Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Барсегян, О методе двустороннего продолжения решения интегрального уравнения свертки на конечном промежутке, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 323–335

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10381>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 12:47:59

О методе двустороннего продолжения решения интегрального уравнения свертки на конечном промежутке

А. Г. Барсегян

Работа посвящена развитию метода двустороннего продолжения решения интегрального уравнения свертки

$$S(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)S(t) dt, \quad 0 < x < r, \quad r < \infty,$$

с четной ядерной функцией $K \in L_1(-r, r)$. Рассматриваются два продолжения решения S : на $(-\infty, 0]$ и $[r, \infty)$. Используется факторизация типа Винера–Хопфа. В условиях обратимости некоторых операторов задача сводится к двум уравнениям с суммарными ядрами:

$$H^\pm(x) = q_0^\pm(x) \mp \int_0^\infty U(x+t+r)H^\pm(t) dt, \quad x > 0, \quad U \in L^+.$$

Обсуждаются прикладные аспекты реализации метода.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10381

1. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение свертки на конечном промежутке:

$$S(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)S(t) dt, \quad 0 < x < r, \quad r < \infty, \quad (1.1)$$

с четной, суммируемой ядерной функцией:

$$K \in L_1(-r, r), \quad K(-x) = K(x). \quad (1.2)$$

При $r = \infty$ (1.1) обращается в уравнение Винера–Хопфа:

$$B(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)B(t) dt, \quad x > 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) и (1.3) относятся к наиболее известным интегральным уравнениям (см. [1]–[15] и цитированную в них литературу). Конструктивная теория этих уравнений достаточно полно развита для некоторых специальных классов.

Решение (1.1), как правило, значительно сложнее (1.3), особенно при больших значениях r . Для подтверждения сказанного приведем одно сравнение. При решении уравнения (1.3) методом Винера–Хопфа используется факторизация символа уравнения – скалярной функции $1 - \overline{K}(s)$, где $\overline{K}$ преобразование Фурье от ядерной функции K . В случае уравнения (1.1) вопрос сводится к существенно более сложной задаче – факторизации следующей унимодулярной матрицы-функции (см. [5], [6]):

$$\begin{pmatrix} -e^{-irs}\overline{K}(s) & -1 + \overline{K}(s) \\ 1 + \overline{K}(s) & -e^{irs}\overline{K}(s) \end{pmatrix}.$$

В недавней совместной работе автора [13] с Енгибаряном изложен новый метод двустороннего продолжения (ДСП) решения задач переноса излучения, описываемых уравнением (1.1) с ядром вида

$$K(\tau) = \lambda \int_a^b \exp(-|\tau|s) G(s) ds, \quad (1.4)$$

где $0 < \lambda \leq 1$, $G(s) \geq 0$,

$$2 \int_a^b \frac{1}{s} G(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} K(x) dx = 1.$$

Используются два продолжения решения S : на $(-\infty, 0]$ и $[r, \infty)$. Заметим, что идея продолжения решения исходит из метода Винера–Хопфа.

Настоящая работа посвящена развитию, обобщению и математическому обоснованию метода ДСП. Применение метода ДСП состоит из следующих основных этапов:

- а) построение одной операторной факторизации, которая эквивалентна факторизации символа $1 - \overline{K}(s)$ уравнения (1.3);
- б) решение следующих двух уравнений с суммарными ядрами:

$$H^{\pm}(x) = q_0^{\pm}(x) \mp \int_0^{\infty} U(x+t+r) H^{\pm}(t) dt, \quad x > 0, \quad U \in L^+ = L_1(0, \infty). \quad (1.5)$$

В случае ядра (1.4) уравнения (1.5) существенно упрощаются.

Обсуждается вопрос реализации метода ДСП. Описывается способ сочетания метода ДСП с одной модификацией известного метода Бэкстера–Хиршмана.

2. Продолжения функции S . Задачи факторизации

2.1. Обозначения. Пусть $E(a, b)$, $(a, b) \subset (-\infty, \infty)$, одно из банаховых пространств (В. пространств) суммируемых функций $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} E_r &= E(0, r), \quad r \leq \infty, & E^+ &= E_{\infty}, & E &= E(-\infty, \infty), \\ L(a, b) &= L_1(a, b), & \tilde{E}(a, b) &= E(a, b) \cap L(a, b). \end{aligned}$$

Единичный оператор в любом из рассматриваемых пространств обозначается через I .

