Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Буланкина, А. Б. Купавский, А. А. Полянский,
О гипотезе Шура в $\mathbb{R}^4$, *Матем. заметки*, 2015, том 97,
выпуск 1, 23–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10375>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:56:37

О гипотезе Шура в $\mathbb{R}^4$

В. В. Буланкина, А. Б. Купавский, А. А. Полянский

Граф диаметров в $\mathbb{R}^d$ – это граф, множество вершин которого является конечным подмножеством $\mathbb{R}^d$, а ребрами соединены пары вершин, отстоящих на расстояние, равное диаметру множества вершин. Эта работа посвящена гипотезе Шура, которая утверждает следующее: в любом графе диаметров в $\mathbb{R}^d$ на n вершинах не более n полных подграфов размера d . Известно, что гипотеза Шура верна в размерностях $d \leq 3$. Мы доказываем эту гипотезу для $d = 4$ и приводим простое доказательство для случая $d = 3$.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10375

1. Введение

1.1. История вопроса. Эта работа посвящена одному из классических объектов комбинаторной геометрии – графам диаметров [1]. *Граф диаметров в $\mathbb{R}^d$* – это граф, множество вершин которого является ограниченным подмножеством $\mathbb{R}^d$, а ребрами соединены пары вершин, отстоящих на расстояние, равное диаметру множества вершин. В дальнейшем, без ограничения общности, мы будем говорить только о графах диаметров, соответствующих множествам диаметра единица.

Интерес к графам диаметров возник в 1930-х, во многом благодаря известной проблеме Борсука (см. [2]–[4]). В 1933 г. известный тополог Борсук [5] доказал утверждение о том, что d -мерная сфера не разбивается на d частей меньшего диаметра, и поставил следующий вопрос: верно ли, что любое множество диаметра единица разбивается на $d + 1$ часть строго меньшего диаметра? Положительный ответ на этот вопрос стал известен как гипотеза Борсука. Несмотря на ряд результатов, которые подтверждали гипотезу Борсука, в 1993 году она была опровергнута Каном и Калаи [6] в пространстве очень большой размерности.

Известно, что гипотеза Борсука верна в размерностях $d \leq 3$. Для случая $d = 3$ имеется несколько разных доказательств и, в частности, несколько различных доказательств гипотезы для конечных множеств точек [7], [8]. Видна тесная связь между графами диаметров и проблемой Борсука для конечных множеств точек. Гипотезу Борсука для конечных множеств точек можно сформулировать и так: верно ли, что для любого графа диаметров G в $\mathbb{R}^d$ выполнено $\chi(G) \leq d + 1$, где $\chi(G)$ – это хроматическое число графа.

По-видимому, первой работой, в которой изучались свойства конечных графов диаметров, была работа [9], в которой авторы доказали, что число ребер у n -вершинного графа на плоскости не превосходит n . Отсюда, в частности, выводится и гипотеза Борсука для случая $d = 2$. Васоньи (Vászponyi) предположил, что граф диаметров в $\mathbb{R}^3$ на n вершинах не может содержать более, чем $2n - 2$ ребер. Эта гипотеза была доказана независимо тремя авторами: Грюнбаумом [10], Хеппешем [11] и Стражевичем [12]. В больших размерностях число ребер перестает расти линейно; уже в размерности четыре несложно привести граф на n вершинах, у которого число ребер имеет порядок n^2 . Однако, результат из работы [9] был обобщен на большие размерности в виде следующей гипотезы.

ГИПОТЕЗА (Шур, [13]). *Максимальное число полных подграфов размера d (d -клик) в графе диаметров на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ равно n .*

Как видно, случай $d = 2$ соответствует результату из работы [9]. В работе [13] гипотеза Шура была доказана для $d = 3$. Кроме того, там была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *В графе диаметров в $\mathbb{R}^d$ не более одной $(d + 1)$ -клики.*

Отметим, что k -клика в графе диаметров соответствует в пространстве вершинам правильного $(k - 1)$ -мерного симплекса $\Delta^{(k-1)}$ со стороной единица.

Дальнейшее продвижение в гипотезе Шура получили Морич и Пах.

