Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Горницкий, Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2 , *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 1, 35–47

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10384>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 18:03:55

Существенные сигнатуры и канонические базисы неприводимых представлений группы G_2

А. А. Горницкий

В работе рассматриваются представления простых алгебр Ли и вопрос построения “канонического” весового базиса в произвольном неприводимом конечномерном модуле старшего веса. Э.Б. Винберг предложил метод построения таких базисов путем применения к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих всем отрицательным корням, и выдвинул ряд гипотез об их параметризации и структуре. Из работ Е.Б. Фейгина, Фурье (G. Fourier) и Литтельмана (P. Littelmann) следует истинность этих гипотез для случаев A_n , C_n . В данной работе эти гипотезы доказываются для случая G_2 с помощью другого подхода, предложенного Винбергом.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10384

1. Введение

Пусть G – односвязная полупростая комплексная алгебраическая группа, $\mathfrak{g}$ – ее касательная алгебра Ли. Имеется треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{u}$, где $\mathfrak{u}^-$ и $\mathfrak{u}$ – касательные алгебры отрицательной и положительной максимальных унипотентных подгрупп, а $\mathfrak{t}$ – картановская подалгебра, т.е. касательная алгебра максимального тора T в G . Имеем

$$\mathfrak{u} = \langle e_\alpha \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle, \quad \mathfrak{u}^- = \langle e_{-\alpha} \mid \alpha \in \Delta_+ \rangle,$$

где Δ_+ – система положительных корней, $e_{\pm\alpha}$ – корневые векторы, а $\langle \dots \rangle$ – линейная оболочка.

Обозначим неприводимый конечномерный G -модуль со старшим весом λ через $V(\lambda)$, а старший вектор этого модуля через v_λ . Существуют разные подходы к построению канонических базисов модулей $V(\lambda)$: базисы Гельфанда–Цетлина, кристалльные базисы, и пр. Кристалльные базисы строятся применением к старшему вектору понижающих операторов, отвечающих простым корням, в определенной последовательности, см. [1]. Метод Винберга [2] похож на метод построения кристалльных базисов с тем отличием, что на старший вектор разрешается действовать понижающими операторами, которые соответствуют всем положительным корням. Основное понятие, используемое при этом методе, определяется следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Сигнатурой* назовем набор $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, где N – число положительных корней, пронумерованных в определенном порядке (см. ниже): $\Delta_+ = \{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$, λ – доминантный вес, $p_i \in \mathbb{Z}_+$.

Обозначим

$$v(\sigma) = e_{-\alpha_1}^{p_1} \cdots e_{-\alpha_N}^{p_N} \cdot v_\lambda.$$

Тем самым мы определили вектор в модуле $V(\lambda)$ для каждой сигнатуры с весом λ . Векторы $v(\sigma)$ порождают $V(\lambda)$, но линейно зависимы. Цель состоит в том, чтобы выбрать из совокупности векторов $v(\sigma)$ базис пространства $V(\lambda)$. Для групп $G = \mathrm{SL}_n$ и $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ эта задача была решена в работах [3], [4]. Сигнатуры, отвечающие базисным векторам, определяются набором линейных неравенств вида

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leq \lambda(l_i),$$

где $M_i \subset \{1, \dots, N\}$ – некоторые подмножества, а $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$ – целочисленные элементы подалгебры Картана. В данной работе аналогичная задача решена для особой простой группы Ли $G = G_2$. Перенумеруем положительные корни группы $G = G_2$ как показано на рис. 1.

Рис. 1

Пусть $\lambda = k\omega_1 + l\omega_2$ – некоторый целочисленный доминантный вес.

ТЕОРЕМА 1. *Сигнатуры, отвечающие базисным векторам представления $V(\lambda)$ группы G_2 , определяются следующими неравенствами:*

- 1) $p_i \geq 0$;
- 2) $p_5 \leq l$;
- 3) $p_6 \leq k$;
- 4) $p_2 + p_3 + p_6 \leq k + l$;
- 5) $p_3 + p_4 + p_6 \leq k + l$;
- 6) $p_4 + p_5 + p_6 \leq k + l$;

- 7) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \leq k + 2l$;
 8) $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \leq k + 2l$.

Сигнатуры, удовлетворяющие этим неравенствам, будем называть *существенными*. Нетрудно видеть, что существенные сигнатуры образуют полугруппу относительно покомпонентного сложения.

ТЕОРЕМА 2. *Полугруппа существенных сигнатур порождается существенными сигнатурами, которые отвечают фундаментальным весам.*

После анонса результата для G_2 вернемся к общей постановке задачи. Для этого нам потребуется порядок на множестве сигнатур, согласованный со структурой полугруппы. Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ – фундаментальные веса. Рассмотрим стандартный частичный порядок $\prec$ на множестве положительных корней: $\alpha \prec \beta$, если $\beta - \alpha$ – линейная комбинация простых корней с целыми неотрицательными коэффициентами. Перенумеруем положительные корни так, чтобы из $\alpha_j \prec \alpha_i$ следовало $j > i$. Введем порядок на сигнатурах. Пусть $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$, $\sigma' = (\lambda', p'_1, \dots, p'_N)$.