Пусть h^- , h и h^+ характеристические функции интервалов $(-\infty, 0)$, $[0, r]$ и (r, ∞) соответственно. Например,

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in [0, r], \\ 0 & \text{если } x \notin [0, r]. \end{cases}$$

Имеем

$$h(x) + h^+(x) + h^-(x) = 1, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Введем действующие в E операторы $\check{h}$, $\check{h}^+$ и $\check{h}^-$ умножения на функции h , h^+ и h^- соответственно. Например, $(\check{h}f)(x) = h(x)f(x)$. Имеем

$$\check{h} + \check{h}^+ + \check{h}^- = I. \quad (2.1)$$

Данные операторы являются проекторами в E .

Пусть $\hat{K}_r$, $r \leq \infty$, интегральный оператор, фигурирующий в (1.1):

$$(\hat{K}_r f)(x) = \int_0^r K(x-t)f(t) dt, \quad (2.2)$$

ядерная функция K которой удовлетворяет условиям (1.2).

Имеет место следующая оценка для нормы оператора $\hat{K}_r$ в E_r :

$$\|\hat{K}_r\| \leq \lambda_r = 2 \int_0^r |K(x)| dx. \quad (2.3)$$

Будем предполагать, что оператор $I - \hat{K}_r$ обратим в пространстве $L(0, r)$. Тогда, если $g \in E_r$, то (1.1) обладает единственным решением в E_r . Этот факт следует из интерполяционной теоремы М. Рисса, с учетом симметричности ядра $K(x-t)$.

2.2. Двустороннее продолжение функции S . Продолжим функции K и g , фигурирующие в (1.1), на всю вещественную ось $(-\infty, \infty)$. Будем считать, что продолженные функции удовлетворяют условиям

$$g \in \tilde{E}(-\infty, \infty), \quad K \in L(-\infty, \infty), \quad K(-x) = K(x). \quad (2.4)$$

Укажем на следующие два основных способа продолжения ядерной функции K уравнения (1.1):

а) нулевое продолжение:

$$K(x) = 0, \quad |x| > r; \quad (2.5)$$

б) продолжение с сохранением аналитического вида исходной функции K .

Аналогичные продолжения могут быть использованы для свободного члена g .

Преимущества каждого из отмеченных способов продолжения K выявляются в случаях конкретных классов уравнений.

В условиях (2.4) правая часть уравнения (1.1) имеет смысл не только при $x \in [0, r]$, но и на всей прямой $(-\infty, \infty)$. Определим следующие два продолжения $f^\pm$ искомого решения S :

$$f^+(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)S(t) dt \in \tilde{E}(r, \infty), \quad x > r, \quad (2.6)$$

$$f^-(x) = g(x) + \int_0^r K(x-t)S(t) dt \in \tilde{E}(-\infty, 0), \quad x < 0. \quad (2.7)$$

Рассмотрим следующее уравнение на всей прямой:

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)h(t)f(t) dt, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.8)$$

Из однозначной разрешимости (1.1) при $g \in E_r$ следует, что (2.8) обладает решением $f \in \tilde{E}(-\infty, \infty)$, которое единственно в $L(-\infty, \infty)$, причем

$$f(x) = S(x), \quad x \in [0, r], \quad f(x) = \begin{cases} f^-(x), & x < 0, \\ f^+(x), & x > r. \end{cases} \quad (2.9)$$

Подчеркнем, что функции $f^\pm$ зависят от способа продолжения g и K , но S не зависит от этих продолжений.

Нашей ближайшей целью является сведение уравнения (2.8) к системе уравнений относительно функций $f^\pm$.

2.3. Факторизации операторов на всей прямой. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оператор Винера–Хопфа $I - \hat{K}_\infty$ обратим в пространстве $L(0, \infty)$. Из результатов изложенных в [1] и [9], и из симметричности ядра $K(x-t)$ следует, что $I - \hat{K}_\infty$ обратим в любом из пространств E^+ и допускает каноническую факторизацию:

$$I - \hat{K}_\infty = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+). \quad (2.10)$$

Здесь $\hat{V}_\pm$ – следующие операторы свертки типа Вольтерры с одной и той же ядерной функцией $V \in L(0, \infty)$:

$$(\hat{V}_+ f)(x) = \int_0^x V(x-t)f(t) dt, \quad (\hat{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V(t-x)f(t) dt, \quad x > 0.$$

Каноничность факторизации (2.10) означает, что операторы $I - \hat{V}_\pm$ обратимы в E^+ . Операторная факторизация (2.10) эквивалентна следующей факторизации Винера–Хопфа символа оператора $I - \hat{K}_\infty$:

$$1 - \bar{K}(s) = [1 - \bar{V}_-(s)][1 - \bar{V}_+(s)]. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\bar{V}_\pm(s) = \int_0^\infty V(x)e^{\pm ixs} dx.$$

Некоторые способы построения факторизаций (2.10) и (2.11) будут отмечены в разделе 5.

