппы называются *соответствиями* алгебры G , а сама $\text{Rel}(G)$ – *полугруппой соответствий* данной алгебры [1].

Из леммы 1 и последующих рассуждений получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любой эквивалентности α на множестве X полугруппа $\text{Et}(\alpha)$ является соответствием полугруппы $\text{End}(\alpha)$.*

Заметим, что данное утверждение справедливо не для любого бинарного отношения. Действительно, рассмотрим такой пример. Пусть X – произвольное непустое множество, $|X| \geq 3$ и $\rho = (X \times X) \setminus \{(x, y)\}$, где $x, y \in X$, $x \neq y$. Упорядоченная пара (τ, σ) преобразований множества X таких, что

$$X\tau = \{x, y\} \quad \text{и} \quad X\sigma = \{a\}, \quad a \in X, \quad a \neq y,$$

будет эндотопизмом бинарного отношения ρ , при этом $\tau \notin \text{End}(\rho)$. Следовательно, $\text{Et}(\rho)$ не является соответствием полугруппы $\text{End}(\rho)$.

3. Полугруппа эндотопизмов отношения эквивалентности. В настоящее время во многих работах по полугруппам довольно часто используется конструкция сплетения и ее различные модификации. Так, в [28] была введена конструкция сплетения моноида с малой категорией как обобщение сплетения моноидов. Впоследствии эта конструкция применялась в различных ситуациях, в частности, для описания точных представлений полугрупп эндоморфизмов произвольного действия, конечных неориентированных графов без кратных ребер, свободного произведения некоторых полугрупп (см. [29]–[31]). Воспользуемся упомянутым сплетением и в данной работе.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X . Определим малую категорию K , полагая

$$\text{Ob } K = X/\alpha, \quad \text{Mor } K = \bigcup_{\bar{a}, \bar{b} \in \text{Ob } K} \text{Map}(\bar{a}, \bar{b}),$$

где $\text{Map}(\bar{a}, \bar{b})$ – множество всех отображений из класса $\bar{a}$ в класс $\bar{b}$. Понятно, что для каждого морфизма $f \in \text{Mor } K$ существует одна и только одна упорядоченная пара объектов $\bar{a}, \bar{b} \in \text{Ob } K$ такая, что $f \in \text{Mor}(\bar{a}, \bar{b})$.

Пусть

$$W = \{(\varphi, f) \mid \varphi \in \mathfrak{Z}(X/\alpha), f \in \text{Map}(\text{Ob } K, \text{Mor } K), \bar{a}f \in \text{Map}(\bar{a}, \bar{a}\varphi) \forall \bar{a} \in X/\alpha\}$$

и $f_{\bar{a}} = \bar{a}f$, где $x f_{\bar{a}} \in \bar{a}\varphi$ для любого $x \in \bar{a}$. На множестве W определена мультипликативная операция:

$$(\varphi, f)(\psi, g) = (\varphi\psi, f g_{\varphi}),$$

где $(f g_{\varphi})_{\bar{a}} = f_{\bar{a}} g_{\bar{a}\varphi}$, $\bar{a} \in X/\alpha$.

Относительно этой операции множество W образует полугруппу, которая называется *сплетением* симметрической полугруппы $\mathfrak{Z}(X/\alpha)$ с малой категорией K и обозначается через $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{ wt } K$.

Заметим, что здесь используется двойственная конструкция сплетения по отношению к определенной в [28]. Это объясняется выбором порядка умножения отображений слева направо, а не наоборот.

В декартовом квадрате сплетения $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{ wr } K$ на себя выделим следующую подполугруппу:

$$P_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.$$

Пусть задано произвольное семейство категорий C_i , $i \in I$. Определим новую категорию $\Pi_{i \in I} C_i$, полагая

$$\text{Ob}(\Pi_{i \in I} C_i) = \Pi_{i \in I} \text{Ob } C_i, \quad \text{Mor}(\Pi_{i \in I} C_i) = \Pi_{i \in I} \text{Mor } C_i.$$

Произведение морфизмов в этой категории определяется покомпонентно. Полученная категория называется произведением категорий C_i , $i \in I$.

Обозначим через K^2 произведение определенной выше категории K на себя, а через K_*^2 – полную подкатеорию категории K^2 , рассматриваемую на множестве объектов $\text{Ob } K_*^2 = \{(A, A) \mid A \in \text{Ob } K\}$.

Подобным образом, как в начале этого пункта, для любой эквивалентности α на множестве X можно определить сплетение $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{ wr } K_*^2$ симметрической полугруппы $\mathfrak{Z}(X/\alpha)$ с малой категорией K_*^2 . Операция на такой полугруппе $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{ wr } K_*^2$ будет следующей:

$$(\gamma, f)(\mu, h) = (\gamma\mu, fh_\gamma),$$

где $(fh_\gamma)(\bar{a}, \bar{a}) = f(\bar{a}, \bar{a})h(\bar{a}\gamma, \bar{a}\gamma)$ для всех $(\bar{a}, \bar{a}) \in \text{Ob } K_*^2$.

Далее, пусть $\mathcal{C}$ – малая категория, R – моноид, который действует справа на множестве $X = \text{Ob } \mathcal{C}$ объектов этой категории, и $M = \bigcup_{x, y \in X} \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, y)$ – множество всех морфизмов категории $\mathcal{C}$.