1. Вначале сравниваем сигнатуры по доминантным весам. Пусть $\lambda = \sum k_i \omega_i$ и $\lambda' = \sum k'_i \omega_i$, $k_i, k'_i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда сравниваем сначала $\sum k_i$ и $\sum k'_i$, а потом сравниваем наборы $(k_1, \dots, k_n)$ и $(k'_1, \dots, k'_n)$ лексикографически.

2. Если $\lambda = \lambda'$, то рассмотрим наборы

$$q_i = \sum_{j=1}^{N-i+1} p_j, \quad q'_i = \sum_{j=1}^{N-i+1} p'_j.$$

Наборы $(q_1, \dots, q_N)$ и $(q'_1, \dots, q'_N)$ лексикографически сравниваем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Сигнатура σ *существенна*, если $v(\sigma) \notin \langle v(\tau) \mid \tau \prec \sigma \rangle$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Множество векторов $\{v(\sigma) \mid \sigma \text{ существенна}\}$ образует базис пространства $V(\lambda)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно.

Существенные сигнатуры с фиксированным старшим весом λ параметризуют искомый канонический базис $V(\lambda)$. Ниже будет показано, что существенные сигнатуры сами образуют полугруппу. Задача состоит в описании этой полугруппы и определении ее структуры.

Пусть U – максимальная унипотентная подгруппа в G , для которой $\text{Lie } U = \mathfrak{u}$. Тогда максимальный тор T действует правыми сдвигами на однородном пространстве G/U . Пусть $B = T \ltimes U$ – борелевская подгруппа. Тогда

$$\mathbb{C}[G/U] = \bigoplus_{\lambda} \mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)},$$

где $\mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)} = \{f \in \mathbb{C}[G] \mid f(gtu) = \lambda(t)f(g) \text{ для всех } g \in G, t \in T, u \in U\}$. Каждое такое подпространство конечномерно и изоморфно как G -модуль (по отношению к действию G левыми сдвигами) пространству $V(\lambda^*)$ линейных функций на $V(\lambda)$ (см. [5; теорема 3]). Изоморфизм устроен следующим образом:

$$V(\lambda^*) \ni \omega \mapsto f_{\omega}, \quad \text{где } f_{\omega}(g) = \langle \omega, gv_{\lambda} \rangle.$$

Хорошо известен следующий факт.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. $\mathbb{C}[G/U]$ порождена как алгебра подпространствами $\mathbb{C}[G]_{\omega_i}^{(B)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим подпространство $M = \langle f \mid f \in \mathbb{C}[G]_{\lambda}^{(B)} \cdot \mathbb{C}[G]_{\mu}^{(B)} \rangle$ для любой пары доминантных весов λ, μ . Очевидно, что M инвариантно, отлично от 0 (так как алгебра $\mathbb{C}[G/U]$ не имеет делителей нуля) и $M \subset \mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$. Поскольку $\mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$ неприводимо, $M = \mathbb{C}[G]_{\lambda+\mu}^{(B)}$. Так как ω_i порождают решетку весов, утверждение доказано.

Пусть U^- – максимальная отрицательная унипотентная подгруппа, т.е. выполнено $\text{Lie } U^- = \mathfrak{u}^-$. Функция f_{ω} однозначно определяется своим ограничением на плотное открытое множество $U^- \cdot T \cdot U$, причем

$$f_{\omega}(u^- \cdot t \cdot u) = \langle \omega, u^- t u v_{\lambda} \rangle = \langle \omega, \lambda(t) u^- v_{\lambda} \rangle = \lambda(t) f_{\omega}(u^-)$$

для всех $u \in U, \quad u^- \in U^-, \quad t \in T$.

Далее, $U^- = U_{-\alpha_1} \cdots U_{-\alpha_N}$ (см. [6; гл. X, § 28, п. 1]), где $U_{-\alpha} = \{\exp(te_{-\alpha}) \mid t \in \mathbb{C}\}$. Поэтому

$$u^- = \exp(t_1 e_{-\alpha_1}) \cdots \exp(t_N e_{-\alpha_N}).$$

Таким образом получаем

$$f_{\omega}(u^-) = \left\langle \omega, \prod_{i=1}^N \exp(t_i e_{-\alpha_i}) \cdot v_{\lambda} \right\rangle = \sum_{\sigma=(\lambda, p_1, \dots, p_N)} \frac{\prod t_i^{p_i}}{\prod p_i!} \langle \omega, v(\sigma) \rangle.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Сигнатура σ существенна тогда и только тогда, когда $\prod t_i^{p_i}$ является младшим членом $f_{\omega}|_{U^-}$ для некоторого $\omega \in V(\lambda^*)$ в смысле порядка, введенного выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\prod t_i^{p_i}$ является младшим членом. Тогда соответствующая функция ω принимает нулевое значение на всех векторах $v(\tau)$, $\tau < \sigma$, и ненулевое значение на $v(\sigma)$. Поэтому $v(\sigma)$ не выражается через $v(\tau)$, $\tau < \sigma$, и значит σ существенна.