ТЕОРЕМА 2 [14]. *Если в графе диаметров на n вершинах в $\mathbb{R}^d$ любые две d -клики имеют не менее $d - 2$ общих вершин, то число d -клик в этом графе не превосходит n .*

1.2. Новые результаты. Основной результат этой статьи – это

ТЕОРЕМА 3. *Гипотеза Шура верна в $\mathbb{R}^4$.*

Доказательство будет опираться на теорему 4, представляющую самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 4. *Дан граф диаметров $G = (V, E)$, где множество V – это подмножество S_r^3 трехмерной сферы радиуса $r > 1/\sqrt{2}$. Тогда любые два треугольника в G имеют общую вершину.*

Немного модифицируя доказательство теоремы 2, можно получить ее аналог для сфер достаточно большого радиуса.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть дан n -вершинный граф диаметров G на d -мерной сфере S_r^d радиуса $r > 1/\sqrt{2}$. Пусть любые две d -клики имеют по крайней мере $d - 2$ общие вершины. Тогда общее число d -клик в G не превосходит n . Иными словами, гипотеза Шура верна на сфере для графов описанного вида.*

Из теорем 4, 5 легко выводится

СЛЕДСТВИЕ 1. *Гипотеза Шура верна для графов диаметров на S_r^3 , $r > 1/\sqrt{2}$.*

Кроме того, в данной статье мы приводим простое доказательство того, что любые два треугольника в графе диаметров в $\mathbb{R}^3$ имеют общую вершину. В сочетании с теоремой 2 это дает более короткое доказательство гипотезы Шура в $\mathbb{R}^3$.

В следующем разделе мы докажем теоремы 4, 5. В разделе 3 мы докажем гипотезу Шура в $\mathbb{R}^4$. В разделе 4 мы обсудим гипотезу Шура в $\mathbb{R}^3$.

2. Графы диаметров на сфере

2.1. Доказательство теоремы 4. В дальнейшем для каждой гиперплоскости π обозначим π^+ , π^- полупространства, которые π задает. Для начала докажем две вспомогательных леммы.

ЛЕММА 1. Пусть на круглой границе полуокружности W с центром в точке O выбраны произвольно три точки Q_1 , A , Q_2 , при этом A лежит на дуге Q_1Q_2 . Пусть точка B лежит в полуокружности W и отлична от O . Тогда $|AB| < \max\{|BQ_1|, |BQ_2|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Угол BOA меньше одного из углов BOQ_1 , BOQ_2 . Без ограничения общности, пусть последнего. Тогда по теореме косинусов и в силу того, что $|OQ_2| = |OA|$, получаем $|BQ_2| > |BA|$.

ЛЕММА 2. Пусть даны шары $B_1, \dots, B_k$ с радиусами $r_1, \dots, r_k$ и с центрами в $v_1, \dots, v_k$. Обозначим $S_1, \dots, S_k$ соответствующие им сферы. Пусть $S = \bigcap_{i=1}^k S_i$ — это сфера с центром в v и она ограничивает шар B в плоскости π . Пусть v лежит в выпуклой оболочке точек v_i . Тогда проекция $\bigcap_{i=1}^k B_i$ на плоскость π целиком попадет внутрь шара B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное, т.е., пусть найдется точка $x \in \bigcap_{i=1}^k B_i$ такая, что ее проекция x' на плоскость π не попадает внутрь B . Тогда, конечно же, для каждого i имеем $\|x' - v_i\| > r_i$. Рассмотрим плоскость $\pi^\perp$, ортогональную плоскости π и проходящую через v (а также, естественно, через v_i , $i = 1, \dots, k$). Рассмотрим проекцию u точки x на плоскость $\pi^\perp$. Пусть $\pi_u \subset \pi^\perp$ — это плоскость, ортогональная вектору $\overline{vu}$, проходящая через v . В силу того, что v лежит в выпуклой оболочке точек v_i , найдется такое i , что v_i попадает в то замкнутое полупространство, ограниченное π_u , в которое не попадает u . Имеем $(\overline{vv_i}, \overline{vu}) \leq 0$, а, значит, $(\overline{vv_i}, \overline{vx}) \leq 0$. Отсюда

$$\|v_i - x\|^2 \geq \|v - v_i\|^2 + \|v - x\|^2 > \|v - v_i\|^2 + \|v - x'\|^2 = \|x' - v_i\|^2 > r_i^2.$$

Получаем противоречие с тем, что $x \in \bigcap_{i=1}^k B_i$.

Пусть G лежит на трехмерной сфере S радиуса $r > 1/\sqrt{2}$ с центром в точке v . Точки $v_1, v_2, v_3 \in V$ образуют треугольник, т.е.,

$$|v_1 - v_2| = |v_2 - v_3| = |v_3 - v_1| = 1.$$

Рассмотрим три единичных шара B_1, B_2, B_3 и три ограничивающие их сферы S_1, S_2, S_3 с центрами в v_1, v_2, v_3 . Одну из точек пересечения сфер S, S_1, S_2, S_3 обозначим v_4 .

Обозначим π гиперплоскость, проходящую через v, v_1, v_2, v_3 . Полупространство, образованное π и содержащее v_4 , обозначим π^+ . Через Δ обозначим множество $S \cap B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \pi^+$.

Следующая лемма будет играть ключевую роль в доказательстве теоремы 4.