Обозначим через $\check{K}$ оператор на всей прямой, с той же ядерной функцией K :

$$(\check{K}f)(x) = \int_{-\infty}^\infty K(x-t)f(t) dt.$$

Факторизация (2.10) эквивалентна следующей канонической факторизации оператора $I - \check{K}$ (на всей прямой):

$$I - \check{K} = (I - \check{V}_-)(I - \check{V}_+), \quad (2.12)$$

где операторы $\check{V}_{\pm}$ суть:

$$(\check{V}_+ f)(x) = \int_{-\infty}^x V(x-t)f(t) dt, \quad (\check{V}_- f)(x) = \int_x^{\infty} V(t-x)f(t) dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

В отличие от $\widehat{V}_{\pm}$, операторы $\check{V}_+$ и $\check{V}_-$ коммутируют между собой. Поэтому из (2.12) имеем

$$I - \check{K} = (I - \check{V}_+)(I - \check{V}_-). \quad (2.13)$$

Обратные операторы $(I - \widehat{V}_{\pm})^{-1}$ и $(I - \check{V}_{\pm})^{-1}$ имеют вид

$$(I - \widehat{V}_{\pm})^{-1} = I + \widehat{\Phi}_{\pm}, \quad (I - \check{V}_{\pm})^{-1} = I + \check{\Phi}_{\pm}, \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} (\widehat{\Phi}_+ f)(x) &= \int_0^x \Phi(x-t)f(t) dt, & (\widehat{\Phi}_- f)(x) &= \int_x^{\infty} \Phi(t-x)f(t) dt, \\ (\check{\Phi}_+ f)(x) &= \int_{-\infty}^x \Phi(x-t)f(t) dt, & (\check{\Phi}_- f)(x) &= \int_x^{\infty} \Phi(t-x)f(t) dt. \end{aligned}$$

Резольвентная функция $\Phi \in L(0, \infty)$ (общая для всех четырех операторов $I - \widehat{V}_{\pm}$ и $I - \check{V}_{\pm}$) определяется из следующего уравнения свертки типа Вольтерра:

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t) dt. \quad (2.15)$$

2.4. Факторизация оператора $I - \check{K}\check{h}$. Запишем уравнение (2.8) в векторно-операторной форме:

$$(I - \check{K}\check{h})f = g. \quad (2.16)$$

ЛЕММА 1. *Имеют место следующие две факторизации в пространствах E :*

$$I - \check{K}\check{h} = (I - \check{V}_-)[I - \check{V}_+\check{h} + \check{\Phi}_-(\check{h}^+ + \check{h}^-)], \quad (2.17)$$

$$I - \check{K}\check{h} = (I - \check{V}_+)[I - \check{V}_-\check{h} + \check{\Phi}_+(\check{h}^+ + \check{h}^-)]. \quad (2.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя равенство (2.1), факторизацию (2.12) и формулы (2.14), получаем

$$\begin{aligned} I - \check{K}\check{h} &= I - \check{K} + \check{K}(\check{h}^+ + \check{h}^-) \\ &= (I - \check{V}_-)(I - \check{V}_+) + \check{K}(\check{h}^+ + \check{h}^-) = (I - \check{V}_-)[I - \check{V}_+ + (I + \check{\Phi}_-)\check{K}(\check{h}^+ + \check{h}^-)]. \end{aligned}$$

Из (2.12) и (2.14) имеем $(I + \check{\Phi}_-)\check{K} = \check{V}_+ + \check{\Phi}_-$. Поэтому имеет место равенство (2.17). Равенство (2.18) доказывается аналогичным образом, с использованием разложения (2.13). Лемма доказана.

