Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский, Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 2, 255–261

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10383>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 11:37:46

Новая нижняя оценка хроматического числа рационального пространства с одним и двумя запрещенными расстояниями

Е. И. Пономаренко, А. М. Райгородский

В работе получена новая нижняя оценка хроматического числа $\chi(\mathbb{Q}^n)$ пространства $\mathbb{Q}^n$.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10383

1. Введение. В середине XX века Хадвигер и Нелсон поставили задачу об отыскании хроматического числа пространства. Первоначально речь шла о величине $\chi(\mathbb{R}^n)$, равной наименьшему количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки $\mathbb{R}^n$, чтобы между точками одного цвета не было расстояния 1 (расстояние 1 называется *запрещенным*). Сейчас известно, что

$$(\zeta_1 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{R}^n) \leq (3 + o(1))^n, \quad \zeta_1 = 1.239 \dots$$

(см. [1] и [2]). Отметим, что всюду далее все асимптотические записи подразумевают, что n (размерность пространства) стремится к бесконечности, а наличие выражения $o(1)$ в неравенстве понимается в том смысле, что существует функция, которая бесконечно мала в асимптотике и с которой это неравенство справедливо.

В 1976 г. Бенда и Перлес (см. [3]) предложили обобщение задачи Нелсона–Хадвигера на случай рационального пространства $\mathbb{Q}^n$ с той же евклидовой метрикой, что и в исходной постановке. Зазор между известными оценками соответствующей величины $\chi(\mathbb{Q}^n)$ еще больше:

$$(\zeta_2 + o(1))^n \leq \chi(\mathbb{Q}^n) \leq (3 + o(1))^n, \quad \zeta_2 = 1.173 \dots$$

Нижняя оценка получена в работе [4] второго автора в 2001 г., а верхняя оценка является следствием тривиального неравенства $\chi(\mathbb{Q}^n) \leq \chi(\mathbb{R}^n)$. Справедлива следующая новая

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683), гранта Президента РФ МД-6277.2013.1 и программы “Ведущие научные школы” (грант № НШ-2964.2014.1).

ТЕОРЕМА 1. *Имеет место оценка*

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq (\zeta_3 + o(1))^n,$$

где $\zeta_3 = 1.199 \dots$.

В работах [5]–[10] изучаются хроматические числа пространств с несколькими запрещенными расстояниями. В частности, в статье [6] получены наилучшие известные оценки в случае двух запретов. А именно, пусть $X, Y \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\bar{\chi}_X(Y^n; k) = \max_{a_1, \dots, a_k \in X} \chi(Y^n; a_1, \dots, a_k),$$

где $\chi(Y^n; a_1, \dots, a_k)$ – хроматическое число пространства Y^n с запрещенными расстояниями $a_1, \dots, a_k$ (точкам одного цвета запрещено отстоять друг от друга на расстояние, равное любому из данных k чисел). Положим также

$$\tilde{\chi}_X(Y^n; k) = \sqrt[n]{\bar{\chi}_X(Y^n; k)}.$$

В работе [6] установлено неравенство

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_4 + o(1), \quad \zeta_4 = 1.465 \dots,$$

приведена очевидная оценка $\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_2 + o(1)$ и доказано неожиданное неравенство

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_4 + \zeta_2 + \delta_1 = 2.682 \dots, \quad \delta_1 \approx 0.043.$$

Благодаря новой теореме 1 мы можем усилить последнее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место оценка*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \limsup_{n \rightarrow \infty} \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_4 + \zeta_3 + \delta_2 = 2.693 \dots, \quad \delta_2 \approx 0.029.$$

В следующем пункте мы докажем теорему 1, а в п. 3 – теорему 2. Здесь же отметим, что с разнообразными аспектами проблематики можно познакомиться с помощью обзоров [4], [10], [11], а также книг [12]–[14].

2. Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольное число $x \in (0, 1/8)$. Для каждого n (величины размерности) положим

$$q = 2^{2[\log_2(2xn)/2]+1}, \quad q' = \frac{q}{n}.$$

Ясно, что $q' \in [x, 4x]$ и правый конец этого отрезка не превосходит $1/2$.