Возьмем натуральное число n и положим

$$V = \{(r, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}) \mid r \in R, f^{(i)} \in \text{Mor}(X, M), xf^{(i)} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, xr) \forall x \in X\}.$$

Далее, для всех $(r, f^{(1)}, \dots, f^{(n)}), (p, g^{(1)}, \dots, g^{(n)}) \in V$ определим умножение

$$(r, f^{(1)}, \dots, f^{(n)})(p, g^{(1)}, \dots, g^{(n)}) = (rp, f^{(1)}g_r^{(1)}, \dots, f^{(n)}g_r^{(n)}),$$

где $x(f^{(i)}g_r^{(i)}) = xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ для всех $x \in X$ и $xf^{(i)}(xr)g^{(i)}$ – это композиция морфизмов $xf^{(i)}$ и $(xr)g^{(i)}$ в категории $\mathcal{C}$. Заданная таким образом операция ассоциативна. Кроме того, в полугруппе V есть единица

$$(1, \underbrace{e, \dots, e}_n),$$

где $e \in \text{Mor}(X, M)$ такое, что $xe \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(x, x)$ – тождественный морфизм для любого x из $\mathcal{C}$.

Моноид V с таким умножением назовем n -кратным сплетением (или n -сплетением) моноида R с категорией $\mathcal{C}$ и будем обозначать через $R \text{ wr}^{(n)} \mathcal{C}$.

Следует отметить, что при $n = 1$ мы получаем двойственную конструкцию к сплетению, определенному в [28].

Если $\varphi: X \rightarrow X$ – некоторое преобразование и $A \subseteq X$, то через $\varphi|_A$ будем обозначать ограничение преобразования φ на подмножество A .

Одним из основных результатов работы является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X , а K – малая категория, определенная выше. Тогда полугруппы $\text{Et}(\alpha)$ и $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{wr}^{(2)} K$ изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого эндотопизма $(\tau, \sigma) \in \text{Et}(\alpha)$ положим

$$(\tau, \sigma)\Xi = (\tau^*, f^\tau, g^\sigma),$$

где $\tau^* \in \mathfrak{Z}(X/\alpha)$ такое, что $\bar{a}\tau^* = \bar{a}\bar{\tau}$, и $f^\tau, g^\sigma \in \text{Map}(\text{Ob } K, \text{Mor } K)$ такие, что

$$\bar{a}f^\tau = \tau|_{\bar{a}}, \quad \bar{a}g^\sigma = \sigma|_{\bar{a}} \quad \text{для любого } \bar{a} \in X/\alpha.$$

Ясно, что Ξ отображает $\text{Et}(\alpha)$ в $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{wr}^{(2)} K$, при этом инъективность Ξ очевидна. Возьмем произвольную упорядоченную тройку $(\psi, f, g) \in \mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{wr}^{(2)} K$. Учитывая определение полугруппы $\mathfrak{Z}(X/\alpha) \text{wr}^{(2)} K$, для каждого $\bar{a} \in X/\alpha$ найдется такой класс $\bar{a}\psi \in X/\alpha$, что $\bar{a}f_{\bar{a}} \subseteq \bar{a}\psi$ и $\bar{a}g_{\bar{a}} \subseteq \bar{a}\psi$. Согласно лемме 1 упорядоченная пара (λ, μ) преобразований множества X , определенных по правилу

$$x\lambda = xf_{\bar{x}}, \quad x\mu = xg_{\bar{x}} \quad \text{для всех } x \in X,$$

будет эндотопизмом отношения эквивалентности α ; при этом

$$(\lambda, \mu)\Xi = (\lambda^*, f^\lambda, g^\mu) = (\psi, f, g).$$

Для завершения доказательства остается показать, что Ξ является гомоморфизмом. Действительно, пусть $(\tau, \sigma), (\rho, \delta) \in \text{Et}(\alpha)$ – такие эндотопизмы, что

$$(\tau, \sigma)\Xi = (\tau^*, f^\tau, g^\sigma), \quad (\rho, \delta)\Xi = (\rho^*, f^\rho, g^\delta).$$

Тогда с одной стороны имеем

$$((\tau, \sigma)(\rho, \delta))\Xi = (\tau\rho, \sigma\delta)\Xi = ((\tau\rho)^*, f^{\tau\rho}, g^{\sigma\delta}),$$

а с другой стороны,

$$(\tau, \sigma)\Xi(\rho, \delta)\Xi = (\tau^*, f^\tau, g^\sigma)(\rho^*, f^\rho, g^\delta) = (\tau^*\rho^*, f^\tau f_{\tau^*}^\rho, g^\sigma g_{\tau^*}^\delta).$$

Поскольку для любого $\bar{a} \in X/\alpha$ выполняются равенства

$$\bar{a}(\tau^*\rho^*) = (\bar{a}\tau^*)\rho^* = \bar{a}\bar{\tau}\rho^* = \overline{(a\tau)}\rho = \overline{a(\tau\rho)} = \bar{a}(\tau\rho)^*,$$

то $\tau^*\rho^* = (\tau\rho)^*$. Кроме того, для всех $\bar{a} \in X/\alpha$

$$\bar{a}(f^\tau f_{\tau^*}^\rho) = (\bar{a}f^\tau)(\bar{a}\bar{\tau}f^\rho) = \tau|_{\bar{a}}\rho|_{\bar{a}\bar{\tau}}, \quad \bar{a}f^{\tau\rho} = (\tau\rho)|_{\bar{a}},$$

поэтому при любом $x \in \bar{a}$

$$x(\tau|_{\bar{a}}\rho|_{\bar{a}\bar{\tau}}) = (x\tau|_{\bar{a}})\rho|_{\bar{a}\bar{\tau}} = (x\tau)\rho|_{\bar{a}\bar{\tau}} = x(\tau\rho) = x(\tau\rho)|_{\bar{a}}.$$

Следовательно, $f^\tau f_{\tau^*}^\rho = f^{\tau\rho}$.

