Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Серовайский, Оптимальное управление для сингулярной стационарной системы с фазовым ограничением и вариация по состоянию, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 761–766

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10389>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 09:31:11

Оптимальное управление для сингулярной стационарной системы с фазовым ограничением и вариация по состоянию

С. Я. Серовайский

Рассматривается задача оптимального управления системой, описываемой сингулярным нелинейным уравнением эллиптического типа с фазовым ограничением в форме включения. С помощью варьирования состояния системы получены необходимые условия оптимальности.

Библиография: 15 названий.

DOI: 10.4213/mzm10389

В основе многих способов решения задач оптимального управления лежит вариационный метод. При этом в результате варьирования управления с помощью уравнений состояния системы происходит изменение ее функции состояния, что, в свою очередь, влияет на критерий оптимальности. Однако применение такого подхода оказывается затруднительным для двух важных классов оптимизационных задач. Если на систему наложены фазовые ограничения, то не понятно, как следует варьировать управление, чтобы остаться в пределах выполнения этих ограничений. Если же для рассматриваемой системы не реализуются теоремы существования и единственности решения уравнения состояния (т.е. система оказывается сингулярной), то не ясно, как менять управление, чтобы неизменно гарантировать существование соответствующего состояния системы. В этой связи анализ указанных классов задач обычно осуществляется другими методами.

В случае сингулярности управляемой системы уравнение состояния можно интерпретировать не как средство задания зависимости функции состояния от управления, а как ограничение на систему в форме равенства, связывающую пару “управление-состояние”. Тем самым критерий оптимальности минимизируется на множестве соответствующих допустимых пар. Для решения получаемой при этом задачи на условный экстремум можно воспользоваться, например, методом множителей Лагранжа [1] или методом штрафа [2]. Однако в работах указанного направления рассматриваются исключительно оптимизационные задачи без фазовых ограничений.

Задачи оптимального управления для регулярных систем с распределенными параметрами при наличии конечного числа интегральных ограничений в форме

равенств или неравенств либо поточечных фазовых ограничений достаточно хорошо исследованы опять же с помощью метода множителей Лагранжа или метода штрафа (см., например, [3]–[7]). Отдельные результаты в области оптимального управления нелинейных сингулярных распределенных систем с фазовыми ограничениями указанного вида получены в [8]–[10] также с помощью метода штрафа. Однако практически не исследованным оставался случай, когда для таких систем ограничение задано в форме включения общего вида.

В [11] для одной регулярной системы с ограничениями общего вида был предложен способ построения условий оптимальности на основе варьирования не управления, а состояния системы. В настоящей работе показывается, что этот прием оказывается применимым и для сингулярных систем. Тем самым оказывается возможным не только рассмотреть ранее не исследованный класс оптимизационных задач для сингулярных нелинейных систем с фазовыми ограничениями общего вида, но и установить применимость вариационного метода (хотя и в нестандартной форме) для случая, когда и однозначная разрешимость системы не гарантирована, и ограничения наложены на состояние системы.

В открытой ограниченной n -мерной области Ω рассматривается уравнение

$$\Delta y + a(x, y) = v \quad (1)$$

с однородными граничными условиями первого рода (задача Дирихле). Здесь a есть функция Каратеодори на множестве $\Omega \times \mathbb{R}$, удовлетворяющая неравенству

$$|a(x, \varphi)| \leq a_0(x) + b|\varphi|^{q-1}$$

для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$, где $q \geq 2$, $a_0 \in L_{q'}(\Omega)$, $b > 0$, $1/q + 1/q' = 1$. Примером функции, удовлетворяющей этому условию, а также используемому в дальнейшем дополнительному свойству ее производной по второму аргументу, служит степенная функция $a(x, \varphi) = \varphi|\varphi|^{q-2}$.

Если бы на функцию a были дополнительно наложены стандартные условия монотонности и коэрцитивности, то можно было бы легко доказать, что для любой функции (управления) $v \in H^{-1}(\Omega)$ уравнение (1) имеет единственное решение $y \in H_0^1(\Omega)$. Однако в отсутствии этих ограничений краевая задача может оказаться как неразрешимой, так и имеющей неединственное решение. Вследствие этого рассматриваемая управляемая система является, вообще говоря, сингулярной. Мы ограничимся рассмотрением случая $n = 2$ либо $q \leq 2n/(n - 2)$ для $n > 2$. Тогда согласно теореме Соболева справедливы непрерывные вложения $H_0^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $L_{q'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$.