Рассмотрим любые положительные числа k'_{-1} , k'_1 , удовлетворяющие ограничениям $k'_{-1} < k'_1 \leq 1/2$ и $k'_1 + 3k'_{-1} = 2q'$. Положим $k_1 = [k'_1 n]$, $k_{-1} = [k'_{-1} n] - 1$. Имеем

$$k_{-1} < k_1, \quad k_1 + k_{-1} - 2q < -2k_{-1}.$$

Пусть $G_n = (V_n, E_n)$ – граф, у которого

$$V_n = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2q}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2q}} \right\}, \left| \left\{ i : x_i = -\frac{1}{\sqrt{2q}} \right\} \right| = k_{-1}, \right. \\ \left. \left| \left\{ i : x_i = \frac{1}{\sqrt{2q}} \right\} \right| = k_1 \right\},$$

$$E_n = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1 \}.$$

Понятно, что хроматическое число $\chi(G_n)$ этого графа служит нижней оценкой для $\chi(\mathbb{Q}^n)$, ведь все координаты точек из V_n рациональны. В свою очередь

$$\chi(G_n) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} = \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k-1}}{\alpha(G_n)},$$

где $\alpha(G_n)$ – число независимости графа, т.е. максимальная мощность такого подмножества множества его вершин, в котором нет ребер.

ЛЕММА. *Выполнена оценка*

$$\alpha(G_n) \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где

$$\mathcal{A} = \{(i, j) : i + j \leq n, i + 2j \leq q - 1\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ. Пусть $W = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s\} \subset V_n$ – произвольное множество вершин, в котором нет ребер, т.е. для любых различных i, j имеем $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \neq 1$. Пусть $W' = \{\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_s\}$, где $\mathbf{x}'_i = \sqrt{2q} \cdot \mathbf{x}_i \in \{-1, 0, 1\}^n$ для каждого $i \in \{1, \dots, s\}$. Тогда для любых различных i, j имеем $|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|^2 \neq 2q$, откуда с учетом равенств

$$|\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j|^2 = (\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i) + (\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_j) - 2(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) = 2(k_1 + k_{-1}) - 2(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j)$$

получаем

$$(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_j) \neq k_1 + k_{-1} - q$$

(($\mathbf{x}, \mathbf{y}$) – евклидово скалярное произведение).

Пусть I – множество, полученное из $\{0, 1, \dots, q - 1\}$ удалением вычета числа $k_1 + k_{-1}$ по модулю q . Пусть a – степень, в которой двойка входит в каноническое разложение числа $\prod_{\nu \in I} (\nu - (k_1 + k_{-1}))$. Каждому вектору $\mathbf{x}'_i \in W'$ сопоставим многочлен

$$F_{\mathbf{x}'_i}(\mathbf{y}) = \frac{1}{2^a} \prod_{\nu \in I} (\nu - (\mathbf{x}'_i, \mathbf{y})), \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),$$

рассматриваемый как элемент пространства $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$.

Изучим невырожденную линейную комбинацию

$$c_1 F_{\mathbf{x}'_1} + \dots + c_s F_{\mathbf{x}'_s}, \quad c_1, \dots, c_s \in \mathbb{Q}.$$

Если она равна нулю в $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_n]$, то и для любого $\mathbf{x}'_i \in W'$

$$c_1 F_{\mathbf{x}'_1}(\mathbf{x}'_i) + \dots + c_s F_{\mathbf{x}'_s}(\mathbf{x}'_i) = 0. \quad (1)$$

Нетрудно проверить (ср. [4] и [12]), что в нашем случае всегда $F_{\mathbf{x}'_j}(\mathbf{x}'_i) \in \mathbb{Z}$. Поэтому можно считать, что все коэффициенты в (1) целые и что, более того, один из этих коэффициентов не делится на 2.