Аналогично доказывается, что $g^\sigma g_{\tau^*}^\delta = g^{\sigma\delta}$.

Наконец,

$$\begin{aligned} ((\tau, \sigma)(\rho, \delta))\Xi &= (\tau\rho, \sigma\delta)\Xi = ((\tau\rho)^*, f^{\tau\rho}, g^{\sigma\delta}) = (\tau^*\rho^*, f^\tau f_{\tau^*}^\rho, g^\sigma g_{\tau^*}^\delta) \\ &= (\tau^*, f^\tau, g^\sigma)(\rho^*, f^\rho, g^\delta) = (\tau, \sigma)\Xi(\rho, \delta)\Xi. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛЕММА 2. Сплетение $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt}^{(2)} K$ изоморфно каждой из полугрупп P_X^α и $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt} K_*^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $(\varphi, f, g) \in \mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt}^{(2)} K$ положим

$$(\varphi, f, g)\Theta = ((\varphi, f), (\varphi, g)), \quad (\varphi, f, g)\Upsilon = (\varphi, h_{f,g}),$$

где

$$(\bar{a}, \bar{a})h_{f,g} = (f_{\bar{a}}, g_{\bar{a}}) \quad \text{для всех } (\bar{a}, \bar{a}) \in \text{Ob } K_*^2.$$

Тогда, как нетрудно убедиться, Θ является изоморфизмом $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt}^{(2)} K$ на P_X^α , а Υ – изоморфизмом $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt}^{(2)} K$ на $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt} K_*^2$.

Из теоремы 1 и леммы 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Полугруппа $\text{Et}(\alpha)$ изоморфна полугруппам P_X^α и $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt} K_*^2$.

В дальнейшем элементы полугруппы $\text{Et}(\alpha)$ будем отождествлять с соответствующими им элементами сплетения $\mathfrak{S}(X/\alpha) \text{ wt}^{(2)} K$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любой эквивалентности α на конечном множестве X

$$|\text{Et}(\alpha)| = \sum_{\varphi \in \mathfrak{S}(X/\alpha)} \left(\prod_{\bar{x} \in X/\alpha} |\bar{x}\varphi|^{|\bar{x}|} \right)^2.$$

Рассмотрим теперь вопрос, насколько полно полугруппа эндотопизмов $\text{Et}(\rho)$ характеризует отношение эквивалентности ρ .

Пусть ρ – отношение эквивалентности на множестве X . Через ν_a , $a \in X$, обозначим константное преобразование множества X , т.е. $x\nu_a = a$ для всех $x \in X$, а через $\text{Et}_C(\rho)$ – множество всех эндотопизмов отношения ρ вида (ν_a, ν_a) , $a \in X$.

Ясно, элементы из $\text{Et}_C(\rho)$ и только они обладают тем свойством, что

$$\text{Et}(\rho) \cdot (\nu_a, \nu_a) = \{(\nu_a, \nu_a)\},$$

т.е. $\text{Et}_C(\rho)$ – минимальный правый идеал полугруппы $\text{Et}(\rho)$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X , β – отношение эквивалентности на множестве X' . Если соответствия $\text{Et}(\alpha)$ и $\text{Et}(\beta)$ изоморфны, то реляционные системы (X, α) и (X', β) изоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ – произвольный изоморфизм полугруппы $\text{Et}(\alpha)$ на $\text{Et}(\beta)$ и $(\nu_a, \nu_a) \in \text{Et}_C(\alpha)$. Покажем вначале, что $\text{Et}_C(\alpha)\Theta = \text{Et}_C(\beta)$. Поскольку Θ – изоморфизм, то

$$(\varphi, \psi)\Theta \cdot (\nu_a, \nu_a)\Theta = ((\varphi, \psi) \cdot (\nu_a, \nu_a))\Theta = (\nu_a, \nu_a)\Theta$$

для любого $(\varphi, \psi) \in \text{Et}(\alpha)$. Следовательно, $(\nu_a, \nu_a)\Theta \in \text{Et}_C(\beta)$. Это означает, что $\text{Et}_C(\alpha)\Theta \subseteq \text{Et}_C(\beta)$. Используя обратный изоморфизм Θ^{-1} , аналогично доказывается обратное включение $\text{Et}_C(\beta) \subseteq (\text{Et}_C(\alpha))\Theta$.

Теперь для любого $a \in X$ имеем

$$\begin{aligned} (a, a) \in \alpha &\iff (\nu_a, \nu_a) \in \text{Et}_C(\alpha) \iff (\nu_a, \nu_a)\Theta \in \text{Et}_C(\beta) \\ &\iff (\nu_{a'}, \nu_{a'}) \in \text{Et}_C(\beta) \iff (a', a') \in \beta, \quad \text{где } a' \in X'. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение Θ индуцирует биекцию f_Θ между элементами множеств X и X' :

$$af_\Theta = a' \iff (\nu_a, \nu_a)\Theta = (\nu_{a'}, \nu_{a'})$$

для всех $a \in X$.

