Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Вайгант, А. А. Папин, Об единственности решения задачи протекания с заданным вихрем, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 820–826

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10380>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:06:12

Об единственности решения задачи протекания с заданным вихрем

В. А. Вайгант, А. А. Папин

Для двумерных нестационарных уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости рассматривается задача протекания с заданным вихрем. Доказана единственность решения.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10380

1. Введение. Пусть Ω – ограниченная в $\mathbb{R}^2$ область с границей Γ , состоящей из частей трех видов: непроницаемой стенки Γ^0 , участков втекания Γ^1 и вытекания Γ^2 . Через $(x, y) \in \Omega$ и $t \in [0, T]$ обозначим декартовы координаты и время;

$$\vec{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t)).$$

Обозначим

$$Q = \Omega \times (0, T), \quad S = \Gamma \times (0, T), \quad S^i = \Gamma^i \times (0, T), \quad i = 0, 1, 2,$$

$\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к Γ . Предположим, что Ω – односвязная область, участки Γ^0 , Γ^1 , Γ^2 являются объединением конечного числа кривых класса C^2 -гладкости и участки втекания Γ^1 и вытекания Γ^2 соприкасаются с Γ^0 под ненулевым углом. Рассмотрим течение идеальной несжимаемой жидкости в области Ω . Система уравнений Эйлера, описывающих движение, имеет вид [1; гл. 4, с. 156]

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y + P_x &= f_1, \\ v_t + uv_x + vv_y + P_y &= f_2, \\ u_x + v_y &= 0, \quad (x, y, t) \in Q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В начальный момент времени $t = 0$ поле скоростей предполагается известным

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}^0(x, y), \quad \operatorname{div} \vec{u}^0 = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \tag{1.2}$$

На непроницаемой стенке Γ^0 границы Γ выполняется условие непротекания

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = 0, \quad (x, y, t) \in S^0. \tag{1.3}$$

На участке Γ^1 задана нормальная компонента скорости

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = a(x, y, t) \leq -m_1^2, \quad (x, y, t) \in S^1, \tag{1.4}$$

где $m_1 = \operatorname{const} \neq 0$.

На участке Γ^2 задана нормальная компонента скорости

$$(\vec{u} \cdot \vec{n}) = b(x, y, t) \geq m_2^2, \quad (x, y, t) \in S^2, \quad (1.5)$$

где $m_2 = \text{const} \neq 0$. Кроме того, на Γ^1 заданы значения вихря

$$w = v_x - u_y = g(x, y, t), \quad (x, y, t) \in S^1. \quad (1.6)$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$\int_{\Gamma^1} a \, d\Gamma + \int_{\Gamma^2} b \, d\Gamma = 0, \quad \int_{\Omega} P \, d\Omega = 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Под решением задачи (1.1)–(1.6) понимается обобщенное решение в смысле работы [2].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА. *Обобщенное решение задачи (1.1)–(1.6) с ограниченным вихрем единственно.*

Следует отметить, что единственность в задаче непротекания с ограниченным вихрем доказана в работе [2]. В [3] этот результат был обобщен на случай определенного роста вихря в L_p . Близкий результат получен в работе [4] в пространствах Бесова. В [5], [6] единственность решения одной задачи установлена в пространствах Орлича.

В работе используются обозначения пространств, принятые в [1; гл. 1].

2. Единственность. Для простоты изложения будем считать, что область Ω представляет собой квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$, а

$$\begin{aligned} \Gamma^0 &= \{0 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 1\}, \\ \Gamma^1 &= \{0 \leq y \leq 1, x = 0\}, \\ \Gamma^2 &= \{0 \leq y \leq 1, x = 1\}. \end{aligned}$$

Введя функцию тока $\Psi(x, y, t)$, $u = \Psi_y$, $v = -\Psi_x$, и применив к уравнениям системы (1.1) операцию rot , получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi_t + \Psi_y(\Delta \Psi)_x - \Psi_x(\Delta \Psi)_y &= f, \\ \Psi|_{t=0} &= \Psi^0(x, y), \quad \Psi|_{x=0} = g_1(y, t), \\ \Psi|_{x=1} &= g_2(y, t), \quad \Psi|_{y=0} = \Psi|_{y=1} = k = \text{const} > 0, \\ \Delta \Psi|_{x=0} &= g_3(y, t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Отметим, что

$$g_1(0, t) = g_2(0, t) = 0, \quad g_1(1, t) = g_2(1, t) = k \quad \text{для всех } t \in [0, T],$$

а также

$$\frac{\partial g_1}{\partial y} \geq m_1^2, \quad \frac{\partial g_2}{\partial y} \geq m_2^2 \quad \text{для всех } y \in [0, 1], \quad t \in [0, T].$$