Обратно, пусть σ существенна. Рассмотрим функцию ω , равную нулю на векторах $v(\tau)$ для всех существенных τ , кроме σ . Очевидно, что $f_{\omega}|_{U^-}$ имеет нужный младший член.

СЛЕДСТВИЕ 1. Существенные сигнатуры образуют полугруппу относительно покомпонентного сложения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При перемножении функций на U^- младшие члены перемножаются и ни с чем не сокращаются.

Теперь мы переходим к первой гипотезе об устройстве полугруппы существенных сигнатур. На алгебре $\mathbb{C}[G/U]$ возникает убывающая фильтрация. Члены фильтрации нумеруются существенными сигнатурами ($\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$):

$$\mathbb{C}[G/U]^{\sigma} = \bigoplus_{\mu > \lambda} \mathbb{C}[G]_{\mu}^{(B)} \oplus \mathbb{C}[G]_{\lambda}^{\sigma},$$

где

$$\mathbb{C}[G]_{\lambda}^{\sigma} = \left\{ f_{\omega} \mid f_{\omega}|_{U^-} = c \prod t_i^{p_i} + \dots, \omega \in V(\lambda^*) \right\}.$$

Сравнение доминантных весов следует понимать в смысле пункта 1 порядка на сигнатурах. Многоточие обозначает члены более высокого порядка. Константа c может быть нулем.

Рассмотрим присоединенную градуированную алгебру $\mathrm{gr} \mathbb{C}[G/U]$.

ГИПОТЕЗА 1. *Алгебра $\mathrm{gr} \mathbb{C}[G/U]$ порождается как алгебра элементами подпространств $\mathrm{gr} \mathbb{C}[G]_{\omega_i}^{(B)}$.*

Заметим, что $\mathrm{gr} \mathbb{C}[G/U]$ – полугрупповая алгебра полугруппы существенных сигнатур. Другими словами гипотеза 1 утверждает, что полугруппа существенных сигнатур порождается существенными сигнатурами фундаментальных весов. Из гипотезы 1 следует, что можно найти существенные сигнатуры для любого $V(\lambda)$, зная существенные сигнатуры для $V(\omega_i)$.

Перейдем к формулировке остальных гипотез. Пусть $\Sigma \subset \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* \oplus \mathbb{Z}^N$ – полугруппа существенных сигнатур (здесь $\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^*$ – решетка весов), $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ – конус, натянутый на Σ (линейные комбинации с положительными рациональными коэффициентами). Тогда этот конус задается линейными неравенствами (их конечное число при выполнении гипотезы 1).

ГИПОТЕЗА 2. *Полугруппа Σ насыщена, т.е. $\Sigma = \Sigma_{\mathbb{Q}} \cap (\mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}^* \oplus \mathbb{Z}^N)$.*

Гипотеза 2 утверждает, что базисы $V(\lambda)$ параметризуются целыми точками сечений некоторого многогранного конуса.

ГИПОТЕЗА 3. *Существуют такой набор подмножеств $M_i \subset \{1, \dots, N\}$ и такой набор элементов картановской подалгебры $l_i \in \mathfrak{t}_{\mathbb{Z}}$, что множество существенных сигнатур $\sigma = (\lambda, p_1, \dots, p_N)$ задается неравенствами*

$$\sum_{j \in M_i} p_j \leq \lambda(l_i).$$

Гипотеза 3 уточняет вид многогранного конуса из гипотезы 2.

Из результатов работ [3], [4] вытекают гипотезы 1–3 в случаях $G = \mathrm{SL}_n$ и $G = \mathrm{Sp}_{2n}$. Как следует из теорем 1, 2 эти гипотезы верны и для случая $G = G_2$.

Остальная часть работы посвящена доказательству гипотез для случая G_2 . В разделе 2 вычисляются существенные сигнатуры фундаментальных весов, в разделе 3 доказывается гипотеза 1, а в разделе 4 – гипотезы 2 и 3.

2. Существенные сигнатуры фундаментальных весов

Напомним как выглядят корни G_2 . Есть три коротких корня $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ такие, что $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0$. Через них удобно выражать все положительные корни – см. рис. 2, где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \omega_2, & \alpha_2 &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2, & \alpha_3 &= \varepsilon_1 = \omega_1, \\ \alpha_4 &= -\varepsilon_3, & \alpha_5 &= \varepsilon_2 - \varepsilon_3, & \alpha_6 &= -\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Здесь соблюден описанный выше порядок. Пятый и шестой корень простые. Более подробное изложение этих фактов можно найти в [7; справочный раздел, § 2].