ЛЕММА 3. Выбраны две точки A и C такие, что $A, C \in \Delta$ и $A, C \notin \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Тогда найдется точка $u \in \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ такая, что $\|A - u\| > \|A - C\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основано на следующем подходе: мы “двигаем” точку C так, что расстояние от A до C будет увеличиваться.

Предположим, что $C \notin \pi$. Тогда точка C лежит на пересечении Ω нескольких сфер из S, S_1, S_2, S_3 (по крайней мере, она лежит на сфере S). Обозначим π_Ω минимальную плоскость, в которой лежит Ω . Так как центры сфер S, S_1, S_2, S_3 лежат в π , то $\pi_\Omega \perp \pi$ (или $\pi_\Omega = \pi$). Отметим, что π_Ω по крайней мере двумерная. Рассмотрим такую двумерную плоскость $\pi' \subseteq \pi_\Omega$, что центр сферы Ω и точка C лежат в π' и, кроме того, $\pi' \perp \pi$. Рассмотрим проекцию A' точки A на π' . Так как $\pi' \perp \pi$, $A' \in \pi^+$. Кроме того, в силу леммы 2 проекция точки A попадет внутрь Ω . Следовательно, по лемме 1 точку C можно заменить на точку, лежащую на пересечении ещё большего числа сфер из S, S_1, S_2, S_3 , либо на точку, лежащую в плоскости π , так, что расстояние от A' до этой точки было бы больше $\|A' - C\|$. Значит, расстояние от точки A до этой точки также больше $\|A - C\|$. Двигая таким образом точку C , мы можем сделать так, чтобы точка C совпала с v_4 , либо точка C лежала в плоскости π , и при этом расстояние $\|A - C\|$ увеличилось бы.

Осталось рассмотреть последний случай $C \in \pi$.

Вложим пространство $\mathbb{R}^4$, в котором лежат все точки $(v, v_1, v_2, v_3, v_4, A, C)$, в $\mathbb{R}^5$ таким образом, чтобы оно совпало с гиперплоскостью

$$\frac{x_1}{a} + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \quad (1)$$

точка v имела бы координаты $(a, 0, 0, 0, 0)$, точка v_1 – координаты $(0, 1, 0, 0, 0)$, точка v_2 – координаты $(0, 0, 1, 0, 0)$, точка v_3 – координаты $(0, 0, 0, 1, 0)$, точка v_4 – координаты $(0, 0, 0, 0, 1)$. Здесь $a > 0$. Несложно убедиться, что это возможно, так как квадрат радиуса сферы S будет равен $a^2 + 1$, а квадрат радиуса любой из сфер S_1, S_2, S_3 равен 2. Точка A лежит на сфере S и внутри сфер S_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, т.е. ее координаты $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ удовлетворяют уравнению

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2ax_1 = 1 \quad (2)$$

и неравенствам

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 2x_j \leq 1, \quad j \in \{2, 3, 4\}.$$

В частности, отсюда следует, что $ax_1 \leq x_j$, $j \in \{2, 3, 4\}$. Точка C лежит на плоскости π и сфере S .

Рассмотрим проекцию A' точки A на плоскость π . Эта точка будет лежать внутри сферы S , так как плоскость π – диаметральная плоскость. Если расстояние от A' до одной из точек v_1, v_2, v_3 будет больше расстояния от A' до C , то и расстояние от самой точки A до одной из точек v_1, v_2, v_3 будет больше расстояния от точки A до C .

Дальше мы будем работать в трехмерной плоскости π . Обозначим π_0 плоскость, образованную v_1, v_2, v_3 , через π_0^+ замкнутое полупространство, в котором содержится точка v , через π_0^- другое замкнутое полупространство. Аналогично определим π_i, π_i^+, π_i^- , где $i \in \{1, 2, 3\}$.

Нетрудно проверить, что точка A' имеет координаты

$$\left(x_1 + \frac{ax_5}{3a^2 + 1}, x_2 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}, x_3 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}, x_4 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}, 0 \right).$$

Если $x_1 + ax_5/(3a^2 + 1) \geq 0$, то и $x_j + a^2x_5/(3a^2 + 1) \geq 0$, $j \in \{2, 3, 4\}$. Значит, если точка $A' \in \pi_0^+$, то $A' \in \pi_i^+$, $i \in \{1, 2, 3\}$.

Если же $x_1 + ax_5/(3a^2 + 1) < 0$, то выполняется не более одного из трех неравенств $x_j + a^2x_5/(3a^2 + 1) < 0$, $j \in \{2, 3, 4\}$. Предположим противное; тогда выполняется два таких неравенства (исключая общность можно считать, что для $j = 2, 3$). Из (1) получаем $x_4 + a^2x_5/(3a^2 + 1) > 1$, а так как A' лежит внутри сферы S , то

$$\left(x_1 + \frac{ax_5}{3a^2 + 1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}\right)^2 + \left(x_3 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}\right)^2 + \left(x_4 + \frac{a^2x_5}{3a^2 + 1}\right)^2 - 2a\left(x_1 + \frac{ax_5}{3a^2 + 1}\right) \leq 1.$$

Значит, $x_4 + a^2x_5/(3a^2 + 1) < 1$. Противоречие.