3. Уравнения относительно $f^{\pm}$

3.1. Первоначальный вид уравнений относительно $f^{\pm}$. Факторизации (2.17) и (2.18) дают возможность получить систему интегральных уравнений относительно $f^{\pm}$ (в которой функция S не участвует). Определим функции $g^{\pm} \in \tilde{E}(-\infty, \infty)$ посредством

$$g^{\pm} = (I + \check{\Phi}_{\pm})g, \quad (3.1)$$

или в раскрытом виде

$$\begin{aligned} g^+(x) &= g(x) + \int_{-\infty}^x \Phi(x-t)g(t) dt, \\ g^-(x) &= g(x) + \int_x^{\infty} \Phi(t-x)g(t) dt, \end{aligned}$$

где $-\infty < x < +\infty$.

ЛЕММА 2. Пусть операторы $I - \hat{K}_r$ и $I - \hat{K}_\infty$ обратимы в $L(0, r)$ и $L(0, \infty)$ соответственно и имеет место каноническая факторизация (2.12). Тогда функции $f^+ \in \tilde{E}(r, \infty)$, $f^- \in \tilde{E}(-\infty, 0)$, определяемые согласно (2.6), (2.7), удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} f^+(x) &= g^+(x) - \int_{-\infty}^0 \Phi(x-t)f^-(t) dt - \int_r^x \Phi(x-t)f^+(t) dt, & x > r, \\ f^-(x) &= g^-(x) - \int_x^0 \Phi(t-x)f^-(t) dt - \int_r^\infty \Phi(t-x)f^+(t) dt, & x < 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.16), (2.17), (2.14) и (3.1) имеем

$$[I - \check{V}_+ \check{h} + \check{\Phi}_-(\check{h}^+ + \check{h}^-)]f = g^-,$$

или

$$\begin{aligned} f(x) &= g^-(x) + \int_{-\infty}^x V(x-t)h(t)f(t) dt - \int_x^\infty \Phi(t-x)h^+(t)f(t) dt \\ &\quad - \int_x^\infty \Phi(t-x)h^-(t)f(t) dt, \quad -\infty < x < +\infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если $x < 0$ в (3.3), то первый интеграл в правой части исчезает и мы приходим ко второму из соотношений (3.2) (с учетом носителей функций $h^\pm$). Аналогично, используя факторизацию (2.18), получаем первое из соотношений (3.2) между f^+ и f^- . Лемма доказана.

Поскольку система (3.2) является следствием (1.1), существование ее решения обеспечено. Единственность решения (3.2) а priori неизвестна. Если решение (3.2) единственное, то $f^\pm$ совпадают с одноименными функциями, определяемыми из (2.6), (2.7).

3.2. Преобразование системы (3.2). Разрешающая функция U . Введем в рассмотрение следующие функции $F_1^- \in \tilde{E}(-\infty, 0)$ и $F_1^+ \in \tilde{E}(r, \infty)$:

$$\begin{aligned} F_1^-(x) &= f^-(x) + \int_x^0 \Phi(t-x)f^-(t) dt, & x < 0, \\ F_1^+(x) &= f^+(x) + \int_r^x \Phi(x-t)f^+(t) dt, & x > r. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Из (3.4) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} F_1^+(x) &= g^+(x) - \int_{-\infty}^0 \Phi(x-t)f^-(t) dt, & x > r, \\ F_1^-(x) &= g^-(x) - \int_r^\infty \Phi(t-x)f^+(t) dt, & x < 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Соотношения (3.4) можно рассматривать как вольтерровые уравнения свертки относительно $f^\pm$. С несущественным видоизменением к этим уравнениям могут быть применены формулы (2.14), что приводит к следующим выражениям $f^\pm$ через $F_1^\pm$:

$$\begin{aligned} f^-(x) &= F_1^-(x) - \int_x^0 V(t-x)F_1^-(t) dt, & x < 0, \\ f^+(x) &= F_1^+(x) - \int_r^x V(x-t)F_1^+(t) dt, & x > r. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем обозначения:

$$F^+(x) = F_1^+(x+r), \quad F^-(x) = F_1^-(-x), \quad F^\pm \in \widetilde{E}^+. \quad (3.7)$$

Введем ключевую для метода ДСП функцию U , определяемую согласно равенству

$$U(x) = \Phi(x) - \int_0^\infty \Phi(x+t)V(t) dt. \quad (3.8)$$

Из $\Phi, V \in L(0, \infty)$ следует, что $U \in L(0, \infty)$.

Функцию U мы назовем *разрешающей функцией* для уравнения (1.1).