Рис. 2

2.1. Представление 1-го фундаментального веса. Как известно, представление $V(\omega_1)$ семимерно и имеет веса $\pm\varepsilon_i$, 0 кратности 1. Далее нетрудно найти существенные сигнатуры, используя утверждение

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Пусть α – корень, λ и $\lambda + \alpha$ – некоторые веса линейного представления V . Тогда $e_\alpha \cdot V_\lambda \neq 0$, где $V_\lambda \subset V$ – весовое подпространство веса λ .

Получаются следующие существенные сигнатуры (здесь и далее будем опускать весовую компоненту):

- 1) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, 2) $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$, 3) $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, 4) $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$,
 5) $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, 6) $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, 7) $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$.

Например, мы хотим получить весовой вектор веса $-\varepsilon_3$. Нужно найти самую маленькую сигнатуру σ , для которой $v(\sigma)$ – весовой вектор веса $-\varepsilon_3$. Легко понять, что это сигнатура $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Действительно, используя утверждение 4, доказываем, что получится весовой вектор нужного веса. Минимальность следует из того, что сумма координат равна единице, и поэтому все меньшие сигнатуры должны иметь сумму координат не больше 1, а из таких сигнатур ни одна не даст нужного веса.

2.2. Представление 2-го фундаментального веса. Представление $V(\omega_2)$ – это присоединенное представление. Пользуясь утверждением 4, находим существенные сигнатуры:

- 1) $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, 2) $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$, 3) $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, 4) $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$,
 5) $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$, 6) $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, 7) $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$, 8) $(1, 0, 1, 0, 0, 0)$,
 9) $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$, 10) $(1, 0, 0, 0, 1, 0)$, 11) $(2, 0, 0, 0, 0, 0)$, 12) $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$,
 13) $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$, 14) $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$.

3. Гипотеза 1

3.1. Существенные сигнатуры, выражаемые через фундаментальные.

Для доказательства гипотезы 1 найдем число сигнатур с фиксированным весом $k\omega_1 + l\omega_2$, представимых в виде суммы фундаментальных. Полученное число сравним с размерностью неприводимого модуля $V(k\omega_1 + l\omega_2)$, найденной по формуле Вейля ([7; справочный раздел, § 1]):

$$\dim V(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta_+} \frac{(\lambda + \rho, \alpha)}{(\rho, \alpha)},$$

где ρ – полусумма положительных корней, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное умножение на $\mathfrak{t}_{\mathbb{Q}}^*$, инвариантное относительно группы Вейля.

Если число сигнатур и размерность модуля совпадают, гипотеза 1 верна, иначе – неверна. Пусть, как и прежде, p_i – i -я координата сигнатуры. Для начала рассмотрим случай $p_1 \geq l + k$.

ЛЕММА 1. *Число существенных сигнатур фиксированного веса $k\omega_1 + l\omega_2$, представимых в виде суммы фундаментальных и удовлетворяющих условию $p_1 \geq l + k$, равно*

$$(k+1) \sum_{s=0}^l C_{s+4}^4.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сигнатуры, удовлетворяющие условию $p_1 \geq l + k$, имеют вид

$$(l+k, 0, 0, 0, 0, 0) + (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

где $x_6 \leq k$, $x_i \geq 0$, а $x_1 + \dots + x_5 \leq l$. Последнее условие возникает из того, что сигнатуры веса ω_1 добавляют к сумме первых пяти координат максимум 1, а веса ω_2 – максимум 2, т.е. их сумма не больше $2l + k$. Условие на шестую координату очевидно (только сигнатуры веса ω_1 могут иметь ненулевую шестую координату). Все сигнатуры такого вида действительно можно получить. В самом деле, возьмем сигнатуры $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 так, чтобы в сумме получилось $(k, 0, 0, 0, 0, x_6)$. Далее добавляем сигнатуры веса ω_2 вида 7)–11) (если сумма первых пяти координат равна $2l + k$) или 7)–11) и $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ (если сумма меньше $2l + k$). Число сигнатур описанного вида равно

$$(k+1) \sum_{s=0}^l C_{s+4}^4.$$

Оставшийся случай: $p_1 < l + k$. Фиксируем p_1 и p_6 . Рассмотрим подслучаи

- 1) $p_1 - p_6 \geq l$,
- 2) $0 \leq p_1 - p_6 < l$,
- 3) $p_1 < p_6$.

Обозначим через $f(a_1, a_2, a_3)$ число сигнатур, которые можно получить, складывая a_1 сигнатур веса ω_1 , удовлетворяющих условию $p_1 = 0$ и $p_6 = 0$, a_2 сигнатур веса ω_2 , удовлетворяющих условию $p_1 = 1$ и a_3 сигнатур веса ω_2 , удовлетворяющих условию $p_1 = 0$.