Предположим, что $i_{\text{End}(\alpha)}\Theta \neq i_{\text{End}(\beta)}$. Тогда найдется такой эндотопизм $(\varphi, \psi) \in i_{\text{End}(\alpha)}$, что $(\varphi, \psi)\Theta = (\varphi', \psi') \notin i_{\text{End}(\beta)}$. Отсюда $\varphi' \neq \psi'$ и, как следствие, $t'\varphi' \neq t'\psi'$ для некоторого $t' \in X'$. Полагая $tf_\Theta = t'$, с одной стороны, получаем

$$((\nu_t, \nu_t)(\varphi, \psi))\Theta = (\nu_{t\varphi}, \nu_{t\psi})\Theta = (\nu_{(t\varphi)'}, \nu_{(t\psi)'}) \in \text{Et}_C(\beta),$$

а с другой стороны,

$$((\nu_t, \nu_t)(\varphi, \psi))\Theta = (\nu_t, \nu_t)\Theta(\varphi, \psi)\Theta = (\nu_{t'}, \nu_{t'})(\varphi', \psi') = (\nu_{t'\varphi'}, \nu_{t'\psi'}) \notin \text{Et}_C(\beta),$$

поскольку $t'\varphi' \neq t'\psi'$.

Таким образом, предположение неверно, и значит, $i_{\text{End}(\alpha)}\Theta = i_{\text{End}(\beta)}$. Учитывая, что полугруппа эндоморфизмов произвольного бинарного отношения естественным образом изоморфно вкладывается в полугруппу эндотопизмов этого отношения, получаем $\text{End}(\alpha) \cong \text{End}(\beta)$. Отсюда по теореме Глускина [32] следует, что $(X, \alpha) \cong (X', \beta)$. Теорема доказана.

Отметим, что в [21] с использованием свойства проекций бинарных отношений была показана определяемость квазиупорядоченных множеств с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма своей полугруппой эндотопизмов.

Далее, выясним, как устроены изоморфизмы между полугруппами эндотопизмов произвольных эквивалентностей.

ТЕОРЕМА 3. Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X , β – отношение эквивалентности на множестве X' . Отображение Υ соответствия $\text{Et}(\alpha)$ на соответствие $\text{Et}(\beta)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда оно представляется в виде

$$g\Upsilon = \tau^{-1}g\tau \quad \text{для всех } g \in \text{Et}(\alpha),$$

где τ – некоторый изотопизм реляционной системы (X, α) на (X', β) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Upsilon: g \mapsto g'$ – произвольный изоморфизм соответствия $\text{Et}(\alpha)$ на $\text{Et}(\beta)$. Покажем, что любой эндотопизм $g' \in \text{Et}(\beta)$ имеет вид $g' = \tau^{-1}g\tau$ для подходящего изотопизма τ системы (X, α) на (X', β) . По теореме 2 Υ индуцирует изоморфизм $\Upsilon^*: \text{End}(\alpha) \rightarrow \text{End}(\beta)$, откуда по теореме Глускина [32] имеем $\phi\Upsilon^* = \eta^{-1}\phi\eta$ для всех $\phi \in \text{End}(\alpha)$ и некоторого изоморфизма $\eta: (X, \alpha) \rightarrow (X, \beta)$. Очевидно, что $\tau = (\eta, \eta)$ – изотопизм (X, α) на (X', β) . Таким образом, для любого $g = (g_1, g_2) \in \text{Et}(\alpha)$ имеем

$$g\Upsilon = (g_1\Upsilon^*, g_2\Upsilon^*) = (\eta^{-1}g_1\eta, \eta^{-1}g_2\eta) = (\eta^{-1}, \eta^{-1})(g_1, g_2)(\eta, \eta) = \tau^{-1}g\tau.$$

Возьмем теперь произвольный изотопизм $\tau = (\tau_1, \tau_2)$ из (X, α) на (X', β) и для всех $g \in \text{Et}(\alpha)$ положим $g\Upsilon = \tau^{-1}g\tau$. Понятно, что Υ отображает $\text{Et}(\alpha)$ в $\text{Et}(\beta)$. Кроме того, для любых $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in \text{Et}(\alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} ((\varphi_1, \psi_1)(\varphi_2, \psi_2))\Upsilon &= (\varphi_1\varphi_2, \psi_1\psi_2)\Upsilon = (\tau_1^{-1}(\varphi_1\varphi_2)\tau_1, \tau_2^{-1}(\psi_1\psi_2)\tau_2) \\ &= ((\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1)(\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1), (\tau_2^{-1}\psi_1\tau_2)(\tau_2^{-1}\psi_2\tau_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (\tau_1^{-1}\varphi_1\tau_1, \tau_2^{-1}\psi_1\tau_2) \cdot (\tau_1^{-1}\varphi_2\tau_1, \tau_2^{-1}\psi_2\tau_2) \\ &= (\varphi_1, \psi_1)\Upsilon \cdot (\varphi_2, \psi_2)\Upsilon. \end{aligned}$$

Биективность отображения Υ очевидна. Теорема доказана.

4. Моноид сильных эндотопизмов отношения эквивалентности. Понятие сильного эндоморфизма графа было введено в [33] и изучалось вместе с другими типами эндоморфизмов, например, в [20], [30], [34]. Здесь мы вводим понятие сильного эндотопизма бинарного отношения.

Эндотопизм (φ, ψ) бинарного отношения ρ на множестве X назовем *сильным эндотопизмом*, если из того, что $(x\varphi, y\psi) \in \rho$, следует $(x, y) \in \rho$ при любых $x, y \in X$. Множество всех сильных эндотопизмов бинарного отношения ρ относительно операции покомпонентного умножения образует моноид, который будем называть *моноидом сильных эндотопизмов* отношения ρ . Обозначим этот моноид через $\text{SEt}(\rho)$. Ясно, что $\text{SEt}(\rho)$ есть подполугруппа $\text{Et}(\rho)$.