Пусть имеется два обобщенных решения Ψ^1 и Ψ^2 задачи (2.1) в классе

$$\|\Delta\Psi^1(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M, \quad \|\Delta\Psi^2(t)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq M \quad \text{для почти всех } t \in (0, T),$$

$m_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$. Если обозначить

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Psi^1 + \Psi^2),$$

то для разности $H = \Psi^1 - \Psi^2$ получим следующую линейную задачу:

$$\begin{aligned} \Delta H_t + \Psi_y(\Delta H)_x - \Psi_x(\Delta H)_y + H_y(\Delta\Psi)_x - H_x(\Delta\Psi)_y &= 0, \\ H|_{t=0} &= 0, \quad H|_\Gamma = 0, \quad \Delta H|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Докажем, что решением задачи (2.2) является $H = 0$.

Умножим уравнение (2.2) на $H(x, y, t)$ и проинтегрируем по области Ω . После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\nabla H|^2 d\Omega + \int_\Omega ((\Psi_{xx} - \Psi_{yy})H_x H_y + \Psi_{xy}(H_y^2 - H_x^2)) d\Omega \\ = -\frac{1}{2} \int_0^1 \Psi_y H_x^2|_{x=1} dy + \frac{1}{2} \int_0^1 \Psi_y H_x^2|_{x=0} dy. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Теперь получим оценку для величины $\int_0^1 H_x^2|_{x=0} dy$. Умножим уравнение (2.2) на гармоническую функцию $\varphi(x, y, t)$, $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, которая удовлетворяет следующим условиям на границе Γ :

$$\varphi|_{y=0} = \varphi|_{y=1} = \varphi|_{x=1} = 0,$$

а значение φ при $x = 0$ будет указано позже. Тогда получим следующее равенство:

$$\int_\Omega \varphi \Delta H_t d\Omega - \int_\Omega (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) \Delta H d\Omega - \int_\Omega (\varphi_x H_y - \varphi_y H_x) \Delta \Psi d\Omega = 0.$$

Отсюда, учитывая граничные условия, находим

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \varphi H_{xt}|_{x=0} dy - \int_0^1 (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) H_x|_{x=0}^{x=1} dy \\ - \int_\Omega H \Delta (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) d\Omega - \int_\Omega (\varphi_x H_y - \varphi_y H_x) \Delta \Psi d\Omega = 0, \\ - \int_0^1 \varphi H_{xt}|_{x=0} dy - \int_0^1 (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) H_x|_{x=0}^{x=1} dy - \int_\Omega (\varphi_x H_y - \varphi_y H_x) \Delta \Psi d\Omega \\ - \int_\Omega H [2(\nabla \varphi_x \nabla \Psi_y - \nabla \varphi_y \nabla \Psi_x) + \varphi_x (\Delta \Psi)_y - \varphi_y (\Delta \Psi)_x] d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \varphi H_{xt}|_{x=0} dy - \int_0^1 (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) H_x|_{x=0}^{x=1} dy \\ + 2 \int_\Omega H [\nabla \varphi_x \nabla \Psi_y - \nabla \varphi_y \nabla \Psi_x] d\Omega = 0, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \varphi H_{xt}|_{x=0} dy - \int_0^1 (\varphi_x \Psi_y - \varphi_y \Psi_x) H_x|_{x=0} dy + \int_0^1 \varphi_x \Psi_y H_x|_{x=1} dy \\ & - 2 \int_{\Omega} [\varphi_x (H_x \Psi_{xy} - H_y \Psi_{xx}) + \varphi_y (H_x \Psi_{yy} - H_y \Psi_{xy})] d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Разложим функцию $H_x|_{x=0}$ в ряд Фурье

$$H_x|_{x=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k(t) \sin \pi k y, \quad \theta^k(t) = 2 \int_0^1 H_x|_{x=0} \sin \pi k y dy.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k \cdot \operatorname{ch} \pi k} \theta^k \operatorname{sh} \pi k (1-x) \sin \pi k y.$$

Заметим, что функция $\varphi(x, y, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\varphi(x, y, t)$ гармоническая в Ω , так как $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$;
- 2) $\varphi_x|_{y=0} = \varphi_x|_{y=1} = 0$;
- 3) $\varphi_x|_{x=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \sin \pi k y = H_x|_{x=0}$;
- 4) $\varphi|_{x=0} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k \cdot \operatorname{ch} \pi k} \theta^k \operatorname{sh} \pi k \sin \pi k y$;
- 5) $\varphi_y|_{x=0} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi k}{\operatorname{ch} \pi k} \theta^k \cos \pi k y$;
- 6) $\varphi_x|_{x=1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi k} \theta^k \sin \pi k y$;
- 7) $\varphi_x(x, y, t) = + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi k} \theta^k \operatorname{ch} \pi k (1-x) \sin \pi k y$;
- 8) $\varphi_y(x, y, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} \pi k} \theta^k \operatorname{ch} \pi k (1-x) \cos \pi k y$.