ЛЕММА 2. Число существенных сигнатур, представимых в виде суммы фундаментальных, в случаях 1)–3) равно

- 1) $f(k - p_1 + l, l, 0)$,
- 2) $f(k - p_6, p_1 - p_6, l - p_1 + p_6)$,
- 3) $f(k - p_6, 0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в случае $p_1 < l + k$ можно не использовать сигнатуру $(2, 0, 0, 0, 0, 0)$ веса ω_2 . Действительно, пусть мы кроме нее использовали сигнатуры с 0 на первом месте (если такой сигнатуры не нашлось, то $p_1 > k + l$), например, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ или $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$; тогда можно взять другие сигнатуры тех же весов, а именно $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ (в первом случае) или $(1, 1, 0, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$ (во втором случае).

Рассмотрим случай 1). Почему именно такие параметры у f ? Мы уже объяснили, что $(2, 0, 0, 0, 0, 0)$ можно не использовать. Кроме того, можно не использовать сигнатуру $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 . Действительно, складывая сигнатуры веса ω_2 , мы не сможем получить первую координату больше l , поэтому хотя бы $p_1 - l$ сигнатур веса ω_1 должны иметь ненулевую 1-ю координату. Так как $p_1 - l \geq p_6$, сигнатур с ненулевой 1-й координатой веса ω_1 мы должны взять не меньше, чем сигнатур веса ω_1 с ненулевой 6-й координатой. Значит вместе с сигнатурой $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ должна использоваться сигнатура $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ веса ω_1 . Эту пару можно заменить на пару сигнатур $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$ и $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 . Можно считать, что ровно $p_1 - l$ сигнатур веса ω_1 имеют ненулевую 1-ю координату, так как иначе можно заменить сигнатуру веса ω_1 с ненулевой 1-й координатой и сигнатуру веса ω_2 с нулевой 1-й координатой на сигнатуру 2), 7)–10) веса ω_2 и сигнатуру веса ω_1 с нулевой 1-й координатой. Таким образом остается $k - p_1 + l$ сигнатур веса ω_1 с нулевой 1-й и 6-й координатой, и все l сигнатур веса ω_2 должны иметь 1-ю координату, равную 1, т.е. параметры равны $k - p_1 + l, l, 0$.

В остальных случаях используются похожие рассуждения.

Рассмотрим случай 2). Мы должны взять p_6 сигнатур веса ω_1 вида $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ или $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Сигнатуру $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ можно не использовать. Действительно, так как $p_1 \geq p_6$, вместе с сигнатурой $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 придется использовать сигнатуру с ненулевой 1-й координатой и нулевой 6-й координатой веса ω_1 или ω_2 . Эту пару сигнатур можно заменить на сигнатуру $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 и сигнатуру с нулевой 1-й координатой веса ω_1 или ω_2 . То есть можно считать, что мы взяли p_6 сигнатур вида $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$. Можно не использовать сигнатуру $(1, 0, 0, 0, 0, 0)$ веса ω_1 . Действительно, $p_1 - p_6 < l$, поэтому в этом случае нам придется взять сигнатуру веса ω_2 с нулевой 1-й координатой. Эту пару сигнатур можно заменить на сигнатуру с нулевой 1-й координатой веса ω_1 и сигнатуру с ненулевой 1-й координатой веса ω_2 . Остается $k - p_6$ сигнатур веса ω_1 с нулевой 1-й и 6-й координатой, $p_1 - p_6$ сигнатур веса ω_2 с ненулевой 1-й координатой и $l - p_1 + p_6$ сигнатур веса ω_2 с нулевой 1-й координатой. Поэтому параметры равны $k - p_6, p_1 - p_6, l - p_1 + p_6$.

Рассмотрим случай 3). Можно считать, что мы взяли p_1 сигнатур вида $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ и $p_6 - p_1$ сигнатур $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 . Действительно, если сигнатур вида $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ было взято меньше (и соответственно сигнатур вида $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ было взято больше), то нам придется взять сигнатуру с ненулевой 1-й координатой и нулевой 6-й координатой веса ω_1 или ω_2 . Тогда можно заменить последнюю сигнатуру и сигнатуру $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ на сигнатуру $(1, 0, 0, 0, 0, 1)$ веса ω_1 и сигнатуру

с нулевой 1-й координатой веса ω_1 или ω_2 . Остается $k - p_6$ сигнатур веса ω_1 с нулевой 1-й и 6-й координатами, и все l сигнатур веса ω_2 должны иметь нулевую первую координату, поэтому параметры равны $k - p_6, 0, l$.

Поскольку мы фиксировали p_1 и p_6 , нужно будет провести суммирование по всем $p_6 = 0, \dots, k$; $p_1 = 0, \dots, l + k - 1$. Таким образом осталось научиться вычислять значение $f(a_1, a_2, a_3)$.

