Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Монахов, И. К. Чирик, О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 911–920

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10376>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 04:12:20

О сверхразрешимости конечной факторизуемой группы с циклическими силовскими подгруппами в сомножителях

В. С. Монахов, И. К. Чирик

Для фиксированного простого числа p при некоторых дополнительных ограничениях устанавливается p -сверхразрешимость конечной p -разрешимой группы $G = AB$ с циклическими силовскими p -подгруппами в A и в B . В частности, доказана сверхразрешимость конечной группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические и либо G 2-замкнута, либо A и B – максимальные подгруппы.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10376

Введение. Рассматриваются только конечные группы. Все используемые понятия и обозначения соответствуют [1], [2].

Пусть p – простое число. Группа называется p -сверхразрешимой (p -разрешимой), если порядки ее главных (соответственно композиционных) факторов либо равны p , либо не делятся на p . Несложно проверить, что p -разрешимая группа с циклической силовской p -подгруппой является p -сверхразрешимой.

В 1967 г. Беркович [3; теорема 3.1] установил p -сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка при условии, что силовские p -подгруппы в A и в B циклические. Отсюда вытекает сверхразрешимость группы $G = AB$ нечетного порядка, если все силовские подгруппы в A и в B циклические.

Для групп четного порядка аналогичные результаты неверны. Для фиксированного простого p первые примеры не p -сверхразрешимых групп $G = AB$ четного порядка с циклическими силовскими p -подгруппами в A и в B привел Мазуров [4; с. 75]. Кроме того, он доказал непрототу группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические [5].

Данная тематика развивалась в работах Асаада, Монахова [6], [7] и Чертка [8]. В частности, в [7] доказана 3-сверхразрешимость 3-разрешимой группы $G = AB$ при условии, что силовские 2-подгруппы и 3-подгруппы в A и в B циклические.

В рассматриваемой факторизации силовская p -подгруппа является бициклической, т.е. является произведением двух циклических подгрупп. В [9] исследованы разрешимые группы с бициклическими силовскими подгруппами. В частности, такие группы принадлежат $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Здесь $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{U}$ – классы всех нильпотентных групп нечетного порядка, 2-групп и сверхразрешимых групп соответственно, а $\mathfrak{N}_2\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ – их формационное произведение. Отсюда вытекает, что нильпотентная

длина разрешимой группы с бициклическими силовскими подгруппами не выше 4, а производная длина не выше 6. Кроме того, p -ранг группы G не превышает 2 при любом $p > 2$ и 3 при $p = 2$. Группы таких рангов подробно изучены в [10]. Эти результаты охватывают все разрешимые группы, факторизуемые двумя подгруппами с циклическими силовскими.

Цель настоящей заметки – получить новые признаки p -сверхразрешимости группы, факторизуемой двумя подгруппами, обладающими циклическими силовскими p -подгруппами. В частности, устанавливается сверхразрешимость группы $G = AB$ при условии, что все силовские подгруппы в A и в B циклические и либо группа G 2-замкнута, либо A и B – максимальные подгруппы.

1. Необходимые обозначения и вспомогательные леммы. Через G' , $F(G)$ и $\Phi(G)$ обозначаются коммутант, подгруппы Фиттинга и Фраттини группы G ; A_n и S_n – знакопеременная и симметрическая группы степени n ; Z_m – циклическая группа порядка m ; $O_p(G)$ и $O_{p'}(G)$ – наибольшие нормальные в группе G p - и p' -подгруппы. Группа с нормальной силовской p -подгруппой называется p -замкнутой, а группа с нормальной p' -холловой подгруппой называется p -нильпотентной. Запись $[A]B$ означает полупрямое произведение с нормальной подгруппой A .

Через $p\mathfrak{S}$ и $p\mathfrak{U}$ обозначим классы всех p -разрешимых и p -сверхразрешимых групп соответственно, а $l_p(G)$ – p -длина p -разрешимой группы G . Хорошо известно, что классы $p\mathfrak{S}$ и $p\mathfrak{U}$ являются насыщенными наследственными формациями. Если H – подгруппа группы G , то $\text{Core}_G H = \bigcap_{x \in G} x^{-1}Hx$ – ее ядро [1; гл. 3.4], которое является наибольшей нормальной в G подгруппой, содержащейся в H . Группу, содержащую максимальную подгруппу с единичным ядром, называют *примитивной*. Общие свойства примитивных групп подробно описаны в [1; гл. 4.6], [2; гл. 2].