Итак, в любом случае, A' лежит в двух из трех полупространств π_i^+ , $i \in \{1, 2, 3\}$.

Рассмотрим два случая расположения C .

I. Пусть C лежит только на сфере S и не лежит на сферах S_1, S_2, S_3 . Тогда проведем плоскость через v, A', C . Так как плоскость $x_1 = a$ является опорной плоскостью для множества возможных расположений точки A' , по лемме 1 точку C можно заменить на точку, лежащую в пересечении одной из сфер S_i и S . При этом расстояние от A' до C увеличится. То есть, мы свели данный случай ко второму случаю.

II. Пусть C лежит на пересечении Ω двух сфер S и, скажем, S_1 (пересечение большего числа сфер – это уже вершина симплекса). Тогда спроецируем A' на минимальную плоскость π_Ω , в которой лежит Ω . Заметим, что $A' \in \pi_2^+$, либо $A' \in \pi_3^+$. Без ограничения общности будем считать, что $A' \in \pi_2^+$. Тогда проекция A' на π_Ω лежит в π_2^+ , так как $\pi_2 \perp \pi_\Omega$. Снова пользуясь леммой 1, получаем, что расстояние от проекции точки A' (следовательно, и от точки A) до C меньше, чем расстояние до v_2 или v_3 .

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 4. Рассмотрим два произвольных треугольника v_1, v_2, v_3 и w_1, w_2, w_3 . Рассмотрим плоскость π , проходящую через центр сферы S и точки v_1, v_2, v_3 . В одно из двух полупространств, заданных плоскостью π , попадет по крайней мере две точки из w_j . Если ни одна из них не совпадает с вершинами v_i , то мы получаем противоречие с леммой 3. Таким образом, теорема 4 доказана.

2.2. Доказательство теоремы 5. Доказательство этой теоремы по сути идентично доказательству теоремы 2, поэтому мы не будем его воспроизводить. Основная часть доказательства комбинаторная и проходит без изменений. Единственное, что нам по сути нужно проверить, – это следующая лемма.

ЛЕММА 4. Пусть даны d -мерная сфера $S = S_r^d$ радиуса $r \geq 1/\sqrt{2}$ и единичный симплекс Δ на k вершинах $v_1, \dots, v_k$, все вершины которого лежат на сфере S . Тогда пересечение Ω сферы S с единичными сферами с центрами в $v_1, \dots, v_k$ является сферой радиуса $r_\Omega \geq 1/\sqrt{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = 1/k \sum_{i=1}^k v_i$ – центр сферы, описанный вокруг Δ . По теореме Юнга квадрат радиуса этой сферы равен $(k-1)/2k$. Пусть s – это

центр сферы S . Очевидно, центр w сферы Ω лежит на отрезке vs , $b^2 \stackrel{\text{def}}{=} \|v - s\|^2 = r^2 - (k - 1)/2k$. Пусть отрезок разбивается на части длины $a, b - a$ соответственно. Тогда имеем

$$r_\Omega^2 = r^2 - (b - a)^2 = \frac{k + 1}{2k} - a^2.$$

Отсюда

$$2r_\Omega^2 = r^2 - b^2 + \frac{k + 1}{2k} + 2ab - 2a^2 = 1 + 2a(b - a) \geq 1.$$

Из леммы 4 получаем, что все радиусы сфер, получающиеся при адаптации доказательства теоремы 2 к нашему случаю, как и в случае $\mathbb{R}^d$, получаются не меньше $1/\sqrt{2}$, поэтому мы можем пользоваться леммой 2.2 из статьи [14], и доказательство проходит по сути без изменений. Сформулируем лемму 2.2 из [14].

ЛЕММА 5. Пусть дан граф диаметров на сфере S_r^2 , где $r \geq 1/\sqrt{2}$. Тогда число ребер в этом графе не превосходит числа вершин.

3. Завершение доказательства гипотезы Шура

Пусть нам дан граф диаметров G . Имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 6. Пусть дан граф диаметров G в $\mathbb{R}^4$, и в нем есть две клики K^1, K^2 размера 4. Тогда они не могут пересекаться по одной вершине.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K^1, K^2 имеют общую вершину v . Тогда остальные вершины этих двух клик лежат на трехмерной сфере S единичного радиуса с центром в точке v . Если у K^1, K^2 больше нет общих вершин, то на S вершины K^i образуют два единичных треугольника. Это вступает в противоречие с теоремой 4 и тем, что G – это граф диаметров. То есть, K^1, K^2 пересекаются не менее, чем по двум вершинам.