ТЕОРЕМА 3.1. а) *Функции $F^\pm \in \widetilde{E}^+$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений с суммарным ядром:*

$$\begin{aligned} F^+(x) &= q^+(x) - \int_0^\infty U(x+t+r)F^-(t) dt, & x > 0, \\ F^-(x) &= q^-(x) - \int_0^\infty U(x+t+r)F^+(t) dt, & x > 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$q^+(x) = g^+(x+r), \quad q^-(x) = g^-(-x), \quad x > 0, \quad (3.10)$$

а ядерная функция $U \in L(0, \infty)$ определяется согласно (3.8).

б) Системы (3.9) и (3.2) эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.5) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned} F^+(x) &= q^+(x) - \int_{-\infty}^0 \Phi(x+r-t)f^-(t) dt, & x > 0, \\ F^-(x) &= q^-(x) - \int_r^\infty \Phi(x+t)f^+(t) dt, & x > 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Подставляя выражения (3.6) функций $f^\pm$ в (3.11), после простых выкладок получаем:

$$\begin{aligned} F^+(x) &= q^+(x) - \int_{-\infty}^0 U(x+r-t)F_1^-(t) dt, & x > 0, \\ F^-(x) &= q^-(x) - \int_r^\infty U(t-x)F_1^+(t) dt, & x > 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.7) мы приходим к уравнениям (3.9). Эквивалентность систем (3.9) и (3.2) следует из обратимости преобразований (3.5) и (3.7), сводящих пару (f^+, f^-) к (F^+, F^-) . Теорема доказана.

Систему (3.9) можно записать в следующей векторно-операторной форме:

$$F^{\pm} = q^{\pm} - \widehat{U}_r F^{\mp}. \quad (3.12)$$

где оператор $\widehat{U}_r$ с суммарным ядром определяется посредством

$$\widehat{U}_r F(x) = \int_0^{\infty} U(r+x+t)F(t)dt, \quad x > 0. \quad (3.13)$$

Оператор $\widehat{U}_r$ вполне непрерывный в пространствах E^+ . Имеет место следующая оценка для ее нормы в указанных пространствах:

$$\|U_r\| \leq \int_0^{\infty} |U(r+x)|dx = \int_r^{\infty} |U(x)|dx. \quad (3.14)$$

Система (3.9) может быть заменена следующими раздельными уравнениями:

$$H^+ = (q^+ + q^-) - \widehat{U}_r H^+, \quad H^- = (q^+ - q^-) + \widehat{U}_r H^-, \quad (3.15)$$

где

$$H^{\pm} = F^+ \pm F^-. \quad (3.16)$$

Разрешимость системы (3.12) (при свободных членах $q^{\pm}$, построенных через исходную функцию g по формулам (3.1) и (3.10)), следует из сделанного предположения о существовании решения уравнения (1.1) и из теоремы 3.1. Вопрос единственности решения (3.12) мы обсудим в п. 4.3. Этот вопрос в общем случае остается открытым.

4. Решение уравнения (1.1)

4.1. Построение функции S по известным $f^{\pm}$. Займемся построением решения S уравнения (1.1) по известной функции f^+ .

Равенство (3.3) при $x \in [0, r]$ принимает вид

$$S(x) = g^-(x) + \int_0^x V(x-t)S(t)dt - \int_r^{\infty} \Phi(t-x)f^+(t)dt, \quad x \in [0, r]. \quad (4.1)$$

Решая это уравнение типа Вольтерра относительно S , получаем

$$S(x) = G^-(x) + \int_0^x \Phi(x-t)G^-(t)dt, \quad x \in [0, r], \quad (4.2)$$

где

$$G^-(x) = g^-(x) - \int_r^{\infty} \Phi(t-x)f^+(t)dt. \quad (4.3)$$

Аналогичным образом функция S может быть построена через f^- . Наличие двух способов построения S может быть использовано в вопросе контроля за точностью численно-аналитического решения уравнения (1.1).

4.2. Процедура решения уравнения (1.1) методом ДСП. Резюмируя изложенное выше, мы приходим к методу двустороннего продолжения решения уравнения (1.1). Ради наглядности мы сочли целесообразным заново записать некоторые из используемых уравнений и формул.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены следующие условия:

- а) оператор $I - \hat{K}_r$, где $\hat{K}_r$ определяется формулой (2.2), обратим в $L(0, r)$;
 - б) оператор $I - \hat{K}_\infty$ обратим в $L(0, \infty)$;
 - в) операторы $I \pm \hat{U}_r$, где $\hat{U}_r$ определяются формулой (3.13), обратимы в $L(0, \infty)$;
- Тогда уравнение (1.1) может быть решено по следующей процедуре, состоящей из двух этапов.

