Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов, О неравенствах типа Ландау–Колмогорова–Хермандера на полуоси, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 175–185

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1039>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 07:46:33

УДК 517.518.28

О НЕРАВЕНСТВАХ

ТИПА ЛАНДАУ–КОЛМОГорова–ХЁРМАНДЕРА НА ПОЛУОСИ

В. Ф. Бабенко, В. А. Кофанов, С. А. Пичугов

Решена задача о несимметричном идеальном сплайне, наименее уклоняющемся от 0 в метрике пространства $C[a, b]$. На этом основании для норм положительных и отрицательных частей промежуточных производных функций, заданных на полуоси, доказаны неравенства типа Ландау–Колмогорова–Хёрмандера, учитывающие ограничения на положительную и отрицательную части старшей производной. Таким образом, получено обобщение и уточнение известного неравенства Шенберга и Каваретты.

Библиография: 12 названий.

1. Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $I = \mathbb{R}$ или $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Через $L_\infty(I)$ будем обозначать пространство измеримых и существенно ограниченных на I функций $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{t \in I} |f(t)|,$$

а через $L_\infty^r(I)$, $r \in \mathbb{N}$, – пространство функций $f \in L_\infty(I)$, имеющих на I локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ ($f^{(0)} = f$) и таких, что $f^{(r)} \in L_\infty(I)$.

Пусть заданы положительные числа A, B и $k = 1, \dots, r-1$. Для функций $f \in L_\infty^r(I)$ хорошо известна следующая, восходящая к Э. Ландау [1], экстремальная задача:

$$\|f^{(k)}\|_\infty \rightarrow \sup, \quad \|f\|_\infty \leq A, \quad \|f^{(r)}\|_\infty \leq B. \quad (1)$$

В случае $I = \mathbb{R}$ или $I = \mathbb{R}_+$ задача (1) эквивалентна отысканию точной константы в неравенстве

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq c \|f\|_\infty^{1-k/r} \|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}.$$

В дальнейшем эту точную константу мы будем обозначать через $c_{r,k}(I)$, т.е.

$$c_{r,k}(I) = \sup_{f \in L_\infty^r, f^{(r)} \neq 0} \frac{\|f^{(k)}\|_\infty}{\|f\|_\infty^{1-k/r} \|f^{(r)}\|_\infty^{k/r}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда и Правительства Украины, грант U92200.

Ландау [1] доказал, что $c_{2,1}(\mathbb{R}_+) = 2$. В работах Ж. Адамара [2] и Г. Е. Шилова [3] были найдены величины $c_{r,k}(\mathbb{R})$ при $r \leq 4$ и $k < r$. В [4], [5] А. Н. Колмогоров дал полное решение этой задачи в случае $I = \mathbb{R}$: при всех $r, k, k < r$,

$$c_{r,k}(\mathbb{R}) = \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-k/r}},$$

где φ_r — r -й периодический интеграл, имеющий нулевое среднее значение на периоде, от функции $\varphi_0(x) = \operatorname{sgn} \sin x$ (φ_r обычно называют эйлеровым сплайном).

В [6] А. П. Маторин доказал, что при всех $r, k, k < r$,

$$c_{r,k}(\mathbb{R}_+) \leq \frac{T_r^{(k)}(1)}{\|T_r\|^{1-k/r}} = (2^{r-1}r!)^{1-k/r} T_r^{(k)}(1),$$

где

$$T_r(x) = \frac{1}{2^{r-1}r!} \cos(r \arccos x), \quad x \in [-1, 1],$$

— полином Чебышева первого рода. При этом в случаях $r = 2, k = 1$ и $r = 3, k = 1, 2$ это неравенство обращается в равенство.

Асимптотические оценки для констант $c_{r,k}(\mathbb{R}_+)$ были даны С. Б. Стечкиным [7].

Для $r \geq 4$ задача о точных константах $c_{r,k}(\mathbb{R}_+)$ была решена И. Шенбергом и А. Кавареттой [8], [9]. Для формулировки их результата нам понадобятся следующие определения и обозначения.

Через $\sigma_{n,r}$ обозначим определенный на $[0, 1]$ идеальный сплайн порядка r с n узлами, имеющий на отрезке $[0, 1]$ минимальную L_∞ -норму среди всех идеальных сплайнов вида

$$\sigma(x) = \frac{1}{r!} x^r + 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i (x - \xi_i)_+^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu x^\nu, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Как хорошо известно (см., например, [10]), такой сплайн $\sigma_{n,r}$ существует, он единственный и имеет $n + r + 1$ точек альтернанса, причем концы отрезка $[0, 1]$ являются точками альтернанса. Отметим, что при $n = 0$ $\sigma_{n,r}(x) = 2^{-r} T_r(2x + 1)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ число λ_n выберем из условия $\lambda_n^{-r} |\sigma_{n,r}(0)| = |\sigma_{0,r}(0)|$, т.е.