Определено выпуклое замкнутое подмножество Y пространства $H_0^1(\Omega)$. Допустимой парой для системы (1) назовем такую пару $(v, y) \in H^{-1}(\Omega) \times Y$, которая удовлетворяет равенству (1). Во избежание тривиальности системы будем полагать, что множество таких пар не пусто. Задается функционал

$$I(v, y) = \int_{\Omega} f(x, y(x), \nabla y(x)) dx + \frac{\chi}{2} \|v\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

где $\chi > 0$, f – известная функция своих аргументов, являющаяся функцией Каратеодори на множестве $\Omega \times \mathbb{R}^{n+1}$. Задача P оптимального управления состоит в минимизации данного функционала на множестве допустимых пар системы (1). Для

доказательства ее разрешимости наложим дополнительные ограничения на функцию f , предположив справедливость неравенства $f(x, \varphi, \psi) \geq c|\psi|^2$ и выпуклость функции $f(x, \varphi, \cdot)$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in \Omega$, где $c > 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Задача P разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу ограниченности снизу функционала I для данной задачи существует минимизирующая последовательность $\{u_k\}$, где $u_k = (v_k, y_k)$. Таким образом, имеет место сходимость $I(u_k) \rightarrow \inf I$, где нижняя грань функционала берется по множеству всевозможных пар системы (1), а пара u_k является допустимой. Тем самым выполняются включения $v_k \in H^{-1}(\Omega)$, $y_k \in Y$ и равенство

$$\Delta y_k + a(x, y_k) = v_k. \quad (2)$$

В силу коэрцитивности функционала последовательность $\{u_k\}$ ограничена в пространстве $H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Тогда после выделения подпоследовательностей (с сохранением исходного обозначения) будем иметь $v_k \rightarrow v$ слабо в $H^{-1}(\Omega)$, $y_k \rightarrow y$ слабо в $H_0^1(\Omega)$. Учитывая выпуклость и замкнутость множества Y , установим включение $y \in Y$. Пользуясь теоремой Реллиха–Кондрашова и извлекая подпоследовательность, установим, что $y_k \rightarrow y$ сильно в $L_2(\Omega)$ и п.в. на Ω .

Рассмотрим оператор Немыцкого A , характеризующийся равенством

$$(Ay)(x) = a(x, y(x)).$$

Тогда имеет место сходимость $Ay_k \rightarrow Ay$ п.в. на Ω . При имеющихся ограничениях на функцию f последовательность $\{Ay_k\}$ оказывается ограниченной в пространстве $L_{q'}(\Omega)$. Пользуясь леммой 1.3 (см. [12; с. 25]), установим сходимость $Ay_k \rightarrow Ay$ слабо в $L_{q'}(\Omega)$. В результате перехода к пределу в равенстве (2) заключаем, что предельная пара $u = (v, y)$ является допустимой. Применяя теорему о полунепрерывности снизу интегрального функционала (см. [13; теорема 2.1, с. 242]), установим, что значение $I(u)$ не превосходит нижнего предела последовательности $\{I(u_k)\}$, а значит, u является решением задачи P . Теорема доказана.

Уравнение (1) связывает элементы допустимой пары системы. В соответствии с физическим смыслом управляемой системы обычно управление считают независимой величиной, а функцию состояния – характеристикой, определяемой управлением посредством уравнения состояния. Однако, поскольку у нас дополнительное ограничение наложено на состояние системы, удобнее формально считать независимым функцию состояния, а управление – характеристикой, определяемой посредством состояния на основе заданного уравнения. Определим оператор $L: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$, выбирая в качестве Ly левую часть равенства (1). Зададим функционал $J(y) = I(y, Ly)$. Тогда задача P сводится к минимизации функционала J на множестве Y .

Известно, что точка y минимума дифференцируемого в смысле Гато функционала J на выпуклом множестве Y удовлетворяет вариационному неравенству

$$\langle J'(y), h - y \rangle \geq 0 \quad \text{для всех } h \in Y, \quad (3)$$

в левой части которого находится значение линейного непрерывного функционала (производной J в точке y) в точке $h - y$.