Первый этап (шаги 1 и 2).

Шаг 1. Строится каноническая факторизация (2.12):

$$I - \check{K} = (I - \check{V}_-)(I - \check{V}_+).$$

Шаг 2. Строится резольвентная функция Φ путем решения уравнения (2.15):

$$\Phi(x) = V(x) + \int_0^x V(x-t)\Phi(t) dt.$$

Второй этап состоит из следующих шагов 3-7.

Шаг 3. Определяется разрешающая функция U согласно (3.8):

$$U(x) = \Phi(x) - \int_0^\infty \Phi(x+t)V(t) dt.$$

Шаг 4. По формулам (3.1), (3.10) определяются функции $g^\pm$:

$$\begin{aligned} g^-(x) &= g(x) + \int_x^\infty \Phi(t-x)g(t) dt, & -\infty < x < +\infty, \\ g^+(x) &= g(x) + \int_{-\infty}^x \Phi(x-t)g(t) dt, & -\infty < x < +\infty, \end{aligned}$$

и функции $q^\pm$:

$$q^+(x) = g^+(x+r), \quad q^-(x) = g^-(-x), \quad x > 0.$$

Шаг 5. Решается система (3.12) или отдельные уравнения (3.15):

$$H^\pm(x) = q_0^\pm \mp \int_0^\infty U(x+t+r)H^\pm(t) dt, \quad x > 0, \quad U \in L(0, \infty),$$

где $H^\pm = F^+ \pm F^-$, $q_0^\pm = q^+ \pm q^-$.

Шаг 6. По формулам (3.7) и (3.6) определяются функции $F_1^\pm$ и $f^\pm$.

Шаг 7. Решение (1.1) строится по формуле (4.2):

$$S(x) = G^-(x) + \int_0^x \Phi(x-t)G^-(t) dt, \quad x \in [0, r],$$

где G^- определяется по формуле (4.3).

4.3. Семейство уравнений (1.1). Одна теорема единственности. В приложениях часто требуется решить семейство уравнений (1.1) с различными значениями $r > 0$, с одной и той же (с точностью до сужения) ядерной функцией K . Так обстоит дело, например, в задачах переноса излучения в плоском слое конечной толщины r . В такой ситуации универсальными (не зависящими от r) являются как функции V и Φ , так и разрешающая функция U . Это обстоятельство значительно уменьшает трудоемкость первого этапа вычислительного процесса по схеме, изложенной в п. 4.2, поскольку один и тот же набор функций V , Φ , U будет пригодным при всех значениях r . К тому же можно проследить за поведением $\hat{U}_r$ при больших значениях r . Универсальность функции U позволяет получить одну теорему единственности для системы (3.9).

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть выполнены условия (2.4) и оператор Винера–Хопфа $I - \hat{K}_\infty$ обратим в $L(0, \infty)$. Тогда при достаточно больших значениях r усеченный оператор $I - \hat{K}_r$ обратим в E_r ; оператор $\hat{U}_r$ сжимающий, при $g \in \tilde{E}$ существует единственное решение $F^\pm \in E^+$ системы (3.9). Решение уравнения (1.1) в E_r может быть построено методом ДСП.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 3.1 из [1; гл. 3] число r можно выбрать настолько большим, чтобы уравнение (1.1) было однозначно разрешимо в E_r . Из оценки (3.14) следует, что

$$\|\hat{U}_r\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.4)$$

Поэтому число r можно выбрать настолько большим, чтобы имело место также неравенство $\|\hat{U}_r\| < 1$. Тогда уравнения (3.15) являются уравнениями со сжимающим оператором и тем самым они однозначно разрешимы в E_r . Применение схемы ДСП приводит к решению уравнения (1.1). Теорема доказана.

Доказанная теорема указывает на то, что метод ДСП может оказаться особенно эффективным при больших значениях r , когда многие из известных методов решения уравнения (1.1) практически нереализуемы.