ЛЕММА 1. *Предположим, что p -разрешимая группа G не принадлежит $p\mathfrak{U}$, но $G/K \in p\mathfrak{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы K . Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$;
- 2) группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N , $N = O_p(G) = C_G(N)$;
- 3) G – примитивная группа; если M – максимальная в G с единичным ядром, то $G = [N]M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $O_{p'}(G) \neq 1$, то по условию леммы $G/O_{p'}(G) \in p\mathfrak{U}$. Из определения p -сверхразрешимой группы следует, что $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Если $\Phi(G) \neq 1$, то по условию $G/\Phi(G) \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – насыщенная формация, то $G \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит, $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$.

2) Если в группе G имеются две различные минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2 , то $N_1 \cap N_2 = 1$. По условию $G/N_1 \in p\mathfrak{U}$, $G/N_2 \in p\mathfrak{U}$, а поскольку $p\mathfrak{U}$ – формация, то $G \simeq G/(N_1 \cap N_2) \in p\mathfrak{U}$, противоречие. Значит, группа G содержит единственную минимальную нормальную подгруппу N . В p -разрешимой группе каждая минимальная нормальная подгруппа является либо p' -подгруппой, либо абелевой p -подгруппой. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то N будет p -подгруппой. В группе с единичной подгруппой Фраттини подгруппа Фиттинга совпадает с произведением всех абелевых минимальных нормальных подгрупп [1; теорема 4.24], поэтому $N = F(G) = O_p(G)$. Из [11; лемма 2] получаем, что $N = C_G(N)$.

3) Так как $\Phi(G) = 1$, то существует максимальная подгруппа M , не содержащая подгруппу N . Ясно, что $G = MN$. Если $\text{Core}_G M \neq 1$, то из единственности минимальной нормальной подгруппы N следует, что $N \subseteq \text{Core}_G M$, $G = MN = M$, противоречие. Поэтому $\text{Core}_G M = 1$ и G – примитивная группа. Из того, что N – минимальная нормальная в G подгруппа и $G = NM$ следует, что $N \cap M = 1$ и $G = [N]M$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G . Тогда и только тогда группа G p -сверхразрешима, когда она p -нильпотентна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что каждая p -нильпотентная группа является p -сверхразрешимой. Обратно, пусть группа G p -сверхразрешима и p – наименьший простой делитель порядка G . По индукции $O_{p'}(G) = 1$, а так как класс всех p -нильпотентных групп является насыщенной формацией, то $\Phi(G) = 1$ и $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная в G подгруппа. Поэтому $|F| = p$ и $C_G(F) = F$. Теперь фактор-группа G/F циклическая порядка, делящего $p - 1$. Но p – наименьший простой делитель порядка группы, поэтому $F = G$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть диэдральная 2-группа G является произведением циклических подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$. Если $|a| \geq |b|$, то $|b| = 2$ и $G = [\langle a \rangle]\langle b \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$G = \langle x, y \mid x^{2^t} = y^2 = 1, x^y = x^{-1} \rangle$$

– диэдральная 2-группа. Тогда $G = \{1, x, x^2, \dots, x^{2^t-1}, y, xy, x^2y, \dots, x^{2^t-1}y\}$,

$$(x^i y)^2 = x^i y x^i y = x^i (y x y)^i = x^i (x^{-1})^i = 1,$$

т.е. все элементы в $G \setminus \langle x \rangle$ – инволюции. Если $|G| = 4$, то утверждение очевидно. Пусть $|G| \geq 8$, тогда $|a| \geq 4$ и $a \in \langle x \rangle$. Элемент $b \notin \langle x \rangle$, поэтому $|b| = 2$. Теперь $G = [\langle a \rangle]\langle b \rangle$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4 [2; II.8.17]. Пусть G – группа порядка 12 или 24. Если группа G имеет элементарную абелеву нормальную подгруппу N порядка 4 и $C_G(N) = N$, то

$$G \simeq A_4 \quad \text{или} \quad G \simeq S_4.$$

Неоднократно будет использоваться следующая

ЛЕММА 5 [9; лемма 2]. Пусть силовская p -подгруппа в p -разрешимой группе G бициклическая. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если $p = 2$, то $G/O_{2',2}(G)$ либо имеет нечетный порядок, либо изоморфна S_3 ; в частности, $l_2(G) \leq 2$;
- 2) если $p > 2$, то $l_p(G) \leq 1$.

