Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Садуллаев, С. А. Имомкулов, К. Х. Рахимов, Ограниченная субгармоническая функция обладает свойством Лебега в каждой точке, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 921–925

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10377>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 06:44:48

Ограниченная субгармоническая функция обладает свойством Лебега в каждой точке

А. С. Садуллаев, С. А. Имомкулов, К. Х. Рахимов

Доказывается, что сужение субгармонической ограниченной в области $D \subset \mathbb{C}$ функции на любую вещественную прямую $l \subset \mathbb{C}$ обладает свойством Лебега в каждой точке из $l \cap D$.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10377

1. Введение. Пусть $\varphi(x)$ – суммируемая функция, заданная на $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется *точкой Лебега* функции φ , если

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| dx = 0. \quad (1.1)$$

Ясно, что любая точка непрерывности функции $\varphi(x)$ является точкой Лебега. В общем случае почти все (по мере Лебега) точки суммируемой функции являются точками Лебега. Если $x_0 \in (a, b)$ есть точка Лебега функции φ , то функция

$$f(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$$

имеет в этой точке производную, равную $f'(x_0) = \varphi(x_0)$. Отметим, что функции одного вещественного переменного $y = f(x)$, имеющие производные в каждой точке $x \in (a, b)$, обладают многими важными свойствами. В частности, если производная $f'(x)$ такой функции суммируема, то эта производная полностью определяет саму функцию:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

2. Основной результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u(z)$ – ограниченная субгармоническая функция в области $D \subset \mathbb{C}$, $u(z) \in \text{sh}(D) \cap L^\infty(D)$ и l – произвольная фиксированная вещественная прямая, имеющая непустое пересечение с D . Тогда для сужения $\varphi = u|_l$ каждая точка $x \in l \cap D$ является его точкой Лебега.

Для доказательства теоремы воспользуемся хорошо известным понятием разреженности и критерием Винера (см., например, [1; гл. VII] и [2; гл. V]). Множество E называется *разреженным* в точке $z_0 \in \bar{E}$, если в некоторой окрестности U точки z_0 существует субгармоническая функция $u(z) \in \text{sh}(U)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{z \rightarrow z_0, z \in E \setminus \{z_0\}} u(z) < u(z_0).$$

Для удобства точки $z_0 \notin \bar{E}$ тоже считаются разреженными точками множества E .

КРИТЕРИЙ ВИНЕРА. *Борелевское множество $E \subset \mathbb{C}$ является разреженным в точке $z_0 \in \bar{E}$ тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\ln(1/C(E_n))} < \infty, \quad (2.1)$$

где

$$E_n = E \cap \{z : q^{n+1} \leq |z - z_0| \leq q^n\}, \quad 0 < q < 1,$$

и $C(E_n)$ – логарифмическая емкость.

Так как для борелевских множеств $E \subset l \subset \mathbb{C}$ имеет место неравенство $C(E) \geq (1/4) \text{mes}(E)$, то из (2.1) вытекает, что для разреженной точки $x_0 \in \bar{E}$ верно неравенство

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\ln(1/\text{mes}(E_n))} < \infty. \quad (2.2)$$

Например, для разреженности множества $E \subset l \subset \mathbb{C}$ в точке $x_0 \in \bar{E}$ необходимо выполнение соотношения

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{mes}(E_n)}{q^n} = 0, \quad (2.3)$$

ибо в противном случае общий член ряда (2.2) не будет стремиться к нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $u(z)$ – ограниченная субгармоническая в области D функция. Не нарушая общности, можно считать, что $l = \{z = x + iy : y = 0\}$ и $l \cap D = (a, b) \subset \mathbb{R}$. Из (2.3) вытекает, что разреженная точка $x_0 \in \mathbb{R}$ множества E является точкой плотности 0, т.е. верно равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{mes } E \cap \{|x - x_0| < h\}}{2h} = 0. \quad (2.4)$$

Пусть $\varphi(t)$ – сужение u на отрезке (a, b) . Выберем произвольную точку $x \in (a, b)$ и рассмотрим интеграл

$$J(x, h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\varphi(t) - \varphi(x)| dt \quad \text{для всех } h: |h| < 1, \quad x + h \in (a, b).$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и положим

$$I(\varepsilon) = \{t \in (a, b) : |\varphi(t) - \varphi(x)| > \varepsilon\}.$$

Ясно, что множество $I(\varepsilon)$ является разреженным в точке x . Согласно (2.4) плотность множества $I(\varepsilon)$ в точке x равна нулю, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{mes } I(\varepsilon) \cap [x-h, x+h]}{2h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I(\varepsilon) \cap [x-h, x+h]} dt = 0.$$

Из последнего равенства и ограниченности φ вытекает, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{I(\varepsilon) \cap [x-h, x+h]} |\varphi(t) - \varphi(x)| dt = 0. \quad (2.5)$$

Так как $|\varphi(t) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ для любого $t \in (a, b) \setminus I(\varepsilon)$, то отсюда и из (2.5) следует, что

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |\varphi(t) - \varphi(x)| dt \leq \varepsilon.$$

В силу произвольности числа ε получим справедливость (1.1), т.е. точка $x \in (a, b)$ является точкой Лебега.

Доказанная теорема для субгармонических функций в пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, справедлива в следующей формулировке.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ и $u(z) \in \text{sh}(D) \cap L^\infty(D)$. Тогда для любой гиперплоскости

$$P \subset \mathbb{R}^m, \quad \dim P = m - 1, \quad P \cap D \neq \emptyset,$$

каждая точка $x^0 \in P \cap D$ является точкой Лебега сужения $\varphi = u|_P$, т.е.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{m-1}} \int_{P \cap B(x, h)} |\varphi(x) - \varphi(x^0)| dV_P = 0,$$

где dV_P – элемент площади на гиперплоскости P .