4.4. Сочетание с методом Бэкстера–Хиршмана. Резольвентное ядро $\Gamma_r(x, y)$ уравнения (1.1) (если оно существует) имеет более сложную структуру по сравнению с резольвентным ядром $\Gamma(x, y)$ уравнения Винера–Хопфа (1.3). В случае симметричного ядра $K(x - t)$ по известной формуле Бэкстера–Хиршмана (см. [1; гл. III, формулы (7.1), (7.2), (7.5)]) функция $\Gamma_r(x, y)$ выражается через одну функцию от одной переменной $\gamma_r(x) = \Gamma_r(x, 0)$, которая определяется из уравнения

$$\gamma_r(x) = K(x) + \int_0^r K(x - t)\gamma_r(t) dt. \quad (4.5)$$

Имеет место следующая формула (см. [1; гл. III, формула (7.5)]):

$$\begin{aligned} \Gamma_r(x, t) = & \gamma_r(x - t) + \gamma_r(t - x) + \int_0^{\min(x, t)} \gamma_r(x - s)\gamma_r(t - s) ds \\ & - \int_r^{r + \min(x, t)} \gamma_r(s - x)\gamma_r(s - t) ds, \quad 0 \leq x, t \leq r. \end{aligned}$$

Считается, что $\gamma_r(x) = 0$ при $x \notin [0, r]$.

К решению уравнения (4.5) может быть применен метод ДСП.

Приведем одну модификацию метода Бэкстера–Хиршмана.

Для построения решения уравнения (1.1) при известном γ_r нет необходимости в построении резольвентного ядра Γ_r , зависящего от двух переменных. Нетрудно показать, что вычисление интеграла $\int_0^r \Gamma_r(x, t)g(t) dt$ можно заменить более простыми операциями свертывания. Имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_0^r \Gamma_r(x, t)g(t) dt &= \int_0^x \gamma_r(x-t)g(t) dt + \int_x^r \gamma_r(t-x)g(t) dt \\ &\quad + \int_0^x \gamma_r(x-t)u_+(t) dt - \int_x^{r+x} \gamma_r(t-x)u_-(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$u_+(x) = \int_x^r \gamma_r(t-x)g(t) dt, \quad u_-(x) = \int_{x-r}^r \gamma_r(x-t)g(t) dt.$$

5. О построении факторизации (2.10)

Метод ДСП решения уравнения (1.1) близок к способу решения уравнения Винера–Хопфа (1.3) методом операторной факторизации (2.10) (см. [9]). Основная дополнительная трудность связана с решением уравнений (3.9) с суммарными ядрами. Успех применения метода ДСП к тем или иным классам интегральных уравнений вида (1.1) во многом обусловлен возможностью эффективного построения факторизации (2.10). Метод Винера–Хопфа основанный на факторизации (2.11) символа наиболее эффективно работает в тех случаях, когда символ является рациональной функцией комплексной переменной (см. [4]) или может быть “хорошо” аппроксимирован такими функциями. Тогда задача может быть решена путем нахождения нулей и полюсов символа. Однако их вычисление может оказаться весьма трудоемкой задачей. В ряде случаев специфика ядра K позволяет обойти эту трудность.

Другим способом построения факторизации (2.10) является решение нелинейного уравнения факторизации Енгибаряна (НУФ) (см. [9]):

$$V(x) = K(x) + \int_0^\infty V(t)V(x+t) dt, \quad x > 0. \quad (5.1)$$

В случае ядра (1.4) каноническое решение V НУФ (5.1) имеет вид

$$V(x) = \int_a^b \exp(-xs) \varphi(s) G(s) ds, \quad (5.2)$$

где φ определяется из уравнения Амбарцумяна, которое легко решается численно (подробности см. в [9])

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_a^b \frac{\varphi(p)}{s+p} G(p) dp.$$

НУФ достаточно просто решается также в случае, когда функция K является смесью гамма распределений (см. [15]):

$$K(x) = \exp(-s|x|) \sum_{m=0}^N a_m \frac{s^{m+1}}{m!} |x|^m, \quad (5.3)$$

где $s > 0$, $a_N > 0$, $a_m \geq 0$, $m = 0, \dots, N-1$.

В этом случае каноническое решение НУФ имеет представление

$$V(x) = \exp(-sx) \sum_{m=0}^N b_m \frac{s^{m+1}}{m!} x^m, \quad b_N > 0, \quad b_m \geq 0, \quad m = 0, 1, \dots, N-1. \quad (5.4)$$

Рассмотрим теперь случай нулевого продолжения ядра (2.5). Тогда финитным является также каноническое решение V уравнения (5.1) (см. [9]):

$$V(x) = 0, \quad x > r, \quad (5.5)$$

а НУФ (5.1) обращается в уравнение на конечном промежутке:

$$V(x) = K(x) + \int_0^{r-x} V(t)V(x+t) dt, \quad 0 \leq x \leq r. \quad (5.6)$$

Нулевое продолжение удобно также в том отношении, что тогда норма продолженной функции K не увеличивается по сравнению с исходной нормой. Если, например, выполняется условие $\mu_r = \int_{-r}^r |K(x)| dx < 1$, то оба оператора $\hat{K}_r$ и $\hat{K}_\infty$ являются сжимающими, и условия а) и б) теоремы 3.1 подавно выполняются. Построение функций Φ , U также может быть упрощено.