Кроме того, нам понадобится следующая лемма, которая доказана в [15].

ЛЕММА 7. Если на двумерной сфере радиуса не меньше $1/\sqrt{2}$ даны четыре точки a, b, c, d , при этом диаметр множества из этих четырех точек равен единице, и $|ab| = |cd| = 1$, то короткие диаметральные дуги ab и cd должны пересекаться.

Итак, из леммы 6 имеем, что любые две клики размера 4 либо не имеют общих вершин, либо пересекаются не менее, чем по двум вершинам. Покажем, что можно представить множество V вершин графа как объединение непересекающихся множеств вершин $V_1, \dots, V_k$ со следующими свойствами. Во-первых, любая 4-клика графа целиком попадает в одно из множеств $V_1, \dots, V_k$. Во-вторых, внутри каждого из множеств V_i все 4-клики пересекаются не менее, чем по двум вершинам. Иными словами, мы хотим разбить все 4-клики на классы эквивалентности, в котором две клики считаются эквивалентными, если они пересекаются. Затем в качестве V_i мы берем объединение всех вершин клик из i -го класса эквивалентности. Вершины, не входящие ни в какую клику, добавим в любой из классов.

Для того, чтобы доказать, что такое разбиение возможно, нам нужно показать, что эквивалентность определена корректно. Нам нужно проверить транзитивность, т.е., что нет тройки клик K^1, K^2, K^3 таких, что

$$|K^1 \cap K^2| = |K^1 \cap K^3| = 2, \quad |K^2 \cap K^3| = 0$$

(если пересечение K^1 с одной из оставшихся клик будет больше двух, то по принципу Дирихле они также будут пересекаться). Пусть вершины клики K^1 – это точки v_1, v_2, v_3, v_4 , при этом $v_1, v_2 \in K^2$, $v_3, v_4 \in K^3$. Кроме того, $w_1, w_2 \in K^2$, $w_3, w_4 \in K^3$. Плоскость, которая проходит через v_1, v_2, v_3, v_4 , обозначим π . Точки v_1, v_2, w_3, w_4 лежат на двумерной сфере S_1 радиуса $\sqrt{3}/2$, центр которой лежит в середине отрезка, соединяющего вершины v_3, v_4 , а сама сфера – в плоскости, ортогональной этому отрезку. Аналогично точки v_3, v_4, w_1, w_2 лежат на двумерной сфере S_2 радиуса $\sqrt{3}/2$, центр которой лежит в середине отрезка, соединяющего вершины v_1, v_2 , а сама сфера – в плоскости, ортогональной этому отрезку.

В силу леммы 7 дуги v_3v_4 и w_1w_2 (равно как и дуги v_1v_2 и w_3w_4) пересекаются. Нужно отметить, что исключен также и случай, когда одна из вершин w_1, w_2 , скажем, w_1 , попадает внутрь дуги v_3v_4 . В силу того, что обе дуги короче четверти большого круга и сами являются дугами больших кругов, сферическая шапочка с центром в w_2 и с w_1 на границе не может содержать и v_3 , и v_4 одновременно, т.е., либо $\|w_2 - v_3\|$, либо $\|w_2 - v_4\|$ больше единицы. Отсюда получаем, что ни одна из точек w_i не может лежать в плоскости π . В противном случае она была бы обязана совпадать с одной из вершин v_i , и пересечение одной из пар клик было бы больше 2. А этот случай мы уже исключили. Без ограничения общности будем считать, что w_1, w_3 лежат в π^+ , а w_2, w_4 – в π^- . Рассмотрим трехмерные сферы S_1^w, S_2^w единичного радиуса с центрами в w_1, w_2 . Они пересекаются со сферой S_1 по точкам v_1, v_2 , при этом ни одна из сфер S_i^w не содержит S_1 целиком, поскольку отрезки, соединяющие центр S_1 с w_1, w_2 , не ортогональны плоскости, в которой лежит сфера S_1 . Действительно, у обоих отрезков есть ненулевая составляющая, ортогональная плоскости π . Однако, любой вектор, ортогональный плоскости π , содержится в плоскости сферы S_1 . С другой стороны, центр любой сферы, содержащей S_1 целиком, дает в проекции на минимальную плоскость, содержащую S_1 , центр S_1 , так что вектор, указывающий из центра S_1 на этот центр, имеет нулевую компоненту в плоскости S_1 . Значит, пересечение S_1 и S_i^w – это окружности S'_i на S_1 , проходящие через точки v_1, v_2 (см. рис. 1).