Отметим, что для плоскости меньшей размерности теорема 2, вообще говоря, неверна.

3. Приложения. В работе Кепке [3] построен пример функции $f(x)$, определенной в интервале (a, b) , для которой существует $f'(x)$ для всех $x \in (a, b)$, причем множество нулей $Z_f = \{x \in (a, b) : f'(x) = 0\}$ и его дополнение $(a, b) \setminus Z_f$ всюду плотны в интервале (a, b) . Дальнейшие модификации примера Кепке имеются в работах Помпейю [4] и Донжуа [5]. Недавно Калябин [6] доказал, что для любого счетного множества $X = \{x_k\}_{k=1}^\infty \subset [0, 1]$ функция

$$\varphi(x) = \inf_{k \in \mathbb{N}} |x - x_k|^{1/k}$$

обладает следующими свойствами:

- 1) $\varphi(x)$ – полунепрерывна сверху на отрезке $[0, 1]$;
- 2) $\varphi(x_k) = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\varphi(x) > 0$ почти во всех точках $x \in [0, 1]$;
- 3) каждая точка $x \in [0, 1]$ является точкой Лебега для φ .

Доказанная в п. 2 теорема 1 позволяет утверждать, что для каждого полного полярного множества $X \subset \mathbb{R}$ существует функция $\varphi(x)$, для которой верны следующие свойства:

- 1) $\varphi(x)$ – полунепрерывна сверху;
- 2) $\varphi(x) = 0$ для любого $x \in X$ и $\varphi(x) > 0$ вне X ;
- 3) каждая точка $x \in \mathbb{R}$ является точкой Лебега для φ .

Таким образом, при всех $x \in \mathbb{R}$ функция $\varphi(x)$ является производной своей первообразной:

$$f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt, \quad f'(x) = \varphi(x) \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}.$$

Кроме того, в силу 2) функция $f(x)$ монотонно возрастает на $\mathbb{R}$.

Для доказательства 1)–3) достаточно заметить, что в силу полноты и полярности множества X существует такая функция $\vartheta(z) \in \text{sh}(\mathbb{C})$, что $X = \{z \in \mathbb{C} : \vartheta(z) = -\infty\}$. Теперь достаточно применить теорему 1 к локально ограниченной субгармонической функции $u(z) = e^{\vartheta(z)}$ и сужению u на прямую $l = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

ПРИМЕР. Рассмотрим счетное всюду плотное на сегменте $[-1/2, 1/2] \subset \mathbb{R}$ множество рациональных чисел

$$X = \{p_k/q_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \quad q_k \geq 1,$$

и построим на плоскости функцию

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln |z - p_k/q_k|}{q_k^{2+\sigma}}, \quad \sigma > 0. \quad (3.1)$$

Тогда

$$u(z) \in \text{sh}(\mathbb{C}), \quad u|_X \equiv -\infty, \quad u(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln |p_k/q_k|}{q_k^{2+\sigma}} \neq -\infty.$$

Следовательно, множество $\widehat{X} = \{z \in \mathbb{C} : u(z) = -\infty\}$ является полярным борелевским множеством типа G_δ , причем $X \subset \widehat{X} \subset [-1/2, 1/2]$. Так как X не является множеством типа G_δ , то $\widehat{X} \neq X$.

Заметим, что субгармоническая функция, построенная в (3.1), связана с диофантовыми числами: если точка x^0 является диофантовым числом, то $u(x^0) \neq -\infty$ (напомним, что вещественное число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *диофантовым*, если существуют числа $c > 0$, $\mu > 0$ такие, что $|\alpha - p/q| \geq c/q^\mu$ для всех $p, q \in \mathbb{N}$). Множество всех диофантовых чисел имеет полную меру Лебега, более того, его дополнение имеет нулевую хаусдорфову размерность.

Применяя теорему 1 к функции $\exp u$, мы получаем, что сужение

$$\varphi(x) = \exp u|_{y=0} = \exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln |x - p_k/q_k|}{q_k^{2+\sigma}},$$

обладает следующими свойствами:

- а) $\varphi(x)$ полунепрерывна сверху на отрезке $[-1/2, 1/2]$, причем она является непрерывной во всех точках множества $\widehat{X}$, которое является всюду плотным в $[-1/2, 1/2]$;
- б) $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \widehat{X}$;
- в) $\varphi(x) > 0$ для любого диофантового числа $x \in [-1/2, 1/2]$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. Брело, *Основы классической теории потенциала*, Мир, М., 1964.
- [2] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.
- [3] A. M. Bruckner, *Differentiation of Real Functions*, Lecture Notes in Math., **659**, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [4] D. Pompeiu, “Sur les fonctions dérivées”, *Math. Ann.*, **63**:3 (1907), 326–332.
- [5] A. Denjoy, “Sur les fonctions dérivées sommables”, *Bull. Soc. Math. France*, **43** (1915), 161–248.
- [6] Г. А. Калябин, “Новые примеры функций Помпейю”, *Международная конференция “Теория функций и функциональный анализ”*, Тезисы, Астана, 2012, 47–48.

А. С. Садуллаев

Национальный университет Узбекистана

им. М. Улугбека

E-mail: sadullaev@mail.ru

Поступило

26.10.2013

Исправленный вариант

04.03.2014

С. А. Имомкулов

Навоиский государственный педагогический

институт

E-mail: sevdiyor_i@mail.ru

К. Х. Рахимов

Национальный университет Узбекистана

им. М. Улугбека

E-mail: karimjon1705@gmail.com