Описание сильных эндотопизмов отношения эквивалентности дает

ЛЕММА 3. *Эндотопизм (τ, σ) отношения эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$ является сильным эндотопизмом тогда и только тогда, когда отображение τ^* , определенное по правилу $\bar{a}\tau^* = \overline{a\tau}$ для всех $\bar{a} \in X/\alpha$, является инъективным преобразованием фактор-множества X/α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $(\tau, \sigma) \in \text{SEt}(\alpha)$ и предположим, что $\bar{a}\tau^* = \bar{b}\tau^*$ для некоторых различных $\bar{a}, \bar{b} \in X/\alpha$. Тогда $(a\tau, b\sigma) \in \alpha$, однако $(a, b) \notin \alpha$, а это противоречит тому, что эндоморфизм (τ, σ) сильный. Таким образом, τ^* есть инъективное преобразование X/α .

Обратное утверждение очевидно. Лемма доказана.

Учитывая справедливость последней леммы и для эндоморфизмов эквивалентности, с одной стороны, получаем, что $\text{SEt}(\alpha)$ есть эквивалентность на моноиде $\text{SEnd}(\alpha)$, а с другой, что $\text{SEt}(\alpha)$ – соответствие полугруппы $\text{SEnd}(\alpha)$.

Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X , K – малая категория, определенная так же, как в п. 3. Через $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)$ обозначим полугруппу всех инъективных преобразований фактор-множества X/α и выделим в декартовом квадрате сплетения $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha) \text{ wr } K$ на себя такую подполугруппу:

$$S_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha) \text{ wr } K_*^2$ сплетение полугруппы преобразований $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)$ с малой категорией K_*^2 , а через $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha) \text{ wr}^{(2)} K$ – 2-кратное сплетение полугруппы $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)$ с категорией K (см. п. 3).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 4. *Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X . Полугруппа $\text{SEt}(\alpha)$ изоморфна каждой из следующих полугрупп:*

- (i) *подпрямому произведению S_X^α моноида $(\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)) \text{ wr } K \times (\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)) \text{ wr } K$;*
- (ii) *сплетению $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha) \text{ wr } K_*^2$ моноида $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)$ с категорией K_*^2 ;*
- (iii) *2-кратному сплетению $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha) \text{ wr}^{(2)} K$ моноида преобразований $\mathfrak{Z}_{\text{in}}(X/\alpha)$ с малой категорией K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам теоремы 1 и леммы 2.

В случае, когда множество X конечно, очевидно $\mathfrak{S}_{\text{in}}(X/\alpha) = S(X/\alpha)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Для любой эквивалентности α на конечном множестве X

$$|\text{SEt}(\alpha)| = \sum_{\varphi \in S(X/\alpha)} \left(\prod_{\bar{x} \in X/\alpha} |\bar{x}\varphi|^{|\bar{x}|} \right)^2.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть на множестве $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ задано отношение эквивалентности

$$\alpha = (A_1 \times A_1) \cup (A_2 \times A_2) \cup (A_3 \times A_3),$$

где $A_1 = \{a\}$, $A_2 = \{b, c\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$.

В этом случае $\text{Ob } K = \{A_1, A_2, A_3\}$, морфизмы категории K – всевозможные отображения из любого класса эквивалентности α в любой другой класс и $\mathfrak{S}_{\text{in}}(X/\alpha) = S_3$, где S_3 – симметрическая группа на 3-элементном множестве. По теореме 4 имеем

$$\text{SEt}(\alpha) \cong S_3 \text{ wr}^{(2)} K \cong S_3 \text{ wr } K_*^2 \cong S_X^\alpha.$$

Кроме того, по следствию 4 получаем

$$\begin{aligned} |\text{SEt}(\alpha)| &= \sum_{\varphi \in S_3} \left(\prod_{i=1}^3 (i\varphi)^i \right)^2 \\ &= (2^2 \cdot 3^3)^2 + (3^2 \cdot 2^3)^2 + (2 \cdot 3^3)^2 + (2 \cdot 3^2)^2 + (3 \cdot 2^3)^2 + (3 \cdot 2^2)^2 = 20808. \end{aligned}$$

5. Группа автотопизмов отношения эквивалентности. В этом пункте мы изучаем точные представления группы автотопизмов эквивалентности в терминах различных конструкций сплетения.

Пусть X – произвольное непустое множество, α – отношение эквивалентности на множестве X . Очевидной является следующая

ЛЕММА 4. Упорядоченная пара (τ, σ) подстановок множества X будет авто-топизмом отношения эквивалентности $\alpha \subseteq X \times X$ тогда и только тогда, когда для каждого класса $\bar{a} \in X/\alpha$ существует такой класс $\bar{b} \in X/\alpha$, что $\bar{a}\tau = \bar{b}$ и $\bar{a}\sigma = \bar{b}$.

Из этой леммы и строения автоморфизмов произвольной эквивалентности следует, что для любой эквивалентности α справедливы включения:

$$\text{pr}_1 \text{At}(\alpha) \subseteq \text{Aut}(\alpha), \quad \text{pr}_2 \text{At}(\alpha) \subseteq \text{Aut}(\alpha).$$

Более того, с одной стороны отношение $\text{At}(\alpha)$ будет эквивалентностью на группе автоморфизмов $\text{Aut}(\alpha)$, а с другой – соответствием полугруппы эндоморфизмов $\text{End}(\alpha)$ и, в частности, группы $\text{Aut}(\alpha)$.