2. Основные результаты. Напомним, что секцией группы G называется фактор-группа H/K , где H и K – подгруппы группы G и K является нормальной в H подгруппой. Группа G называется S_4 -свободной, если она не содержит секций, изоморфных симметрической группе S_4 степени 4.

ТЕОРЕМА 1. Зафиксируем простое число p . Пусть A и B – подгруппы p -разрешимой группы G и $G = AB$. Предположим, что силовские p -подгруппы в A и в B циклические. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) если группа G 2-замкнута, то G p -сверхразрешима;
- 2) если $p = 2$, то G 2-сверхразрешима при условии, что выполняется любое одно из следующих требований:
  - 2.1) $l_2(G) \leq 1$;
  - 2.2) группа G S_4 -свободна;
  - 2.3) A и B – максимальные в G подгруппы.
- 3) если $p > 2$, то G p -сверхразрешима при условии, что выполняется любое одно из следующих требований:
  - 3.1) A – максимальная в G подгруппа;
  - 3.2) подгруппы A и B p -нильпотентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что группа G не p -сверхразрешима и применим индукцию по порядку группы. По [2; VI.4.6] силовская p -подгруппа G_p группы G является произведением некоторых силовских p -подгрупп A_p и B_p из A и B , поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая. При $p > 2$ из леммы 5 следует, что $l_p(G) \leq 1$. При $p = 2$ по условию теоремы G_2 нормальна в G .

Если $N \neq 1$ – нормальная в G подгруппа, то $G/N = (AN/N)(BN/N)$ удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы и G/N p -сверхразрешима по индукции. Из леммы 1 следует, что $O_{p'}(G) = \Phi(G) = 1$, $O_{p'}(G)$ является единственной минимальной нормальной в G подгруппой и $N = O_p(G) = F(G) = C_G(F(G))$ нециклическая по [1; лемма 4.46]. Так как $l_p(G) \leq 1$, то $N = G_p$ – силовская p -подгруппа группы G . Теперь подгруппа $N = G_p$ одновременно элементарная абелева и является произведением двух циклических подгрупп $A_p = N \cap A$ и $B_p = N \cap B$, поэтому $|N| = p^2$ и G/N изоморфна p' -подгруппе из группы $\text{Aut } N = GL(2, p)$. Ясно, что $|N \cap A| = |N \cap B| = p$, подгруппа N не содержится в A и не содержится в B , $N = (N \cap A) \times (N \cap B)$.

Если $p = 2$, то $|N| = 4$ и группа G/N изоморфна подгруппе нечетного порядка из $\text{Aut } N = GL(2, 2) \simeq S_3$, поэтому порядок группы G равен 12. По лемме 4 группа G изоморфна A_4 , которая не обладает требуемой факторизацией, противоречие.

Пусть $p > 2$. Так как $O_{p'}(G) = 1$ и группа G 2-замкнута, то порядок G нечетен. Теперь по [3; теорема 3.1] группа G p -сверхразрешима. Итак, первое утверждение теоремы 1 доказано.

2) Ввиду леммы 2 достаточно показать 2-нильпотентность группы G . Используя индукцию по порядку группы G и лемму 1, можно утверждать, что $O(G) = \Phi(G) = 1$, группа G примитивна, подгруппа Фиттинга $F = F(G) = C_G(F)$ является элементарной абелевой 2-подгруппой и F нециклическая по [1; лемма 4.46]. По [2; VI.4.6] силовская 2-подгруппа G_2 группы G является произведением некоторых силовских 2-подгрупп A_2 и B_2 из A и B , поэтому $G_2 = A_2 B_2$ бициклическая.

2.1) Предположим, что $l_2(G) \leq 1$. Тогда F является силовской 2-подгруппой группы G . Теперь $F = G_2$ – элементарная абелева бициклическая нециклическая подгруппа, поэтому $|F| = 4$, а G/F изоморфна подгруппе нечетного порядка группы $GL(2, 2) \simeq S_3$. Отсюда следует, что G – группа порядка 12 с силовской 3-подгруппой R порядка 3. Можно считать, что $R \subseteq A$. Из факторизации $G = AB$, где A и B – подгруппы с циклическими силовскими 2-подгруппами, следует, что R нормальна в группе G , противоречие.

2.2) Пусть G S_4 -свободна и $l_2(G) > 1$. Из леммы 5 следует, что $G/F \simeq S_3$. По лемме 4 группа G изоморфна S_4 , противоречие.