При выполнении условия сжатия $\mu_r < 1$, простые итерации для (5.1) сходятся к решению V со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $1 - \sqrt{1 - \mu_r}$ (т.е. намного быстрее сходимости итераций для (1.1)).

Рассмотрим теперь уравнения (3.9). Сначала мы приведем некоторые общие соображения. Затем на одном сравнительно простом примере попытаемся дать представление о том, в каком взаимоотношении (по степени сложности) находятся исходное уравнение (1.1) и уравнения (3.9).

То обстоятельство, что ядро $U(x+t+r)$ оператора $\hat{U}_r$ зависит от суммы аргументов, имеет различные полезные проявления. Оно открывает возможности разделения переменных и, тем самым, аппроксимации $U(x+t+r)$ вырождающимися ядрами (см. [13]).

Рассмотрим семейство уравнений (1.1) с общим ядром K (см. п. 4.3). Если $r \rightarrow \infty$, то $\hat{K}_r$ сильно сходится к некомпактному оператору $\hat{K}_\infty$. Для его равномерной аппроксимации конечномерными операторами, с увеличением r потребуется неограниченное увеличение размерностей аппроксимирующих агрегатов. Иначе ведет себя последовательность $\hat{U}_r$ при больших значениях r . Напомним, что в данной ситуации разрешающая функция U не зависит от r и имеет место предельное соотношение (4.4). Поэтому при достаточно больших значениях r уравнение (3.15) является уравнением со сжимающим оператором $\hat{U}_r$, с увеличением r его свойства не ухудшаются, а “улучшаются”.

Автор выражает благодарность проф. Н. Б. Енгибаряну за внимание к работе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, *Уравнения в свертках и проекционные методы их решения*, Наука, М., 1971.
- [2] G. Baxter, I. I. Hirschman, Jr., “An explicit inversion formula for finite-section Wiener–Hopf operators”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**:6 (1964), 820–823.

- [3] Л. А. Сахнович, “Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке”, *УМН*, **35**:4 (1980), 69–129.
- [4] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, М., 1978.
- [5] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik, “Convolution equations on finite intervals and factorization of matrix functions”, *Integral Equations Oper. Theory*, **36**:2 (2000), 201–211.
- [6] В. Ю. Новокшенов, “Уравнения в свертках на конечном отрезке и факторизация эллиптических матриц”, *Матем. заметки*, **27**:6 (1980), 935–946.
- [7] В. В. Соболев, *Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет*, ГИТТЛ, М., 1956.
- [8] К. Черчиньяни, *Теория и приложения уравнения Больцмана*, Мир, М., 1978.
- [9] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, “Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения”, *Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ*, **22**, ВИНТИ, М., 1984, 175–244.
- [10] J. Casti, R. Kalaba, *Imbedding Methods in Applied Mathematics*, Appl. Math. Comp., **2**, Addison-Wesley Publ., Reading, MA, 1973.
- [11] Н. Б. Енгибарян, М. А. Мнацаканян, “Об одном интегральном уравнении с разностным ядром”, *Матем. заметки*, **19**:6 (1976), 927–932.
- [12] М. П. Ганин, “Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов”, *Изв. вузов. Матем.*, 1963, № 2, 31–43.
- [13] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, “Перенос излучения в плоском слое конечной толщины, Метод двустороннего продолжения”, *Астрофизика*, **55**:4 (2012), 627–639.
- [14] А. Г. Барсегян, “Интегральное уравнение с суммарно-разностным ядром на конечном промежутке”, *Изв. НАН РА. Матем.*, **40**:3 (2005), 24–34.
- [15] Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян, “Случайные блуждания и смеси гамма-распределений”, *ТВП*, **55**:3 (2010), 571–577.

А. Г. Барсегян

Институт математики НАН Армении

E-mail: anibarseghyan@mail.ru

Поступило

11.07.2013