Далее, с одной стороны,

$$F_{\mathbf{x}'_i}(\mathbf{x}'_i) = \frac{1}{2^a} \prod_{\nu \in I} (\nu - (\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i)) = \frac{1}{2^a} \prod_{\nu \in I} (\nu - (k_1 + k_{-1})) \not\equiv 0 \pmod{2}.$$

С другой стороны, для $j \neq i$ выполнено

- 1) $(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_i) \geq -2k_{-1}$ (это верно, поскольку у нас $k_{-1} < k_1$ и $k_1 \leq n/2$);
- 2) $(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_i) \neq k_1 + k_{-1} - q$;
- 3) $(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_i) < k_1 + k_{-1}$;

откуда ввиду известного нам неравенства $k_1 + k_{-1} - 2q < -2k_{-1}$ следует, что

$$(\mathbf{x}'_j, \mathbf{x}'_i) \not\equiv (k_1 + k_{-1}) \pmod{q},$$

и это в свою очередь, как несложно проверить, влечет

$$F_{\mathbf{x}'_j}(\mathbf{x}'_i) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Выходит, что $c_i \equiv 0 \pmod{2}$ для любого i . Противоречие с невырожденностью, т.е. многочлены

$$F_{\mathbf{x}'_1}, \quad \dots, \quad F_{\mathbf{x}'_s}$$

линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Преобразуем каждый из многочленов следующим образом. Запишем многочлен в виде линейной комбинации одночленов и в каждом одночлене заменим сомножители вида $y_\nu^{\alpha_\nu}$, $\alpha_\nu \geq 1$, сомножителями $y_\nu^{\beta_\nu}$, где $\beta_\nu = 1$, если α_ν нечетно, и $\beta_\nu = 2$, если α_ν четно. Например, одночлен $y_1^4 y_5^{17} y_n$ превратится в $y_1^2 y_5 y_n$. Новые многочлены как функции от векторов из W' тождественно равны исходным многочленам (очевидно, что $y_\nu^3 = y_\nu$, коль скоро $y_\nu \in \{-1, 0, 1\}$). Следовательно, новые многочлены также линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Это многочлены степени $q - 1$ от n переменных, и каждая переменная входит в них в степени 0, 1 или 2. Все такие многочлены заведомо порождаются базисом из $\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j$ элементов. Таким образом,

$$|W'| = s \leq \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

и лемма доказана.

Из леммы получаем, что

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq \chi(G_n) \implies \chi(\mathbb{Q}^n) \geq \max_{x \in (0, 1/8)} \min_{q' \in [x, 4x]} \max_{k'_1, k'_{-1}} \frac{C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_{-1}}}{\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j}$$

(мы вынуждены брать минимум по q' , так как при разных n величина q непредсказуемо меняет свои значения в известных пределах).

Стандартная выкладка с привлечением формулы Стирлинга показывает, что при

$$x \approx 0.1089, \quad q' \approx 0.4356, \quad k'_1 \approx 0.3437, \quad k'_{-1} \approx 0.1758$$

получается как раз

$$\chi(\mathbb{Q}^n) \geq (1.199 \dots + o(1))^n.$$

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2. В работе [6] показано, что

$$\widetilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) \geq \zeta_5 + o(1), \quad \zeta_5 = 1.836 \dots$$

Как и оценка из предыдущего пункта, этот результат опирается на некоторую последовательность графов $G_n = (V_n, E_n)$. Напомним вкратце эту конструкцию. Пусть v_0, v_1, v_2, v_3, v_4 – положительные числа, в сумме дающие n . Положим

$$V_n = \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) : x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, |\{i : x_i = 0\}| = v_0, |\{i : x_i = 1\}| = v_1, \dots \}.$$

Пусть $\bar{s}$ – максимальное скалярное произведение векторов из V_n (т.е. скалярный квадрат любого из них), а $\underline{s}$ – минимальное скалярное произведение. Пусть $\gamma = (\bar{s} - \underline{s})/5$. Зафиксируем произвольную “не слишком маленькую” функцию f аргумента n , которая равна $o(n)$ при $n \rightarrow \infty$ (например, $f(n) = n/\ln n$), и рассмотрим такую последовательность $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ размерностей, что для любого $n \in \{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ на интервале $(\gamma, \gamma + f(n))$ есть хотя бы одно число q вида $q = 2^{2j-1}$ (берем для определенности наименьшее) с некоторым натуральным j (функция f влияет только на частоту, с которой числа n_i встречаются в натуральном ряде). Именно с этими размерностями мы станем работать в дальнейшем, и именно они неявно присутствуют в верхних пределах, которые фигурируют в формулировке теоремы 2.