2.3) Пусть теперь A и B – максимальные в G подгруппы и $l_2(G) > 1$. Из леммы 5 следует, что $G/F \simeq S_3$. По лемме 4 группа G изоморфна S_4 . Группа S_4 обладает единственной факторизацией $S_4 = AB$ с циклическими силовскими 2-подгруппами в сомножителях A и B : $A \simeq S_3$, $B \simeq Z_4$, причем подгруппа S_3 максимальна в S_4 , а подгруппа Z_4 не является максимальной в S_4 . Получили противоречие с условием. Утверждение 2) доказано.

3) Применим индукцию по порядку группы. Ввиду утверждения 1 теоремы 1 надо считать, что порядок группы G четен. По [2; VI.4.6] силовская p -подгруппа G_p является произведением некоторых силовских p -подгрупп A_p и B_p из A и B , поэтому $G_p = A_p B_p$ бициклическая. Так как $p > 2$, то из леммы 5 следует, что $l_p(G) \leq 1$.

Если $N \neq 1$ – нормальная в группе G подгруппа, то либо $G/N = AN/N$, либо $G/N = (AN/N)(BN/N)$ удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы. В случае $G/N = AN/N$ силовская p -подгруппа в G/N будет циклической и G/N p -сверхразрешима. Во втором случае G/N p -сверхразрешима по индукции. Итак, G не принадлежит $p\mathcal{U}$, но $G/N \in p\mathcal{U}$ для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N . Из леммы 1 следует, что

$$\Phi(G) = 1, \quad O_{p'}(G) = 1, \quad N = O_p(G) = F(G) = C_G(F(G)),$$

подгруппа N является единственной минимальной нормальной в G подгруппой и N нециклическая по [1; лемма 4.46]. Так как $l_p(G) \leq 1$, то $N = G_p$ – силовская p -подгруппа группы G , N – элементарная абелева подгруппа порядка p^2 ,

$$\begin{aligned} N \not\subseteq A, \quad N \not\subseteq B, \quad N = N_1 \times N_2, \\ N_1 = N \cap A, \quad N_2 = N \cap B, \quad |N_1| = |N_2| = p, \end{aligned}$$

где N_1 – нормальная в A силовская p -подгруппа из A , N_2 – нормальная в B силовская p -подгруппа из B .

Пусть H и K – p' -холловы подгруппы из A и B из соответственно такие, что $HK = KH$ – p' -холлова подгруппа группы G , они существуют по [2; VI.4.6]. Ясно, что $G = [N](HK)$ и $H \neq 1 \neq K$.

3.1) Пусть A – максимальная подгруппа группы G . Тогда $AN = G = AN_2$ и $|G : A| = p$. Теперь N_1 – нормальная в G подгруппа, противоречие.

3.2) Пусть A и B – p -нильпотентные подгруппы. Тогда

$$A = N_1 \times H \neq G \neq B = N_2 \times K.$$

Если $g = ab$ – произвольный элемент из G , $a \in A$, $b \in B$, то

$$H^g K = H^{ab} K = H^b K = b^{-1} H b K = K H^b = K H^g,$$

и $H^K \cap K^H$ субнормальна в G по [12; 7.2.5]. Здесь $X^Y = \langle X^y \mid y \in Y \rangle$, где X и Y – подгруппы группы G . Теперь $H^K \cap K^H \subseteq O_{p'}(G)$ по [12; 7.7.2]. Поскольку $O_{p'}(G) = 1$, то $[H, K] = 1$, $K \subseteq N_G(H)$, $|G : N_G(H)| = p$. Поэтому $N_G(H) = AK$ и $N \cap N_G(H) = N_1$ будет нормальной в группе G подгруппой, противоречие. Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть A и B – подгруппы группы G и $G = AB$. Предположим, что все силовские подгруппы в A и в B циклические. Если группа G 2-замкнута, то G сверхразрешима.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A и B – подгруппы группы G и $G = AB$. Предположим, что все силовские подгруппы в A и в B циклические. Если A и B – максимальные в G подгруппы, то G сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа G разрешима, то по теореме 1 она будет r -сверхразрешимой для каждого $r \in \pi(G)$, поэтому G будет сверхразрешимой. Следовательно, надо установить только разрешимость группы G .