Мы хотим показать, что для точек w_3, w_4 не найдется расположения, которое не будет противоречить одному из условий, возникающих из того, что наш граф – это граф диаметров. Точки w_3, w_4 лежат на сфере S_1 . При этом $w_3, w_4 \in B_1^w \cap B_2^w \cap B_1^v \cap B_2^v$, где B_i^w – это шары единичного радиуса с центрами в w_i , а B_i^v – это шары единичного радиуса с центрами в v_i . Мы утверждаем, что пересечение $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w \cap B_1^v \cap B_2^v$ пусто.

В дальнейшем мы будем вести рассуждения только в рамках гиперплоскости, содержащей S_1 , поэтому пересечение трехмерных сфер S_1^w, S_2^w с гиперплоскостью будем обозначать так же, как и сами сферы. Обозначим w'_1, w'_2 проекции соответствующих центров, которые и являются центрами двумерных сфер S_1^w, S_2^w . Отметим, что w'_1 лежит в π^+ (здесь и далее под плоскостью π мы опять же понимаем пересечение π и гиперплоскости, а полупространства считаем открытыми), а w'_2 – в π^- . Пусть плоскость π_1 – это плоскость, ортогональная v_1v_2 , и проходящая через центр этого отрезка. В этой плоскости лежит центр S_1 и точки w'_1, w'_2 . Будем считать, что v_1 лежит в π_1^+ , а v_2 – в π_1^- . Пусть π_2 – это двумерная плоскость, ортогональная и π , и π_1 , проходящая через центр S_1 . Легко проверить, что множество $S_1 \cap B_1^v \cap B_2^v$ целиком лежит в открытом полупространстве, ограничиваемом плос-

Рис. 1

костью π_2 . Действительно, если взять произвольную точку на сфере S_1 , принадлежащую π_2^- , то с одной из точек v_1, v_2 и центром сферы S_1 она будет образовывать угол, больший $\pi/2$, и, в силу того, что радиус сферы S_1 больше $1/\sqrt{2}$, расстояние между этими точками будет больше единицы.

Покажем, что окружности S'_1 и $S_1 \cap S_1^v$ внутри полупространства π_1^- пересекаются только в одной точке – в v_2 . В силу того, что S'_1 лежит на S_1 , пересечение этих двух окружностей совпадает с пересечением сферы S_1^v и окружности S'_1 . Далее, поскольку центр S'_1 лежит на окружности S'_1 , точки пересечения этих двух сфер должны быть симметричны относительно прямой, соединяющей их центры, в плоскости, содержащей S'_1 . Но, поскольку оба центра лежат в π_1^+ , хотя бы одна из точек пересечения должна лежать в π_1^+ . Аналогичный факт верен про окружности S'_2 и $S_1 \cap S_1^v$, а также в симметричном полупространстве π_1^+ для окружностей $S_1 \cap S_2^v$ и S'_2 .

Область $S_1 \cap B_1^w$ расположена над плоскостью окружности S'_1 (в сторону вектора нормали к плоскости π , направленного в π^+ ; по-другому, эта область содержит точку пересечения луча Ow'_1 со сферой S_1). Аналогично, $S_1 \cap B_2^w$ расположена под плоскостью окружности S'_2 . Здесь стоит также отметить, что плоскость окружности S'_i не может быть параллельна плоскости π_2 , поскольку в таком случае точка w'_i лежала бы в плоскости π . Отсюда несложно вывести, что, в зависимости от расположения точек w'_1, w'_2 , у области $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ есть два варианта расположения.

Случай 1. Область $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ на сфере ограничена большими дугами окружностей S'_i , с вершинами в точках v_1, v_2 . С другой стороны, область $S_1 \cap B_1^v \cap B_2^v$ задается следующим образом:

$$S_1 \cap B_1^v \cap B_2^v = S_1 \cap B_1^v \cap \pi_1^- \cup S_1 \cap B_2^v \cap \pi_1^+.$$

Из приведенных выше рассуждений понятно, что области $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ и $S_1 \cap B_2^v \cap \pi_1^+$ пересекаются только по вершине v_1 , а области $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ и $S_1 \cap B_1^v \cap \pi_1^-$ пересекаются только по вершине v_2 . Таким образом, мы получаем, что

$$S_1 \cap B_1^v \cap B_2^v \bigcap S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w = \{v_1, v_2\},$$

и, значит, расположить точки w_3, w_4 нам негде.

Случай 2. Область $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ на сфере ограничена меньшими дугами окружностей S'_i , с вершинами в точках v_1, v_2 . В таком случае область $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ целиком попадет в сферическую шапочку H , которую отсекает плоскость π' , параллельная π_2 и проходящая через v_1, v_2 . При этом в пересечении $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ и π' будут только точки v_1, v_2 . Действительно, $S_1 \cap B_1^w$ пересекается с $\pi' \cap S_1 \cap \pi^-$ только по точкам v_1, v_2 (в силу описанного в абзаце перед случаем 1 расположения $S_1 \cap B_1^w$). Аналогично, $S_1 \cap B_2^w$ пересекается с $\pi' \cap S_1 \cap \pi^+$ только по точкам v_1, v_2 . С другой стороны, меньшие дуги окружностей S'_i , должны лежать внутри H .