Положим

$$a_1 = \sqrt{2q} \in \mathbb{Q}, \quad a_2 = \sqrt{4q} \notin \mathbb{Q}, \quad a_3 = \sqrt{6q} \notin \mathbb{Q}, \quad a_4 = \sqrt{8q} \in \mathbb{Q},$$

$$E_n = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\} \}.$$

Нетрудно видеть, что

$$E_n = \{ \{ \mathbf{x}, \mathbf{y} \} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{ \bar{s} - q, \bar{s} - 2q, \bar{s} - 3q, \bar{s} - 4q \} \}.$$

Более того, $\bar{s} - 5q < \underline{s}$. Поэтому применима техника с полиномами, подробно описанная при доказательстве теоремы 1 (выкладки можно найти в оригинальной статье [6]), которая приводит к оценке

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) \geq \chi(G_n) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n)} \geq \frac{n!}{v_0!v_1!v_2!v_3!v_4!} \left(\sum_{(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{i_0!i_1!i_2!i_3!i_4!} \right)^{-1},$$

где

$$\mathcal{A} = \{ (i_0, i_1, i_2, i_3, i_4) : i_0 + i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = n, i_1 + 2i_2 + 3i_3 + 4i_4 \leq q - 1 \}.$$

С помощью численных методов в статье [6] показано, что для оптимизации оценки нужно брать при $n \rightarrow \infty$

$$v_0 \sim v'_0 n, \quad v_1 \sim v'_1 n, \quad v_2 \sim v'_2 n, \quad v_3 \sim v'_3 n, \quad v_4 \sim v'_4 n,$$

причем, если

$$v'_0 = 0.020 \dots, \quad v'_1 = 0.173 \dots, \quad v'_2 = 0.420 \dots, \quad v'_3 = 0.313 \dots, \quad v'_4 = 0.073 \dots,$$

то имеем в точности

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 4) \geq \chi(G_n) \geq (\zeta_5 + o(1))^n.$$

Итак, пусть $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ – та самая последовательность размерностей и графы G_{n_i} отвечают оптимальным параметрам, описанным выше. Тогда по формуле Стирлинга имеем

$$|V_{n_i}| = (\tilde{V} + o(1))^{n_i} = (3.674 \dots + o(1))^{n_i}.$$

Зафиксируем один из графов и для краткости обозначим его просто G_n . Рассмотрим новый граф $G_n^1 = (V_n, E_n^1)$, у которого

$$E_n^1 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_2, a_3\}\} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{\bar{s} - 2q, \bar{s} - 3q\}\}.$$

К сожалению, мы не знаем его числа независимости. Но мы можем предположить, что с некоторым ρ (мы позже выберем это число оптимальным образом) выполнено $\alpha(G_n^1) < \rho^n$. Если предположение верно, то, разумеется,

$$\bar{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \chi(G_n^1) \geq \frac{|V_n|}{\alpha(G_n^1)} \geq \left(\frac{\tilde{V}}{\rho} + o(1)\right)^n,$$

откуда

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho} + o(1).$$

При этом, безусловно,

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \zeta_3 + o(1),$$

так что в текущих предположениях

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_3 + o(1).$$

В противном случае $\alpha(G_n^1) \geq \rho^n$, т.е. существует подмножество W_n в множестве V_n , у которого $|W_n| \geq \rho^n$ и в котором нет пар векторов на расстоянии a_2 и a_3 друг от друга. Рассмотрим граф $G_n^2 = (W_n, E_n^2)$, где

$$E_n^2 = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \in \{a_1, a_4\}\} = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{\bar{s} - q, \bar{s} - 4q\}\}.$$