Определим малую категорию $\mathbb{K}$, полагая

$$\text{Ob } \mathbb{K} = X/\alpha, \quad \text{Mor } \mathbb{K} = \bigcup_{\bar{a}, \bar{b} \in \text{Ob } \mathbb{K}} \text{Map}_b(\bar{a}, \bar{b}),$$

где $\text{Map}_b(\bar{a}, \bar{b})$ – множество всех биекций из класса $\bar{a}$ в класс $\bar{b}$.

Через $B(X/\alpha)$ обозначим множество всех биекций $\delta: X/\alpha \rightarrow X/\alpha$ таких, что $|\bar{a}| = |\bar{a}\delta|$ для каждого $\bar{a} \in X/\alpha$. Понятно, что $B(X/\alpha)$ является подгруппой группы всех подстановок на фактормножестве X/α .

В прямом произведении сплетения $B(X/\alpha) \operatorname{wr} \mathbb{K}$ на себя выделим подгруппу:

$$A_X^\alpha = \{((\varphi, f), (\psi, g)) \mid \varphi = \psi\}.$$

Обозначим через $B(X/\alpha) \operatorname{wr} \mathbb{K}_*^2$ сплетение группы подстановок $B(X/\alpha)$ с малой категорией $\mathbb{K}_*^2$, а через $B(X/\alpha) \operatorname{wr}^{(2)} \mathbb{K}$ – 2-кратное сплетение той же группы $B(X/\alpha)$ с категорией $\mathbb{K}$, которые определяются аналогично подобным конструкциям сплетения из п. 3.

ТЕОРЕМА 5. Пусть α – отношение эквивалентности на множестве X . Группа $\operatorname{At}(\alpha)$ изоморфна каждой из следующих групп:

- (i) подпрямому произведению A_X^α группы $(B(X/\alpha) \operatorname{wr} \mathbb{K}) \times (B(X/\alpha) \operatorname{wr} \mathbb{K})$;
- (ii) сплетению $B(X/\alpha) \operatorname{wr} \mathbb{K}_*^2$ группы подстановок $B(X/\alpha)$ с категорией $\mathbb{K}_*^2$;
- (iii) 2-кратному сплетению $B(X/\alpha) \operatorname{wr}^{(2)} \mathbb{K}$ группы подстановок $B(X/\alpha)$ с малой категорией $\mathbb{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательствам теоремы 1 и леммы 2.

В случае, когда множество X конечное, имеем

$$|\operatorname{At}(\alpha)| = |B(X/\alpha)| \cdot \left(\prod_{A \in X/\alpha} |A|! \right)^2.$$

В конце работы рассмотрим другую конструкцию сплетения – сплетение групп, в терминах которой опишем представление группы автотопизмов эквивалентности.

Возьмем эквивалентность α на множестве X и положим $X/\alpha = \{K_j \mid j \in J\}$. Через P обозначим множество всех представителей, взятых в точности по одному из каждого класса эквивалентности отношения равномощности $\sim$ на X/α , и пусть $Y = \{i \mid K_i \in P\}$.

Для каждого $i \in Y$ положим

$$\bar{i} = \{j \in J \mid K_i \sim K_j\}, \quad X_i = \bigcup_{j \in \bar{i}} K_j \quad \alpha_i = \alpha \cap (X_i \times X_i).$$

Понятно, что α_i – эквивалентность на X_i для всех $i \in Y$ и $\bigcup_{i \in Y} X_i = X$.

Из леммы 4 следует, что $(\varphi, \psi) \in \operatorname{At}(\alpha)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in \operatorname{Aut}(\alpha)$, $\psi \in \operatorname{Aut}(\alpha)$ и $\bar{a}\varphi = \bar{a}\psi$ для всех $\bar{a} \in X/\alpha$. Учитывая, что подстановка η множества X принадлежит $\operatorname{Aut}(\alpha)$ только в том случае, когда $\eta|_{X_i} \in \operatorname{Aut}(\alpha_i)$ для всех $i \in Y$, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 5. Для каждой эквивалентности α на множестве X соответствие $\operatorname{At}(\alpha)$ изоморфно прямому произведению $\prod_{i \in Y} \operatorname{At}(\alpha_i)$ соответствий $\operatorname{At}(\alpha_i)$, $i \in Y$.

Пусть G – произвольная группа, $S(X)$ – симметрическая группа на множестве X . Через $\operatorname{Fun}(X; G)$ обозначим прямое произведение изоморфных копий G_x группы G , которые индексированы элементами множества X . Таким образом, $\operatorname{Fun}(X; G)$ является группой всех функций $X \rightarrow G$ с обычной операцией композиции функций.

Определим на множестве $S(X) \times \text{Fun}(X; G)$ операцию по правилу

$$(g_1; f_1)(g_2; f_2) = (g_1 g_2; f_1^{g_2} f_2),$$

где $x f_1^{g_2} = (x g_2^{-1}) f_1$ для всех $x \in X$.

Относительно только что определенной операции множество $S(X) \times \text{Fun}(X; G)$ является группой, которая называется *сплетением* группы G с симметрической группой $S(X)$ (см., например, [35]). Полученная группа обозначается через $\text{GWrS}(X)$.

В терминах сплетений групп получаем описание соответствий $\text{At}(\alpha_i)$, $i \in Y$.