Окружность $S_1 \cap \pi'$ имеет диаметр единица, поэтому точки, лежащие на сфере S_1 строго внутри H , не могут отстоять друг от друга на расстояние один. Таким образом, между точками $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ не может быть расстояния единица, если только эти точки не совпадают с v_1, v_2 , и, значит, внутри $S_1 \cap B_1^w \cap B_2^w$ не найдется места для точек w_3, w_4 .

Мы показали, что, действительно, 4-клики разбиваются на классы эквивалентности, поэтому существует описанное в начале доказательства разбиение множества V вершин на подмножества $V_1, \dots, V_k$. Применяя к каждому из V_i теорему 2, получаем, что количество 4-клик на каждом из множеств V_i не превосходит $|V_i|$, поэтому суммарное количество клик не превосходит $\sum_i |V_i| = n$. Гипотеза Шура в $\mathbb{R}^4$ доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы доказали гипотезу Шура в $\mathbb{R}^4$, не доказав гипотезу 3 из работы [14], которая утверждает, что в графе диаметров в $\mathbb{R}^4$ любые две 4-клики должны иметь по крайней мере две общих вершины. Очень вероятно, что эта гипотеза справедлива, однако она носит вспомогательный характер, поэтому доказательство этого факта выходит за рамки наших задач в статье.

4. Гипотеза Шура в $\mathbb{R}^3$

В данном разделе мы приведем короткое доказательство следующего утверждения (частного случая гипотезы 3 из работы [14]):

ТЕОРЕМА 6. *В графе диаметров G в $\mathbb{R}^3$ любые два треугольника имеют общую вершину.*

В сочетании с теоремой 2 эта теорема дает доказательство гипотезы Шура в $\mathbb{R}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Симплексом Рело размерности d назовем тело, лежащее в пересечении $B_1^d(x_i)$ — единичных шаров радиуса 1 с центрами в x_i , где $x_i, i = 1, 2, \dots, d+1$, — вершины единичного симплекса Δ^d . Тетраэдром Рело будем называть симплекс Рело при $d = 3$.*

Название конструкции возникло по аналогии с *треугольником Рело* – фигурой на плоскости, образующейся в случае $d = 2$. Надо отметить, что симплекс Рело при $d \geq 3$, в отличие от треугольника Рело, не является фигурой постоянной ширины.

Основную роль будет играть следующая лемма, которая является аналогом леммы 3.

ЛЕММА 8. *В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим пересечение Δ тетраэдра Рело с вершинами $v_1, \dots, v_4$ с полупространством π^+ . Полупространство π^+ содержит v_4 и образовано плоскостью π , проходящей через v_1, v_2, v_3 . Рассмотрим произвольные точки $X, Y \in \Delta$, не совпадающие с вершинами, такие, что $|X - Y| = a$. Тогда найдется i такое, что $|X - v_i| > a$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть обе точки лежат на плоской грани Δ (она является треугольником Рело). Без ограничения общности можно считать, что точка Y лежит на границе треугольника Рело, на окружности с центром в точке v_1 . Рассмотрим замкнутые полуплоскости, образованные прямой Yv_1 . Тогда расстояние от точки X до точки Y меньше, чем расстояние от X до той вершины треугольника Рело, которая лежит с X в разных полуплоскостях.

Пусть теперь точки не лежат в плоскости π . Если к плоскости π ближе точка Y , то, без ограничения общности, можно считать, что она совпадает со своей проекцией на плоскость π . Проецируем на плоскость точку X , получая точку X' . Пользуясь написанными выше рассуждениями, находим вершину v_i такую, что $X'Y < X'v_i$ и далее по теореме Пифагора получаем, что $XY < Xv_i$.

Теперь предположим, что к плоскости π ближе точка X . Продлим отрезок XY до отрезка XY' так, чтобы точка Y' принадлежала границе Δ . Нам понадобится рассмотреть два случая.

Случай 1. Точка Y' принадлежит сфере с центром в точке v_1 и не лежит на сферах с центрами в других вершинах тетраэдра. Обозначим сферическую часть границы усеченного тетраэдра Рело с центром в v_1 за s . Рассмотрим плоскость p'' , содержащую точки X, Y', v_1 . Заметим, что точка Y' лежит на дуге D , принадлежащей пересечению $p'' \cap s$.