Преобразуем отдельные слагаемые равенства (2.4).

А) Первое слагаемое преобразуется так:

$$\int_0^1 \varphi H_{xt}|_{x=0} dy = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi k}{2\pi k \operatorname{ch} \pi k} \theta^k \theta_t^k = - \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi k}{\operatorname{ch} \pi k} \frac{(\theta^k)^2}{\pi k} \right)_t.$$

Б) Далее, имеем

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \varphi_x \Psi_y H_x|_{x=0} dy &= - \int_0^1 \Psi_y|_{x=0} (H_x|_{x=0})^2 dy \\ &\leq - m_1^2 \int_0^1 (H_x|_{x=0})^2 dy = - \frac{m_1^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\theta^k)^2. \end{aligned}$$

В) Для оценки величины $\int_0^1 \varphi_y \Psi_x H_x|_{x=0} dy$ воспользуемся представлением

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_y \Psi_x H_x|_{x=0} dy &= - \int_{\Omega} (\varphi_y \Psi_x \varphi_x)_x d\Omega \\ &= - \int_{\Omega} (\varphi_y \varphi_x \Psi_{xx} + \varphi_{yx} \varphi_x \Psi_x + \varphi_y \varphi_{xx} \Psi_x) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(\varphi_x \varphi_y \Psi_{xx} + \frac{1}{2} \varphi_x^2 \Psi_{xy} - \frac{1}{2} \varphi_y^2 \Psi_{xy} \right) d\Omega. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \varphi_y \Psi_x H_x|_{x=0} dy \right| &\leq \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) (|\Psi_{xx}| + |\Psi_{xy}|) d\Omega \\ &\leq \frac{1}{2} \| |\Psi_{xx}| + |\Psi_{xy}| \|_{L_p(\Omega)} \cdot \|\nabla \varphi\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2, \quad p > 1. \end{aligned}$$

Г) Далее, имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 \varphi_x \Psi_y H_x|_{x=1} dy \right| &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} |\Psi_y|_{x=1} \left(\int_0^1 (\varphi_x|_{x=1})^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy \right)^{1/2} \\ &\leq \max_{0 \leq y \leq 1} |\Psi_y|_{x=1} \cdot \left(\int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\theta^k}{\operatorname{ch} \pi k} \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \cdot \max_{0 \leq y \leq 1} |\Psi_y|_{x=1} \cdot \left(\int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\theta^k)^2 \operatorname{sh} \pi k}{\pi k \operatorname{ch} \pi k} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

где $C = \operatorname{const} > 0$, не зависящая от θ^k . Правую часть последнего выражения можно оценить следующим образом:

$$\varepsilon \int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy + M_1(\varepsilon) \left[\max_{0 \leq y \leq 1} |\Psi_y|_{x=1} \right]^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\theta^k)^2 \operatorname{sh} \pi k}{\pi k \operatorname{ch} \pi k},$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

Д) Последний интеграл в (2.4) преобразуется так:

$$\begin{aligned} 2 \left| \int_{\Omega} (\varphi_x (H_x \Psi_{xy} - H_y \Psi_{xx}) + \varphi_y (H_x \Psi_{yy} - H_y \Psi_{xy})) d\Omega \right| \\ \leq C_1 \int_{\Omega} ((|\nabla \varphi|^2 + |\nabla H|^2) (|\Psi_{xx}| + |\Psi_{yy}| + |\Psi_{xy}|)) d\Omega \\ \leq C_1 (\|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2) \| |\Psi_{xx}| + |\Psi_{yy}| + |\Psi_{xy}| \|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $C_1 = \operatorname{const} > 0$, $p > 1$.

Аналогично предыдущему оценивается интеграл по области из равенства (2.3)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} ((\Psi_{xx} - \Psi_{yy}) H_x H_y + \Psi_{xy} (H_y^2 - H_x^2)) d\Omega \right| \\ \leq C_2 \|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 \| |\Psi_{xx}| + |\Psi_{yy}| + |\Psi_{xy}| \|_{L_p(\Omega)}, \end{aligned}$$

где $C_2 = \operatorname{const} > 0$, $p > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что по условию задачи $\max_{0 \leq y \leq 1} |\Psi_y|_{x=1}| \leq m$ для почти всех $t \in [0, T]$, где $m = \text{const} > 0$.

Получим теперь неравенство, из которого будет следовать единственность.