Для обеспечения дифференцируемости функционала J наложим дополнительные условия, гарантирующие дифференцируемость оператора A , а также F , характеризующего равенством

$$(Fy)(x) = f(x, y(x), \nabla y(x)).$$

Предположим, что существует непрерывная частная производная $a'(x, \varphi)$ от функции $a(x, \cdot)$ в любой точке $\varphi \in \mathbb{R}$ почти для всех $x \in \Omega$, причем справедливо неравенство

$$|a'(x, \varphi)| \leq a_1(x) + b_1|\varphi|^{q-2},$$

где $a_1 \in L_{q/(q-2)}(\Omega)$, $b_1 > 0$. Аналогично пусть существуют непрерывные частные производные $f_y(x, \varphi, \psi)$, $f_{y_1}(x, \varphi, \psi)$, $\dots$, $f_{y_n}(x, \varphi, \psi)$ от функции $f(x, \cdot)$ в любых точках $\varphi \in \mathbb{R}$, $\psi \in \mathbb{R}^n$ и почти для всех $x \in \Omega$, причем справедливы неравенства

$$|f_y(x, \varphi, \psi)| \leq f_0(x) + c_0 \left(|\varphi|^{q/q'} + \sum_{i=1}^n |\psi_i|^{2/q'} \right),$$

$$|f_{y_j}(x, \varphi, \psi)| \leq f_j(x) + c_j \left(|\varphi|^{q/2} + \sum_{i=1}^n |\psi_i| \right),$$

где $f_0 \in L_q(\Omega)$, $f_j \in L_2(\Omega)$, $c_0 > 0$, $c_j > 0$, $j = 1, \dots, n$. Тогда в соответствии с теоремой Красносельского (см. [14; с. 308]) указанные операторы Немыцкого будут дифференцируемыми по Фреше. При этом выполняются равенства

$$A'(y)h(x) = a'(x, y(x))h(x),$$

$$F'(y)h(x) = f_y(x, y(x), \nabla y(x))h(x) + f_{\nabla y}(x, y(x), \nabla y(x))\nabla h(x),$$

где $f_{\nabla y} = (f_{y_1}, \dots, f_{y_n})$. Отметим также, что согласно теореме Рисса существует канонический изоморфизм $\Lambda: H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ такой, что выполняется соотношение

$$(\varphi, \psi)_{H^{-1}(\Omega)} = \langle \Lambda\varphi, \psi \rangle \quad \text{для всех } \varphi, \psi \in H^{-1}(\Omega).$$

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи P определяется по формуле*

$$v = \chi^{-1}\Lambda^{-1}p, \tag{4}$$

где функция p находится из системы

$$\Delta y + a(x, y) = \chi^{-1}\Lambda^{-1}p, \tag{5}$$

$$\Delta p + a'(x, y)p = q, \tag{6}$$

$$\int_{\Omega} [f_y(x, y, \nabla y) - \operatorname{div} f_{\nabla y}(x, y, \nabla y) + q](h - y) dx \geq 0 \quad \text{для всех } h \in Y. \tag{7}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем производную функционала J в точке $y = L^{-1}v$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle J'(y), h \rangle &= \int_{\Omega} [f_y(x, y, \nabla y)h + f_{\nabla y}(x, y, \nabla y)\nabla h] dx + (v, y'(v)h)_{H^{-1}(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} [f_y(x, y, \nabla y) - \operatorname{div} f_{\nabla y}(x, y, \nabla y) + q]h dx + \chi \int_{\Omega} \Lambda v v'(y)h dx. \end{aligned}$$

Справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \Lambda v v'(y) h \, dx &= \int_{\Omega} \Lambda v L'(y) h \, dx \\ &= \int_{\Omega} \Lambda v [\Delta h + a'(x, y) h] \, dx = \int_{\Omega} [\Delta \Lambda v + \Lambda v a'(x, y)] h \, dx.\end{aligned}$$

Таким образом, производная J характеризуется равенством

$$\langle J'(y), h \rangle = \int_{\Omega} [f_y(x, y, \nabla y) - \operatorname{div} f_{\nabla y}(x, y, \nabla y) + \chi \Delta \Lambda v + \chi \Lambda v a'(x, y)] h \, dx$$

для всех $h \in H_0^1(\Omega)$.