Воспользуемся индукцией по порядку группы G . Пусть K – неединичная нормальная в G подгруппа. Если $K \subseteq A \cap B$, то G/K удовлетворяет условиям теоремы и по индукции разрешима. Если K не содержится в A , то $G = AK$ и $G/K \simeq A/A \cap K$ будет опять разрешимой. Аналогично, если K не содержится в B , то $G = BK$ и $G/K \simeq B/B \cap K$ разрешима. Итак, в любом случае G/K разрешима. Если K разрешима, то разрешимой будет и группа G . Поэтому справедливо следующее утверждение.

(1) В группе G нет неединичных разрешимых нормальных подгрупп, в частности, $\text{Core}_G A = \text{Core}_G B = 1$.

Пусть K – минимальная нормальная в G подгруппа. Тогда K неразрешима и является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Несложно проверить, что выполнены следующие утверждения.

(2) Группа K – единственная минимальная нормальная в G подгруппа, $C_G(K) = 1$ и фактор-группа G/K изоморфна подгруппе из $\text{Out}(K)$. Кроме того,

$$G = AK = BK \quad \text{и} \quad G/K \simeq A/A \cap K \simeq B/B \cap K.$$

(3) Порядок группы

$$|K| = \frac{|G/K| \cdot |A \cap K| \cdot |B \cap K|}{|A \cap B|},$$

в частности, $|K|$ делит $|\text{Out}(K)| \cdot |A \cap K| \cdot |B \cap K|$.

Так как $G = AB$ и $G/K \simeq A/A \cap K \simeq B/B \cap K$, то

$$\begin{aligned} |G| &= \frac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|} = \frac{|G/K| \cdot |A \cap K| \cdot |G/K| \cdot |B \cap K|}{A \cap B} = |K| \cdot |G/K|, \\ |K| &= \frac{|G/K| \cdot |A \cap K| \cdot |B \cap K|}{|A \cap B|}. \end{aligned}$$

Согласно (2) фактор-группа G/K изоморфна подгруппе из $\text{Out}(G)$, поэтому $|K|$ делит $|\text{Out}(K)| \cdot |A \cap K| \cdot |B \cap K|$.

(4) Пусть $p \in \pi(G)$, p – наибольшее. Будем считать, что $p \in \pi(A)$. Тогда $A = N_G(G_p)$ для некоторой силовской p -подгруппы G_p и $p \notin \pi(B)$.

Согласно [2; VI.4.6] для некоторых силовских p -подгрупп G_p , A_p и B_p из G , A и B соответственно выполняется равенство $G_p = A_p B_p$. Так как $1 \neq A_p$ нормальна в A [1; лемма 4.49] и A – максимальная в G подгруппа, то $A = N_G(A_p)$ и $A_p = G_p$.

Если $p \in \pi(B)$, то $B = N_G(B_p)$ и $B_p = G_p$. Теперь G_p нормальна в G , противоречие с (1). Поэтому $p \notin \pi(B)$.

(5) Пусть q – наибольшее в $\pi(B)$. Тогда $B = N_G(G_q)$ для некоторой силовой q -подгруппы G_q и $q \notin \pi(A)$.

Согласно [2; VI.4.6] для некоторых силовских q -подгрупп G_q, A_q и B_q из G , A и B соответственно выполняется равенство $G_q = A_q B_q$. Подгруппа B_q нормальна в B [1; лемма 4.49], поэтому $B = N_G(B_q)$ и $G_q = B_q$. Если $A_q \neq 1$, то $A_q \subseteq G_q = B_q$. Так как B_q циклическая и нормальна в B , то A_q нормальна в B . Теперь

$$A_q^G = A_q^{BA} = A_q^A \subseteq A, \quad 1 \neq A_q \subseteq \text{Core}_G A,$$

противоречие с (1). Значит, $A_q = 1$ и $q \notin \pi(A)$.

(6) В группе G нет $\{p, q\}$ -холловой подгруппы.

Предположим, что в группе G существует $\{p, q\}$ -холлова подгруппа H . Силовая p -подгруппа H_p из H сопряжена с подгруппой G_p , поэтому $G_p \subseteq H^x$ для некоторого $x \in G$. Так как $p > q$, то G_p нормальна в H^x и $H^x \subseteq N_G(G_p) = A$, противоречие с (5). Поэтому предположение неверно и в G нет $\{p, q\}$ -холловой подгруппы.

(7) Имеем

$$G_p \subseteq A \cap K = N_K(G_p), \quad G_q \subseteq B \cap K = N_K(G_q),$$

K – простая неабелева группа.