Из равенства (2.3) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla H|^2 d\Omega + m_2^2 \int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy \\ & \leq m \int_0^1 (H_x|_{x=0})^2 dy + 2C_2 \|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 \left(\|\Psi_{xx}\| + \|\Psi_{yy}\| + \|\Psi_{xy}\| \right)_{L_p(\Omega)} \\ & = \frac{m}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\theta^k)^2 + 2C_2 \|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 \left(\|\Psi_{xx}\| + \|\Psi_{yy}\| + \|\Psi_{xy}\| \right)_{L_p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Из равенства (2.4) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \pi k}{\pi k \text{ ch } \pi k} (\theta^k)^2 \right) + 2m_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} (\theta^k)^2 \\ & \leq C_3 (\|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2) \left(\|\Psi_{xx}\| + \|\Psi_{yy}\| + \|\Psi_{xy}\| \right)_{L_p(\Omega)} \\ & \quad + 4\varepsilon \int_0^1 (H_x|_{x=1})^2 dy + 4M_1(\varepsilon) m^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \pi k}{\pi k \text{ ch } \pi k} (\theta^k)^2. \end{aligned}$$

Выбирая положительные числа ε, δ так, чтобы выполнялись неравенства $2m_1^2 > \delta m/2$, $\delta m_2^2 > 4\varepsilon$, и умножая неравенство, полученное из (2.3), на δ и складывая с неравенством, полученным из (2.4), выводим после отбрасывания в левой части положительных слагаемых:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\delta \int_{\Omega} |\nabla H|^2 d\Omega + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \pi k}{\pi k \text{ ch } \pi k} (\theta^k)^2 \right] \\ & \leq 4M_1(\varepsilon) m^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \pi k}{\pi k \text{ ch } \pi k} (\theta^k)^2 \\ & \quad + C_4 (\|\nabla H\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2 + \|\nabla \varphi\|_{L_{2p/(p-1)}(\Omega)}^2) \cdot \left(\|\Psi_{xx}\| + \|\Psi_{yy}\| + \|\Psi_{xy}\| \right)_{L_p(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Принимая во внимание то, что $H|_{\Gamma} = 0$ и

$$\|\Delta H(t)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq M \quad \text{для почти всех } t \in (0, T),$$

находим $\|\nabla H(t)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq C_5$. Кроме того, $\|\nabla \varphi(t)\|_{L_{\infty}(\Omega)} \leq C_6$, так как из определения гармонической функции φ следует

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi - H) &= -\Delta H, \\ (\varphi - H)|_{x=1} &= (\varphi - H)|_{y=0} = (\varphi - H)|_{y=1} = 0, \quad (\varphi - H)_x|_{x=0} = 0. \end{aligned}$$

Положим

$$z(t) = \delta \int_{\Omega} |\nabla H|^2 d\Omega + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sh } \pi k}{\pi k \text{ ch } \pi k} (\theta^k)^2.$$

Используя вид функции φ , находим

$$\|\nabla\varphi(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \pi k}{\pi k \operatorname{ch} \pi k} (\theta^k)^2.$$

Следуя [7; гл. 1, с. 24], имеем

$$\|D^2 H\|_{L_p(\Omega)} \leq C_7 p \|\Delta H\|_{L_p(\Omega)},$$

где $C_7 = \operatorname{const} > 0$ не зависит от p .

Тогда из (2.5) выводим

$$\frac{dz(t)}{dt} \leq C_8 (z(t) + pz(t)^{1-1/p}),$$

где $C_8 = \operatorname{const} > 0$ не зависит от p . Последнее неравенство представим в виде

$$\frac{d}{dt} (z(t)e^{-C_8 t}) \leq C_8 e^{-C_8 t} pz(t)^{1-1/p}.$$

Полагая $w(t) = z(t)e^{-C_8 t}$, приходим к задаче

$$\frac{dw(t)}{dt} \leq C_9 pw(t)^{1-1/p}, \quad w(0) = 0,$$

из которой следует, что

$$w(t) \equiv 0 \quad \text{для всех } t \in [0, T].$$

Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск, 1983.
- [2] В. И. Юдович, “Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **3:6** (1963), 1032–1066.
- [3] V. I. Yudovich, “Uniqueness theorem for the nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid”, *Math. Res. Lett.*, **2:1** (1995), 27–38.
- [4] M. Vishik, “Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **32:6** (1999), 769–812.
- [5] М. И. Уваровская, *Применение пространств Орлица в задачах динамики идеальной несжимаемой жидкости*, Дис. канд. физ.-матем. наук, Новосибирск, 2009.
- [6] A. E. Mamontov, “On the uniqueness of solutions to boundary value problem for non-stationary Euler equations”, *New Directions in Mathematical Fluid Mechanics*, Adv. Math. Fluid Mech., Birkhäuser Verlag, Basel, 2009, 281–299.
- [7] В. И. Юдович, *Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости*, Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов, 1984.

В. А. Вайгант

University of Bonn, Германия

E-mail: weigant@iam.uni-bonn.de

Поступило

14.08.2013

А. А. Папин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

E-mail: papin@math.asu.ru