Поскольку $a_1, a_4 \in \mathbb{Q}$, имеем

$$\bar{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \chi(G_n^2) \geq \frac{|W_n|}{\alpha(G_n^2)} \geq \frac{\rho^n}{\alpha(G_n^2)}.$$

Однако $\alpha(G_n^2)$ — это размер самого большого подмножества в W_n , свободного от расстояний a_1, a_4 , причем в самом W_n , как мы помним, нет расстояний a_2, a_3 . Таким образом, $\alpha(G_n^2) \leq \alpha(G_n)$. Но из работы [6] мы знаем, что

$$\alpha(G_n) \leq \sum_{(i_0, i_1, i_2, i_3, i_4) \in \mathcal{A}} \frac{n!}{i_0! i_1! i_2! i_3! i_4!} = (\xi + o(1))^n, \quad \xi = 2.001 \dots,$$

так что

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\rho}{\xi} + o(1).$$

В то же время заведомо

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) \geq \zeta_4 + o(1),$$

и, значит,

$$\tilde{\chi}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n; 2) + \tilde{\chi}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^n; 2) \geq \frac{\rho}{\xi} + \zeta_4 + o(1).$$

Подберем ρ так, чтобы было выполнено равенство

$$\frac{\tilde{V}}{\rho} + \zeta_3 = \frac{\rho}{\xi} + \zeta_4.$$

Решая квадратное уравнение и подставляя найденное ρ в обе части равенства, получаем $2.693 \dots$, что и требовалось доказать.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства”, *УМН*, **55**:2 (2000), 147–148.
- [2] D. G. Larman, C. A. Rogers, “The realization of distances within sets in Euclidean space”, *Mathematika*, **19** (1972), 1–24.
- [3] M. Benda, M. Perles, “Colorings of metric spaces”, *Geombinatorics*, **9**:3 (2000), 113–126.
- [4] А. М. Райгородский, “Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств”, *УМН*, **56**:1 (2001), 107–146.
- [5] А. М. Райгородский, “О хроматическом числе пространства с двумя запрещенными расстояниями”, *Докл. РАН*, **408**:5 (2006), 601–604.
- [6] А. М. Райгородский, И. М. Шитова, “О хроматических числах вещественных и рациональных пространств с вещественными или рациональными запрещенными расстояниями”, *Матем. сб.*, **199**:4 (2008), 107–142.
- [7] Е. С. Горская, И. М. Митричева, В. Ю. Протасов, А. М. Райгородский, “Оценка хроматических чисел евклидова пространства методами выпуклой минимизации”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 3–22.
- [8] F. M. de Oliveira Filho, F. Vallentin, “Fourier analysis, linear programming, and densities of distance avoiding sets in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, **12**:6 (2010), 1417–1428.
- [9] A. B. Kupavskiy, “On the chromatic number of $\mathbb{R}^n$ with an arbitrary norm”, *Discrete Math.*, **311**:6 (2011), 437–440.
- [10] L. A. Székely, “Erdős on unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems”, *Paul Erdős and His Mathematics, II*, Bolyai Soc. Math. Stud., **11**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 2002, 649–666.
- [11] А. М. Райгородский, “Coloring distance graphs and graphs of diameters”, *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*, Springer, New York, 2013, 429–460.
- [12] А. М. Райгородский, *Линейно-алгебраический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2007.
- [13] P. Brass, W. Moser, J. Pach, *Research Problems in Discrete Geometry*, Springer, New York, 2005.
- [14] A. Soifer, *The Mathematical Coloring Book. Mathematics of Coloring and the Colorful Life of Its Creators*, Springer, New York, 2009.

Е. И. Пономаренко

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: kathrinponomarenko@gmail.com

Поступило

07.08.2013

Исправленный вариант

03.04.2014

А. М. Райгородский

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: mrailgor@yandex.ru