ЛЕММА 6. *Для любого элемента $i \in Y$ соответствие $\text{At}(\alpha_i)$ изоморфно сплетению $\text{At}(\alpha_i|_{K_i}) \text{Wr } S(\bar{i})$ соответствия $\text{At}(\alpha_i|_{K_i})$ с симметрической группой $S(\bar{i})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = (\varphi, \psi)$ – произвольный автотопизм отношения α_i , $i \in Y$, а $\varphi^*: \bar{i} \rightarrow \bar{i}$ – биекция, которая индуцируется автотопизмом g . Для всех $\lambda, \mu \in \bar{i}$ зафиксируем биекции $f^{(\lambda, \mu)}: K_\lambda \rightarrow K_\mu$ такие, что $f^{(\lambda, \lambda)}$, $\lambda \in \bar{i}$, – тождественные подстановки и выполняются равенства $f^{(\lambda, \mu)} f^{(\mu, \lambda)} = f^{(\lambda, \lambda)}$.

Для любого $g = (\varphi, \psi) \in \text{At}(\alpha_i)$ положим $g\Omega = (\varphi^*, \tilde{g})$, где

$$j\tilde{g} = \left(f^{(i, j\varphi^{*-1})} \varphi|_{K_{j\varphi^{*-1}}} f^{(j, i)}, f^{(i, j\psi^{*-1})} \psi|_{K_{j\psi^{*-1}}} f^{(j, i)} \right)$$

для всех $j \in \bar{i}$. Поскольку $f^{(\lambda, \mu)}$ есть изоморфизм из $(K_\lambda, \alpha_i|_{K_\lambda})$ на $(K_\mu, \alpha_i|_{K_\mu})$ для всех $\lambda, \mu \in \bar{i}$, то отображение $\tilde{g}$, а следовательно, и Ω заданы корректно, причем Ω отображает соответствие $\text{At}(\alpha_i)$ в сплетение $\text{At}(\alpha_i|_{K_i}) \text{Wr } S(\bar{i})$.

Пусть $g_1 = (\varphi_1, \psi_1)$, $g_2 = (\varphi_2, \psi_2) \in \text{At}(\alpha_i)$, тогда

$$g_1\Omega = (\varphi_1^*, \tilde{g}_1), \quad g_2\Omega = (\varphi_2^*, \tilde{g}_2) \quad \text{и} \quad (g_1 g_2)\Omega = ((\varphi_1 \varphi_2)^*, \widetilde{g_1 g_2}).$$

Ясно, что $(\varphi_1 \varphi_2)^* = \varphi_1^* \varphi_2^*$ (см. теорема 1). Кроме того, $g_1\Omega g_2\Omega = (\varphi_1^* \varphi_2^*, \tilde{g}_1^{*\varphi_2^*} \tilde{g}_2)$, где

$$\begin{aligned} j(\tilde{g}_1^{*\varphi_2^*} \tilde{g}_2) &= j\tilde{g}_1^{*\varphi_2^*} j\tilde{g}_2 = (j\varphi_2^{*-1}) \tilde{g}_1 j\tilde{g}_2 \\ &= \left(f^{(i, j\varphi_2^{*-1})} \varphi_1^{*-1} |_{K_{(j\varphi_2^{*-1})\varphi_1^{*-1}}} f^{(j\varphi_2^{*-1}, i)}, f^{(i, j\psi_2^{*-1})} \psi_1^{*-1} |_{K_{(j\psi_2^{*-1})\psi_1^{*-1}}} f^{(j\psi_2^{*-1}, i)} \right) \\ &\quad \times \left(f^{(i, j\varphi_2^{*-1})} \varphi_2 |_{K_{j\varphi_2^{*-1}}} f^{(j, i)}, f^{(i, j\psi_2^{*-1})} \psi_2 |_{K_{j\psi_2^{*-1}}} f^{(j, i)} \right) \\ &= \left(f^{(i, j(\varphi_1 \varphi_2)^{*-1})} \varphi_1 |_{K_{(j(\varphi_1 \varphi_2)^{*-1})}} \varphi_2 |_{K_{j\varphi_2^{*-1}}} f^{(j, i)}, \right. \\ &\quad \left. f^{(i, j(\psi_1 \psi_2)^{*-1})} \psi_1 |_{K_{j(\psi_1 \psi_2)^{*-1}}} \psi_2 |_{K_{j\psi_2^{*-1}}} f^{(j, i)} \right) \\ &= \left(f^{(i, j(\varphi_1 \varphi_2)^{*-1})} (\varphi_1 \varphi_2) |_{K_{j(\varphi_1 \varphi_2)^{*-1}}} f^{(j, i)}, f^{(i, j(\psi_1 \psi_2)^{*-1})} (\psi_1 \psi_2) |_{K_{j(\psi_1 \psi_2)^{*-1}}} f^{(j, i)} \right) \\ &= j\widetilde{g_1 g_2} \end{aligned}$$

для всех $j \in \bar{i}$. Таким образом, Ω – гомоморфизм. Биактивность отображения Ω проверяется непосредственно. Лемма доказана.

Для любого $\lambda \in \bar{i}$, очевидно, $\alpha_i|_{K_\lambda} = \omega_{K_\lambda}$, поэтому $\text{At}(\alpha_i|_{K_\lambda}) = \omega_{S(K_\lambda)}$ (см. пример (b), п. 2). Отсюда и из лемм 5 и 6 следует