В результате вариационное неравенство (3) принимает вид

$$\int_{\Omega} [f_y(x, y, \nabla y) - \operatorname{div} f_{\nabla y}(x, y, \nabla y) + \Delta p + a'(x, y) p] (h - y) \, dx \geq 0 \quad \text{для всех } h \in Y,$$

где $p = \chi \Lambda v$. Тогда справедливо равенство (4), а в силу (1) и уравнение (5). Зададим функцию q , равную выражению в левой части соотношения (6). Тогда предшествующее неравенство принимает вид (7). Теорема доказана.

Полученная система условий оптимальности включает в себя уравнение состояния (5), сопряженное уравнение (6) и вариационное неравенство (7). Задачи такого типа обычно решаются итерационно, причем вариационное неравенство служит для нахождения управления, уравнение состояния – для определения функции состояния, а сопряженное уравнение – для нахождения сопряженной функции p . В данном же случае на фиксированной итерации сначала по известной вспомогательной функции q из вариационного неравенства (7) определяется функция состояния y . Затем последовательно из формул (5) и (6) находятся, соответственно, функции p и q . По завершении сходимости алгоритма по формуле (4) определяется искомое управление. Основная трудность здесь связана с практической реализацией эллиптического вариационного неравенства (7), что, в принципе, может осуществляться известными методами (см., например, [15]). Естественно, проблема сходимости итерационного процесса остается открытой, но подобные вопросы практически не поддаются анализу для экстремальных задач, характеризуемых даже регулярными нелинейными уравнениями с частными производными в отсутствии фазовых ограничений.

Аналогичные результаты могут быть получены и для других сингулярных управляемых систем с фазовыми ограничениями.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. В. Фурсиков, *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения*, Университетская серия, **5**, Научная книга, Новосибирск, 1999.
- [2] Ж.-Л. Лионс, *Управление сингулярными распределенными системами*, Наука, М., 1987.
- [3] А. С. Матвеев, В. А. Якубович, *Абстрактная теория оптимального управления*, Изд. С.-Петербург. ун-та, СПб., 1994.
- [4] P. Neittaanmäki, D. Tiba, *Optimal Control of Nonlinear Parabolic Systems. Theory, Algorithms, and Applications*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **179**, Marcel Dekker, New York, 1994.

- [5] B. S. Mordukhovich, J.-P. Raymond, “Neumann boundary control of hyperbolic equations with pointwise state constraints”, *SIAM J. Control Optim.*, **43**:4 (2005), 1354–1372.
- [6] A. Rösch, F. Tröltzsch, “On regularity of solutions and Lagrange multipliers of optimal control problems for semilinear equations with mixed pointwise control-state constraints”, *SIAM J. Control Optim.*, **46**:3 (2007), 1098–1115.
- [7] L. Wang, “State-constrained optimal control governed by elliptic differential equations in unbounded domains”, *J. Optim. Theory Appl.*, **141**:2 (2009), 411–427.
- [8] J. Bonnans, E. Casas, “Optimal control of semilinear multistate systems with state constraints”, *SIAM J. Control Optim.*, **27**:2 (1989), 446–455.
- [9] С. Я. Серовайский, “Метод аппроксимационного штрафа в задаче оптимального управления негладкими сингулярными системами”, *Матем. заметки*, **76**:6 (2004), 893–904.
- [10] С. Я. Серовайский, “Метод штрафа в сингулярных нелинейных управляемых системах с поточечными фазовыми ограничениями”, *Тр. ИВМиМГ СО РАН. Сер. Информатика*, **10** (2011), 184–190.
- [11] С. Я. Серовайский, “Задача оптимального управления для нелинейного эллиптического уравнения с фазовым ограничением и вариация состояния системы”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 81–86.
- [12] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
- [13] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979.
- [14] *Функциональный анализ*, ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972.
- [15] Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979.

С. Я. Серовайский

Казахский национальный университет

им. аль-Фараби

E-mail: serovajskys@mail.ru

Поступило

07.09.2013

Исправленный вариант

20.02.2014