3.2. Вычисление f . Существует биекция между существенными сигнатурами веса ω_2 с $p_1 = 1$ и существенными сигнатурами веса ω_2 с $p_1 = 0, p_1 + \dots + p_5 \leq 1$. Биекция состоит в обращении первой координаты в 0. Поэтому значение f не изменится, если рассматривать a_2 сигнатур веса ω_2 с условиями $p_1 = 0, p_1 + \dots + p_5 \leq 1$. Мы воспользуемся новым определением f . Поэтому будем считать, что у рассматриваемых сигнатур $p_1 = p_6 = 0$. Наша задача – научиться вычислять значение $f(a_1, a_2, a_3)$.

Вначале посчитаем число сигнатур с суммой координат $\leq a_1 + a_2 + a_3$. Сигнатуры с такой суммой координат можно получить, не используя сигнатуры с суммой координат, равной 2, потому что иначе мы должны будем также использовать сигнатуру $(0, 0, 0, 0, 0)$ (а то сумма координат будет больше $a_1 + a_2 + a_3$), и тогда можно заменить эту пару на пару сигнатур с суммой координат равной 1. Обозначим через s сумму координат. Тогда число сигнатур описанного вида с условием $s \leq a_1 + a_2 + a_3$ равно $f(a_1, a_2 + a_3, 0)$.

ЛЕММА 3. *Имеем*

$$f(a, b, 0) = \sum_{s=0}^{a+b} \sum_{p_5=0}^{\min(s,b)} C_{s-p_5+2}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и раньше, s – сумма координат, p_5 – 5-я координата. Ясно, что $s \leq a + b$ и $p_5 \leq \min(s, b)$, так как сигнатуры веса ω_1 имеют нулевую пятую координату. Для того, чтобы посчитать число сигнатур с фиксированной суммой s и 5-ой координатой p_5 нужно раскидать по 2-й, 3-й и 4-й координатам $s - p_5$ единиц, потому что мы обязаны взять p_5 раз сигнатуру $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ веса ω_2 и $s - p_5$ раз какие-нибудь из сигнатур $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ весов ω_1 или ω_2 . Отсюда берется такое число сочетаний.

Далее пусть $s > a_1 + a_2 + a_3$. В этом случае мы должны брать сигнатуры с суммой координат, равной 2 (чтобы получить $s > a_1 + a_2 + a_3$), и можем не брать нулевых (взяли нулевую и взяли с суммой 2 – то же самое, что взять две с суммой 1). Пусть $j = s - a_1 - a_2 - a_3 \leq a_3$ – число сигнатур с суммой 2, т.е. сигнатур вида $(0, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$ веса ω_2 . Рассмотрим три частных случая для перехода к общему.

Пусть мы взяли j сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$. Тогда, добавляя к ним всевозможные сигнатуры с суммой 1, получим

$$\sum_{p_5=0}^{a_2+a_3-j} C_{a_1+a_2+a_3-j-p_5+2}^2$$

различных сигнатур (те же рассуждения, что и в лемме 3). Мы посчитали число сигнатур с суммой s , в которых мы использовали j сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$.

Возьмем другие j сигнатур с суммой 2, а именно $j - 1$ вида $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ и еще какую-нибудь. Получим

$$(0, j - 1, 1, 0, j, 0) \quad \text{или} \quad (0, j, 0, 1, j - 1, 0).$$

Чтобы получить сигнатуры, которые мы еще не посчитали (т.е. которые не получаются добавлением сигнатур с суммой 1 к $(0, j, 0, 0, j, 0)$), нужно добавлять сигнатуры с 0 на втором месте (к первой) или с 0 на пятом месте (ко второй). Действительно, если, например, мы добавим к $(0, j - 1, 1, 0, j, 0)$ сигнатуру $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, то получим то же самое, что и при добавлении $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ к $(0, j, 0, 0, j, 0)$.

Пусть теперь мы взяли $j - 2$ сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ и две какие-нибудь. Получим

$$(0, j - 2, 2, 0, j, 0), \quad (0, j - 1, 1, 1, j - 1, 0), \quad (0, j, 0, 2, j - 2, 0).$$

Чтобы получить новые сигнатуры, нужно добавлять к первой сигнатуре сигнатуры с 0 на втором месте, ко второй – с 0 на втором и пятом местах, к 3 – с 0 на пятом месте.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть мы взяли $j - i$ сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$ и i каких-то других сигнатур с суммой 2. Получим

$$(0, j - i + n, m, n, j - i + m, 0) \quad \text{для всех} \quad m, n: m + n = i.$$

То есть мы получили $i + 1$ различных сигнатур, причем среди них $i - 1$ сигнатур, к которым можно добавлять сигнатуры с 0 на втором и пятом местах ($m, n \neq 0$), и по одной сигнатуре, к которым можно добавлять сигнатуры с 0 на втором и пятом местах соответственно ($n = 0$ или $m = 0$).

Таким образом остается посчитать число сигнатур, представимых в виде суммы a_1 фундаментальных сигнатур веса ω_1 и $a_2 + a_3 - j$ фундаментальных сигнатур веса ω_2 с суммой координат, равной 1, и дополнительными условиями

- 1) вторая координата равна 0;
- 2) пятая координата равна 0;
- 3) вторая и пятая координаты равны 0.