Так как $p \notin \pi(B)$ и $G/K \simeq B/B \cap K$, то $G_p \subseteq A \cap K = N_K(G_p)$. Аналогично, $q \notin \pi(A)$ и $G/K \simeq A/A \cap K$, поэтому $G_q \subseteq B \cap K = N_K(G_q)$. Поскольку G_p циклическая, а K – прямое произведение изоморфных групп, то K – простая неабелева группа.

(8) Подгруппа K изоморфна $\text{PSL}_2(p)$.

В работе Казарина [13] с помощью классификации простых групп перечислены все неабелевы композиционные факторы неразрешимой группы $G = AB$ с разрешимыми подгруппами A и B . Они исчерпываются следующими группами:

$$\begin{aligned} M_{11}, \quad \text{PSp}_4(3), \quad \text{PSL}_4(2), \quad \text{PSU}_3(8), \\ \text{PSL}_3(r^n), \quad r^n \leq 8, \quad \text{PSL}_2(r^n), \quad r^n > 3. \end{aligned}$$

Здесь r простое, n натуральное. Так как в нашей факторизации подгруппы A и B разрешимы, то нормальная в G подгруппа K может быть изоморфной только группе из этого списка. Используя свойства этих групп [14], исключим из рассмотрения все возможности для подгруппы K , кроме $\text{PSL}_2(p)$. За простыми числами p и q закрепим их значения из (4) и (5).

Предположим, что $K \simeq M_{11}$. Тогда $|K| = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$, $|\text{Out}(K)| = 1$, [14; с. 17]. Поэтому $G = K$, $p = 11$ и $A = [Z_{11}]Z_5$. Теперь силовая 2-подгруппа в группе G должна быть циклической, что в простой группе невозможно.

Пусть $K \simeq \text{PSp}_4(3)$. Тогда $|K| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$, $|\text{Out}(K)| = 2$, [14; с. 26]. Поэтому $p = 5$, $K \cap A = [Z_5]Z_4$ и $q = 3$. Теперь $|A|$ делит $2^3 \cdot 5$ и силовая 3-подгруппа в группе G должна быть циклической и содержаться в подгруппе K . Но в $\text{PSp}_4(3)$ силовая 3-подгруппа не циклическая [14; с. 26], противоречие.

Пусть $K \simeq \text{PSL}_4(2)$. Тогда $|K| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $|\text{Out}(K)| = 2$, [14; с. 22]. Поэтому $p = 7$, $K \cap A = [Z_7]Z_3$ и $q = 5$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^5 \cdot 3 \cdot 5$. Но подгрупп таких порядков с циклической силовой 2-подгруппой в группе $\text{PSL}_4(2)$ нет [14; с. 22].

Пусть $K \simeq \text{PSU}_3(8)$. Тогда $|K| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 19$, $|\text{Out}(K)| = 2 \cdot 3^2$, [14; с. 66]. Поэтому $p = 19$, $K \cap A = [Z_{19}]Z_3$ и $q = 7$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^8 \cdot 3 \cdot 7$. Но подгрупп таких порядков с циклической силовой 2-подгруппой в группе $\text{PSU}_3(8)$ нет [14; с. 66].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_3(3)$. Тогда $|K| = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$, $|\text{Out}(K)| = 2$, [14; с. 13]. Поэтому $p = 13$, $K \cap A = [Z_{13}]Z_3$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^3 \cdot 3^2$. Но подгрупп таких порядков с циклическими силовскими 2- и 3-подгруппами в группе $\text{PSL}_3(3)$ нет [14; с. 13].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_3(4)$. Тогда $|K| = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$, $|\text{Out}(K)| = 2^2 \cdot 3$, [14; с. 23]. Поэтому $p = 7$, $K \cap A = [Z_7]Z_3$ и $q = 5$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 5$. Но подгрупп таких порядков с циклической силовой 2-подгруппой в группе $\text{PSL}_3(4)$ нет [14; с. 23].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_3(5)$. Тогда $|K| = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 31$, $|\text{Out}(K)| = 2$, [14; с. 38]. Поэтому $p = 31$, $K \cap A = [Z_{31}]Z_3$ и $q = 5$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 5^3$. Но подгрупп таких порядков с циклическими силовскими 2- и 5-подгруппами в группе $\text{PSL}_3(5)$ нет [14; с. 38].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_3(7)$. Тогда $|K| = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$, $|\text{Out}(K)| = 2 \cdot 3$, [14; с. 50]. Поэтому $p = 19$, $K \cap A = [Z_{19}]Z_3$ и $q = 7$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^4 \cdot 7^3$. Но подгрупп таких порядков с циклическими силовскими 2- и 7-подгруппами в группе $\text{PSL}_3(7)$ нет [14; с. 50].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_3(8)$. Тогда $|K| = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 73$, $|\text{Out}(K)| = 2 \cdot 3$, [14; с. 74]. Поэтому $p = 73$, $K \cap A = [Z_{73}]Z_3$ и $q = 7$. Из (3) заключаем, что $|K \cap B|$ делится на $2^8 \cdot 7^2$. Но подгрупп таких порядков с циклическими силовскими 2- и 7-подгруппами в группе $\text{PSL}_3(8)$ нет [14; с. 74].