ТЕОРЕМА 6. *Группа автотопизмов $\text{At}(\alpha)$ произвольной эквивалентности α на множестве X изоморфна прямому произведению $\prod_{i \in Y} S(K_i) \times S(K_i) \text{Wr } S(\bar{i})$ сплетений декартового квадрата $S(K_i) \times S(K_i)$ с симметрической группой $S(\bar{i})$. Более того, если X – конечное множество, то*

$$|\text{At}(\alpha)| = \prod_{i \in Y} (|K_i|^2 \cdot |\bar{i}|).$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Г. Курош, *Общая алгебра*, Лекции 1969–70 учебного года, Наука, М., 1974.
- [2] H. J. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, Chelsea Publ., New York, 1958.
- [3] О. Г. Ганюшкін, Т. В. Турка, “Порядок напівгрупи відповідностей скінченної групи”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2009, № 3, 9–13.
- [4] Т. В. Турка, “Відношення Гріна на напівгрупі відповідностей скінченної групи”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2010, № 4, 38–42.
- [5] Д. А. Бредихин, “Связки соответствий полугрупп”, *Современная алгебра*, Постоянно действующий межвуз. (респ.) темат. сб. Вып. 4, Изд-во Ленингр. гос. пед. ин-та, Л., 1976, 31–47.
- [6] Д. А. Бредихин, “Об определмости нильполугрупп своими связками соответствий”, *Исследования по современной алгебре*, Матем. записки, **11**, № 1, Изд-во Уральского гос. ун-та, Свердловск, 1978, 3–9.
- [7] S. M. Goberstein, “Inverse semigroups determined by their bundles of correspondences”, *J. Algebra*, **125**:2 (1989), 474–488.
- [8] S. M. Goberstein, “On orthodox semigroups determined by their bundles of correspondences”, *Pacific J. Math.*, **153**:1 (1992), 71–84.
- [9] М. С. Бургин, “Категории с инволюцией и соответствия в γ -категориях”, *Тр. ММО*, **22**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1970, 161–228.
- [10] М. Ш. Цаленко, “Классификация категорий соответствий и типы регулярности категорий”, *Тр. ММО*, **41**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1980, 241–285.
- [11] И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, “Неразложимые представления группы Лоренца”, *УМН*, **23**:2 (1968), 3–60.
- [12] S. Mac Lane, “An algebra of additive relations”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **47** (1961), 1043–1051.
- [13] D. Puppe, “Korrespondenzen in Abelschen Kategorien”, *Math. Ann.*, **148** (1962), 1–30.
- [14] А. А. Искандер, “Структура соответствий универсальной алгебры”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29**:6 (1965), 1357–1372.
- [15] А. А. Искандер, “Частичные универсальные алгебры с заданными структурами подалгебр и соответствий”, *Матем. сб.*, **70**:3 (1966), 438–456.
- [16] Г. И. Житомирский, “Стабильные бинарные отношения на универсальных алгебрах”, *Матем. сб.*, **82**:2 (1970), 163–174.
- [17] M. Petrich, “The semigroup of endomorphisms of a linear manifold”, *Duke Math. J.*, **36** (1969), 145–152.
- [18] A. Laradji, A. Umar, “Combinatorial results for semigroups of order-preserving full transformations”, *Semigroup Forum*, **72**:1 (2006), 51–62.
- [19] B. Steinberg, “On the endomorphism monoid of a profinite semigroup”, *Port. Math.*, **68**:2 (2011), 177–183.
- [20] Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок, “Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов”, *Укр. матем. журн.*, **65**:6 (2013), 743–754.
- [21] Б. В. Попов, “Полугруппы эндотопизмов μ -арных отношений”, *Учен. зап. ЛНПУ им. А. Герцена*, **274** (1965), 184–201.

- [22] Ю. В. Жучок, Е. А. Тоичкина, “Полугруппы эндотопизмов отношения эквивалентности”, *Матем. сб.*, **205**:5 (2014), 37–54.
- [23] A. A. Albert, “Quasigroups. I”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 507–519.
- [24] В. Д. Белоусов, “Уравновешенные тождества в квазигруппах”, *Матем. сб.*, **70**:1 (1966), 55–97.
- [25] А. Х. Табаров, “Автотопии и антиавтотопии линейных квазигрупп”, *Докл. АН Республики Татарстан*, **52** (2009), 10–16.
- [26] A. Kh. Tabarov, “On endotopisms of linear and alinear quasigroups”, *The XIV Conference On Applied and Industrial Mathematics* (Chisinau, August 17–19, 2006), 2006, 319–320.
- [27] Ю. В. Жучок, “Ендоморфізми відношень еквівалентності”, *Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки*, 2007, № 3, 22–26.
- [28] В. Флейшер, “О сплетении моноидов с категориями”, *Тр. АН Эстонской ССР*, **35**:3 (1986), 237–243.
- [29] V. Fleischer, U. Knauer, “Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories”, *Semigroups, Theory and Applications*, Lecture Notes in Math., **1320**, Springer-Verlag, Berlin, 1988, 84–96.
- [30] U. Knauer, M. Nieporte, “Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms”, *Arch. Math. (Basel)*, **52**:6 (1989), 607–614.
- [31] Ю. В. Жучок, “Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **17**:3 (2012), 51–60.
- [32] Л. М. Глускин, “Полугруппы изотонных преобразований”, *УМН*, **16**:5 (1961), 157–162.
- [33] K. Čulík, “Zur Theorie der Graphen”, *Časopis Pěst. Mat.*, **83** (1958), 133–155.
- [34] M. Böttcher, U. Knauer, “Endomorphism spectra of graphs”, *Discrete Math.*, **109**:1-3 (1992), 45–57.
- [35] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, *Основы теории групп*, Наука, М., 1972.

Ю. В. Жучок

Киевский национальный университет
им. Т. Шевченко
E-mail: zhuchok_y@mail.ru

Поступило

21.03.2013

Исправленный вариант

19.06.2014

Е. А. Тоичкина

Луганский национальный университет
им. Т. Шевченко
E-mail: elena-romanenko0@rambler.ru