ЛЕММА 4. Число сигнатур, отвечающее случаям 1–3), равно

- 1) $\sum_{p_5=0}^{a_2+a_3-j} (a_1 + a_2 + a_3 - j - k + 1),$
- 2) $C_{a_1+a_2+a_3-j+2}^2,$
- 3) $(a_1 + a_2 + a_3 - j + 1).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство пунктов 2, 3 очевидно. Доказательство утверждения пункта 1 такое же, как в лемме 3.

Таким образом получаем общую формулу для числа сигнатур с суммой $s = a_1 + a_2 + a_3 + j$:

$$\sum_{p_5=0}^{a_2+a_3-j} C_{a_1+a_2+a_3-j-p_5+2}^2 + \sum_{i=1}^j \left[(i-1)(a_1 + a_2 + a_3 - j + 1) + C_{a_1+a_2+a_3-j+2}^2 + \sum_{k=0}^{a_2+a_3-j} (a_1 + a_2 + a_3 - j - k + 1) \right].$$

Суммирование этой формулы по $j = 1, \dots, a_3$ дает число сигнатур с суммой $s > a_1 + a_2 + a_3$. Вместе с леммой 3 это дает значение $f(a_1, a_2, a_3)$. Таким образом функция f посчитана.

Далее, так как сумма $1^k + \dots + n^k$ – многочлен от n степени $k + 1$, общее число сигнатур – многочлен 6-й степени (как нетрудно видеть) от k и l . Действительно, рассмотрим, например, случай $p_1 > l + k$. В этом случае мы суммируем по s от 0 до l многочлен 4-й степени от s , а именно C_{s+4}^4 . Таким образом после суммирования получим многочлен 5-й степени от l . Умножая на $k + 1$, получим многочлен 6-й степени от k и l . В остальных случаях рассуждения аналогичны. Можно показать, что он совпадает с многочленом 6-й степени от k и l , полученным из формулы Вейля (подробности мы опускаем, так как это тривиальное, но громоздкое дело). Можно также проверить равенство с помощью компьютера. Таким образом получаем, что гипотеза 1 верна.

4. Гипотезы 2 и 3

4.1. Гипотеза 2. Доказательство будет основано на том, что фактически мы описали все существенные сигнатуры при доказательстве гипотезы 1, а не только посчитали их. Достаточно доказать, что все существенные сигнатуры, кратные некоторому натуральному числу a , остаются существенными после сокращения на a . Докажем это.

Пусть $\sigma = a \cdot (k\omega_1 + l\omega_2, p_1, \dots, p_6)$ – существенная сигнатура веса $ak\omega_1 + al\omega_2$. Тогда она была учтена в лемме 1 или 2. Если она была учтена в лемме 1, то выполнены неравенства

$$ap_1 \geq a(k + l), \quad ap_6 \leq ak, \quad ap_1 + \dots + ap_5 \leq al.$$

После сокращения на a вектор $(k\omega_1 + l\omega_2, p_1, \dots, p_6)$ снова удовлетворяет неравенствам из леммы 1, поэтому является существенной сигнатурой веса $k\omega_1 + l\omega_2$ (см. доказательство леммы 1).

Пусть сигнатура σ была учтена в лемме 2, т.е. она имеет вид $a\tau + \mu$, где τ – некоторая существенная сигнатура, а μ – сигнатура, учитываемая функцией f с кратными a параметрами (например, для случая 3 леммы 2, $\tau = (p_1, 0, 0, 0, 0, p_6)$ веса $p_6\omega_1$, а μ учитывается функцией f с параметрами $(a(k - p_6), 0, al)$). Достаточно доказать, что μ представляется в виде суммы существенных фундаментальных сигнатур, взятых кратное a число раз каждая.

Пусть μ учитывается функцией f с параметрами aa_1, aa_2, aa_3 . Пусть

$$s \leq a \cdot (a_1 + a_2 + a_3)$$

(s – сумма координат μ). Тогда μ – сумма сигнатур вида $(0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ весов ω_1 и ω_2 и сигнатуры $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$ веса ω_2 (см. п. 3.2, рассуждение до леммы 3). Можно считать, что каждая сигнатура была взята меньше a раз. Тогда μ имеет вид $(0, x_2, x_3, x_4, 0, 0)$, где $x_i = 0$ или a . Очевидно, что любая такая сигнатура представима в виде суммы существенных фундаментальных сигнатур, взятых по a раз.