Пусть $K \simeq \text{PSL}_2(2^n)$, $n \geq 2$. Ввиду изоморфизма $\text{PSL}_2(2^2) \simeq \text{PSL}_2(5)$ можно считать, что $n \geq 3$. В группе G силовая 2-подгруппа бициклическая. Согласно [3; лемма 3.3] в бициклической 2-группе любая нормальная подгруппа порождается не более, чем тремя элементами. Так как в $\text{PSL}_2(2^n)$ силовая 2-подгруппа элементарная абелева, то $n = 3$. Поскольку $|\text{Out}(\text{PSL}_2(2^3))| = 3$, то из (3) следует, что силовая 2-подгруппа группы G содержится в K и должна быть элементарной абелевой порядка 8, что невозможно. Поэтому изоморфизм $K \simeq \text{PSL}_2(2^n)$, $n \geq 3$, исключается.

Пусть $K \simeq \text{PSL}_2(r^n)$, r – нечетное простое число, $n \geq 2$. Так как в группе G силовая r -подгруппа метациклическая, то $n = 2$ и

$$|K| = \frac{1}{2} r^2 (r^2 - 1) (r^2 + 1), \quad |\text{Out}(K)| = 4.$$

Поскольку G_p и G_q циклические и содержатся в K , то $p > r \neq q$, подгруппа $A \cap K = N_K(G_p)$ совпадает с некоторой диэдральной подгруппой порядка $r^2 + 1$ и $|A|$ делит $4(r^2 + 1)$. Из (6) заключаем, что подгруппа $B \cap K = N_K(G_q)$ совпадает с некоторой диэдральной подгруппой порядка $r^2 - 1$ и $|B|$ делит $4(r^2 - 1)$. Так как $G = AB$, то r не делит порядок группы G , противоречие. Поэтому изоморфизм $K \simeq \text{PSL}_2(r^n)$, $n \geq 2$, исключается.

Для подгруппы K осталась одна возможность: $K \simeq \text{PSL}_2(r)$, r – нечетное простое число. Так как

$$|K| = \frac{1}{2}r(r-1)(r+1), \quad |\text{Out}(K)| = 2,$$

то $p = r$ – наибольшее в $\pi(G)$. Утверждение (8) доказано.

(9) *Окончание доказательства.*

Согласно [5] группа G не проста, поэтому $K \neq G$. Поскольку

$$\text{Aut } \text{PSL}_2(p) = \text{PGL}_2(p), \quad |\text{PGL}_2(p) : \text{PSL}_2(p)| = 2,$$

то $G \simeq \text{PGL}_2(p)$. Группа $G \simeq \text{PGL}_2(p)$ имеет порядок $p(p^2 - 1)$ и изоморфна подгруппе группы $\text{PSL}_2(p^2)$, поэтому силовская 2-подгруппа в G диэдральная и $|A \cap B|$ – нечетное число по лемме 3. Согласно (7) подгруппа $A = N_G(G_p)$, поэтому $|A| = p(p-1)$. Так как B не является 2-подгруппой [2; IV.7.4], то q – нечетное число и $B \cap K = N_K(G_q)$ является диэдральной группой порядка $p+1$. Из (2) следует, что $|B| = 2(p+1)$, поэтому $|A \cap B| = 2$, противоречие. Теорема 2 доказана.

Следующие примеры показывают, что предложенные в теоремах 1 и 2 ограничения ослабить нельзя.