Пусть дуга D пересекает границу s в точках Q_1, Q_2 . Мы применяем лемму 1 для точек Q_1, Q_2 в качестве самих себя, для X, Y' в качестве B, A и v_1 в качестве O . Отметим, что, действительно, все точки лежат внутри полукруга, поскольку v_1 – это точка границы тетраэдра Рело, и через нее можно провести (опорную) плоскость так, чтобы все точки множества остались в одном полупространстве относительно этой плоскости. Пересечение этого полупространства с кругом с центром в v_1 и даст искомый полукруг. Получаем, что либо $|Q_1X|$, либо $|Q_2X|$ больше $|XY'|$.

Таким образом, данный случай сводится к следующему.

Случай 2. Пусть точка Y' лежит на дуге l , являющейся пересечением двух сферических частей границы, которые образованы, например, сферами с центрами в точках v_1 и v_2 . Центр окружности, которой принадлежит l , – это точка v , являющаяся серединой отрезка v_1v_2 . Спроецируем точку X на плоскость, которая содержит дугу l . Получим точку X' . Для завершения доказательства нам достаточно показать, что либо $X'v_3$, либо $X'v_4$ больше, чем $X'Y'$. После этого останется лишь применить теорему Пифагора.

Этот факт, в свою очередь, опять же следует из леммы 1. Выбор точек ясен, а в качестве плоскости, отсекающей полукруг, нужно взять плоскость π . Лемма 8 доказана.

Из леммы 8 для $a = 1$ получаем, что в Δ не может быть двух точек на расстоянии единица, ни одна из которых не совпадает с вершиной тетраэдра.

Рассмотрим граф диаметров G в $\mathbb{R}^3$ и треугольник $V = v_1 v_2 v_3$, принадлежащий G . Все вершины графа G обязаны лежать в объединении двух областей вида Δ (это две области, которые строятся с участием вершин v_1, v_2, v_3 и у которых плоскость π — это как раз плоскость, содержащая эти вершины).

Рассмотрим треугольник $W = w_1 w_2 w_3$, принадлежащий G . В одной из описанных областей вида Δ будет две вершины треугольника W . Обозначим через v_4 четвертую вершину этой области Δ . В силу леммы 8, либо W должен иметь одну общую вершину с треугольником V , либо v_4 будет одной из вершин треугольника W . В последнем случае нетрудно проверить, что внутри Δ на расстоянии 1 от v_4 находятся лишь точки v_1, v_2, v_3 , а значит вторая вершина треугольника W , находящаяся внутри Δ , совпадает с вершиной треугольника V . Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [2] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [3] А. М. Райгородский, “Вокруг гипотезы Борсука”, *Геометрия и механика*, СМФН, **23**, РУДН, М., 2007, 147–164.
- [4] A. M. Raigorodskii, “Three lectures on the Borsuk partition problem”, *Surveys in Contemporary Mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 202–247.
- [5] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euklidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [6] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–62.
- [7] V. L. Dol’nikov, “Some properties of graphs of diameters”, *Discrete Comput. Geom.*, **24**:2-3 (2000), 293–299.
- [8] A. Heppes, P. Révész, “Zum Borsukschen Zerteilungsproblem”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**:2 (1956), 159–162.
- [9] H. Hopf, E. Pannwitz, “Aufgabe 167”, *Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein.*, **43** (1934), 114.
- [10] B. Grünbaum, “A proof of Vászonyi’s conjecture”, *Bull. Res. Council Israel. Sect. A*, **6** (1956), 77–78.
- [11] A. Heppes, “Beweis einer Vermutung von A. Vászonyi”, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **7**:3-4 (1956), 463–466.
- [12] S. Straszewicz, “Sur un problème géométrique de P. Erdős”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III*, **5** (1957), 39–40.
- [13] Z. Schur, M. A. Perles, H. Martini, Y. S. Kupitz, “On the number of maximal regular simplices determined by n points in $\mathbb{R}^d$ ”, *Discrete and Computational Geometry, Algorithms Combin.*, **25**, Springer-Verlag, Berlin, 2003, 767–787.
- [14] F. Morić, J. Pach, “Remarks on Schur’s conjecture”, *Computational Geometry and Graphs, Lecture Notes in Comput. Sci.*, **8296**, Springer-Verlag, Berlin, 2013, 120–131.

- [15] K. J. Swanepoel, “Unit distances and diameters in Euclidean spaces”, *Discrete Comput. Geom.*, **41**:1 (2009), 1–27.

В. В. Буланкина

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: tirenadr@gmail.ru

Поступило

10.07.2013

Исправленный вариант

05.05.2014

А. Б. Купавский

Московский физико-технический институт
(государственный университет),

г. Долгопрудный Московской обл.

E-mail: kupavskii@ya.ru

А. А. Полянский

Московский физико-технический институт
(государственный университет),

г. Долгопрудный Московской обл.