Пусть теперь $s > a \cdot (a_1 + a_2 + a_3)$. Тогда μ – сумма сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ весов ω_1 и ω_2 и сигнатур $(0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 1, 0)$,

$(0, 1, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 1, 0)$ веса ω_2 . Можно считать, что сигнатур вида $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ весов ω_1 и ω_2 было взято меньше a раз. Иначе можно заменить несколько сигнатур $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ веса ω_2 на аналогичные сигнатуры веса ω_1 , и такое же число сигнатур веса ω_1 вида $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ на аналогичные сигнатуры веса ω_2 так, чтобы получилось a сигнатур веса ω_1 вида $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$ после чего отбросить их. Аналогично, можно считать, что сигнатур вида $(0, 0, 1, 0, 0, 0)$ и $(0, 0, 0, 1, 0, 0)$ весов ω_1 и ω_2 было взято меньше a раз. Тогда μ имеет вид:

$$\begin{aligned} &(0, a, 0, a, 0, 0), \quad (0, a, a, a, a, 0), \quad (0, 0, a, 0, a, 0), \quad (0, a, 0, 0, a, 0), \\ &(0, a, 0, a, a, 0), \quad (0, 2a, a, a, 2a, 0), \quad (0, 2a, 0, a, a, 0), \quad (0, a, a, 0, a, 0), \\ &(0, a, a, 0, 2a, 0), \quad (0, a, a, a, 2a, 0), \quad (0, 2a, a, a, a, 0). \end{aligned}$$

Очевидно, что любая такая сигнатура представима в виде суммы существенных фундаментальных сигнатур, взятых кратное a число раз.

Таким образом гипотеза 2 верна.

4.2. Гипотеза 3. Будем искать неравенства, задающие конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$. Для этого рассмотрим двойственный конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$, т.е. те линейные функции, которые принимают неотрицательные значения на $\Sigma_{\mathbb{Q}}$. Найдём образующие этого конуса и тогда получим искомые неравенства. Будем считать, что элементы конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$ задаются векторами, у которых восемь координат — $(k^*, l^*, p_1^*, p_2^*, p_3^*, p_4^*, p_5^*, p_6^*)$. Двойственный конус задается неравенствами:

- 1) $k^* \geq 0, l^* \geq 0$,
- 2) $k^* + p_i^* \geq 0 \ (i \neq 5)$,
- 3) $k^* + p_1^* + p_6^* \geq 0$,
- 4) $l^* + p_i^* \geq 0 \ (i \neq 6)$,
- 5) $l^* + p_1^* + p_i^* \geq 0 \ (i \neq 6)$,
- 6) $l^* + p_2^* + p_4^* \geq 0$,
- 7) $l^* + p_2^* + p_5^* \geq 0$,
- 8) $l^* + p_3^* + p_5^* \geq 0$.

ТЕОРЕМА 3. Векторы

- 1) $(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1)$, 8) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$,
- 2) $(0, 1, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$, 9) $(1, 1, 0, 0, 0, -1, -1, -1)$,
- 3) $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, 10) $(1, 1, 0, 0, -1, -1, 0, -1)$,
- 4) $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, 11) $(1, 1, 0, -1, -1, 0, 0, -1)$,
- 5) $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, 12) $(1, 2, 0, -1, -1, -1, -1, -1)$,
- 6) $(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, 13) $(1, 2, -1, -1, -1, -1, -1, 0)$
- 7) $(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$,

являются образующими конуса $\Sigma_{\mathbb{Q}}^{\vee}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эти векторы были получены с помощью стандартного алгоритма поиска образующих конуса. Нужно взять какие-либо 7 неравенств и превратить их в равенства, получив систему из 7 линейных уравнений. Среди всех таких систем выбрать системы максимального ранга (т.е. с одномерным пространством решений). Среди базисных решений таких систем выбрать векторы, лежащие в конусе. Это и есть образующие.

Таким образом, конус $\Sigma_{\mathbb{Q}}$ задается неравенствами

- 1) $p_i \geq 0$,
- 2) $p_5 \leq l$,
- 3) $p_6 \leq k$,
- 4) $p_2 + p_3 + p_6 \leq k + l$,
- 5) $p_3 + p_4 + p_6 \leq k + l$,
- 6) $p_4 + p_5 + p_6 \leq k + l$,
- 7) $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 \leq k + 2l$,
- 8) $p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 \leq k + 2l$.

Следовательно, гипотеза 3 верна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Littelmann, “Cones, crystals, and patterns”, *Transform. Groups*, **3:2** (1998), 145–179.
- [2] E. Vinberg, *On Some Canonical Bases of Representation Spaces of Simple Lie Algebra*, Conference talk, Bielefeld, 2005.
- [3] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, “PBW filtration and bases for symplectic Lie algebras”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, **24** (2011), 5760–5784.
- [4] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, “PBW filtration and bases for irreducible modules in type A_n ”, *Transform. Groups*, **165:1** (2011), 71–89.
- [5] В. Л. Попов, “Стягивание действий редуктивных алгебраических групп”, *Матем. сб.*, **130:3** (1986), 310–334.
- [6] Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
- [7] Э. Б. Винберг, А. Л. Онищик, *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, УРСС, М., 1988.

А. А. Горницкий

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: gnomage@mail.ru

Поступило

30.06.2013

Исправленный вариант

18.02.2014