ПРИМЕР 1. Полупрямое произведение $[E_{7^2}]S_3$, в котором симметрическая группа S_3 неприводимо действует на элементарной абелевой группе E_{7^2} порядка 49, является минимальной несверхразрешимой группой, она 2- и 3-сверхразрешима, но не 7-сверхразрешима. Эта группа обладает следующей факторизацией:

$$[E_{7^2}]S_3 = ([U]Z_2)([V]Z_3), \quad E_{7^2} = U \times V, \quad U \simeq V \simeq Z_7.$$

Все силовские подгруппы в сомножителях $[U]Z_2$ и $[V]Z_3$ циклические, но группа не 7-сверхразрешима. Поэтому требование 2-замкнутости группы в пункте 1) теоремы 1 нельзя заменить на 2-нильпотентность и, тем более, на условие $l_2(G) \leq 1$. Подгруппы $[U]Z_2$ и $[V]Z_3$ не максимальны и не 7-нильпотентны, поэтому требования 3.1 и 3.2 теоремы 1 не являются лишними.

ПРИМЕР 2. Симметрическая группа S_4 не является 2-сверхразрешимой и совпадает с произведением своих подгрупп S_3 и $\langle(1234)\rangle$, причем подгруппа $\langle(1234)\rangle$ не является максимальной в S_4 . Поэтому в пункте 2) теоремы 1 каждое из трех условий ($l_2(G) \leq 1$; группа G S_4 -свободна; A и B – максимальные в G подгруппы) не является лишним. Этот пример также показывает, что в пункте 2) теоремы 2 требование максимальности обоих сомножителей не является лишним.

ПРИМЕР 3. Простая группа $\text{PSL}_2(31)$ обладает следующей факторизацией:

$$\text{PSL}_2(31) = AB, \quad A = [Z_{31}]Z_{15}, \quad |B| = 2^5,$$

причем A и B – максимальные $\text{PSL}_2(31)$ в подгруппы, B – диэдральная силовская 2-подгруппа. Поэтому в пункте 2) теоремы 2 требование цикличности силовских подгрупп в обоих сомножителях не является лишним.

ПРИМЕР 4. Симметрическая группа степени 5 обладает следующей факторизацией: $S_5 = ([Z_5]Z_4) \cdot Z_6$, причем $[Z_5]Z_4$ – максимальная в S_5 подгруппа, а подгруппа Z_6 не максимальна в S_5 . Поэтому в пункте 2) теоремы 2 требование максимальности обоих сомножителей не является лишним.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышэйшая школа, Минск, 2006.
- [2] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [3] Я. Г. Беркович, “О разрешимых группах конечного порядка”, *Матем. сб.*, **74**:1 (1967), 75–92.
- [4] В. Д. Мазуров, “О факторизации конечных групп”, *XII Всесоюзный алгебраический коллоквиум*, Тезисы сообщений. Тетрадь 1, ИММ УрО АН СССР, Свердловск, 1973.
- [5] В. Д. Мазуров, *Замечания о конечных группах*, Деп. в ВИНТИ № 404-74, 1974.
- [6] M. Asaad, V. S. Monakhov, “Some sufficient conditions for a finite group to be supersolvable”, *Acta Math. Hungar.*, **135**:1-2 (2012), 168–173.
- [7] В. С. Монахов, “О частичной сверхразрешимости конечной факторизуемой группы”, *Докл. НАН Беларуси*, **45**:3 (2001), 32–36.
- [8] В. Д. Черток, “Об одном классе разрешимых групп”, *Сиб. матем. журн.*, **10**:3 (1969), 712–715.
- [9] В. С. Монахов, Е. Е. Грибовская, “О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп”, *Матем. заметки*, **70**:4 (2001), 603–612.
- [10] В. С. Монахов, А. А. Трофимук, “О конечных разрешимых группах фиксированного ранга”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:5 (2011), 1123–1137.
- [11] В. С. Монахов, О. А. Шпырко, “О нильпотентной π -длине максимальных подгрупп конечных π -разрешимых групп”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2009, № 6, 3–8.
- [12] J. C. Lennox, S. E. Stonehewer, *Subnormal Subgroups of Groups*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [13] Л. С. Казарин, “О группах, представимых в виде произведения двух разрешимых подгрупп”, *Comm. Algebra*, **14**:6 (1986), 1001–1066.
- [14] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups. Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1985.

В. С. Монахов

Гомельский государственный университет
им. Ф. Скорины, Беларусь
E-mail: Victor.Monakhov@gmail.com

Поступило

11.08.2013

Исправленный вариант

20.11.2013

И. К. Чирик

Гомельский инженерный институт МЧС
Республики Беларусь
E-mail: chyrykira@mail.ru