$$\lambda_n^r = \left| \frac{\sigma_{n,r}(0)}{\sigma_{0,r}(0)} \right|,$$

и положим $s_{n,r}(x) = \lambda_n^{-r} \sigma_{n,r}(\lambda_n x)$. Тогда [8], [9]

$$c_{r,k}(\mathbb{R}_+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{n,r}^{(k)}(0)|}{|s_{n,r}(0)|^{1-k/r}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\sigma_{n,r}^{(k)}(0)|}{|\sigma_{n,r}(0)|^{1-k/r}}.$$

Кроме того, в работах [8], [9] доказано, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,r}(x) =: s_r(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (3)$$

(сходимость в (3) равномерна на каждом отрезке $[0, a] \subset \mathbb{R}_+$), и предельная функция $s_r(x)$ является идеальным сплайном порядка r на $\mathbb{R}_+$ с бесконечным числом узлов. Решение задачи (1) для функций $f \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ теперь можно сформулировать в виде

$$\sup_{\substack{f \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+) \\ \|f\|_\infty \leq A, \|f\|_\infty^r \leq B}} \|f^{(k)}\|_\infty = \frac{|s_r^{(k)}(0)|}{|s_r(0)|^{1-k/r}} A^{1-k/r} B^{k/r}.$$

Шенберг и Каваретта предложили назвать $s_r(x)$ односторонним эйлеровым сплайном.

В [11] Л. Хёрмандер для функций из $L_\infty^r(\mathbb{R})$ дал решение следующей, более общей чем (1), задачи:

$$\|f_\pm^{(k)}\|_\infty \rightarrow \sup, \quad E_0(f)_\infty \leq A, \quad \|f_+^{(r)}\|_\infty \leq \alpha, \quad \|f_-^{(r)}\|_\infty \leq \beta, \quad (4)$$

где $k = 1, \dots, r-1$, положительные числа A, α, β фиксированы, $E_0(f)_\infty$ – наилучшее равномерное приближение функции f константой, а $f_\pm(x) = \max\{\pm f, 0\}$.

Пусть $\varphi_r(\cdot; \alpha, \beta)$ есть r -й периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от 2π -периодической функции $\varphi_0(x; \alpha, \beta)$, которая для $x \in [0, 2\pi)$ определяется соотношениями

$$\varphi_0(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x \in [0, 2\pi\beta/(\alpha + \beta)), \\ -\beta, & \text{если } x \in [2\pi\beta/(\alpha + \beta), 2\pi). \end{cases}$$

Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda, r}(x; \alpha, \beta) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda x; \alpha, \beta)$. Результат Хёрмандера можно сформулировать в одной из следующих двух эквивалентных форм:

1) если число $\lambda > 0$ выбрано из условия

$$E_0(\varphi_{\lambda, r}(\cdot; \alpha, \beta))_\infty = E_0(f)_\infty,$$

$$\text{то } \|f_\pm^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda, r-k}(\cdot; \alpha, \beta)_\pm\|_\infty;$$

2) для любой функции $f \in L_\infty^r(\mathbb{R})$ справедливо неулучшаемое неравенство

$$\|f_\pm^{(k)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-k}(\cdot; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty)_\pm\|_\infty}{E_0(\varphi_r(\cdot; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty))_\infty^{1-k/r}} E_0(f)_\infty^{1-k/r}.$$

Целью данной работы является решение задачи (4) для функций из класса $L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$.

2. Для любых $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ и положительных α, β через $S_{n, r}^+(\alpha, \beta)$ обозначим множество определенных на $[0, 1]$ сплайнов вида

$$\sigma(x) = \alpha \frac{1}{r!} x^r + (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^n (-1)^i (x - \xi_i)_+^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu x^\nu,$$

а через $S_{n, r}^-(\alpha, \beta)$ – множество сплайнов вида

$$\sigma(x) = -\beta \frac{1}{r!} x^r + (\alpha + \beta) \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} (x - \xi_i)_+^r + \sum_{\nu=0}^{r-1} a_\nu x^\nu,$$

где $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n \leq 1$ (при $n = 0$ мы полагаем $\sum_{i=1}^n$ равной 0). Отметим, что для $\sigma \in S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$ производная $\sigma^{(r)}$ принимает два значения: α и $-\beta$, — причем в интервале $(0, \xi_1)$

$$\sigma^{(r)}(x) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } \sigma \in S_{n,r}^{+}(\alpha, \beta), \\ -\beta, & \text{если } \sigma \in S_{n,r}^{-}(\alpha, \beta). \end{cases}$$

При $\alpha = \beta = 1$ класс сплайнов $S_{n,r}^{+}(\alpha, \beta)$ совпадает с совокупностью идеальных сплайнов вида (2).

Имеет место

ТЕОРЕМА 1. В множестве $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$, где $r \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, найдется сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot) = \sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \alpha, \beta)$ с n различными узлами, обладающий свойствами:

1) существует $n + r + 1$ точек $0 = x_1^{\pm} < x_2^{\pm} < \dots < x_{n+r+1}^{\pm} = 1$ таких, что

$$\sigma_{n,r}^{\pm}(x_i^{\pm}) = \pm(-1)^{i+r+1} \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}, \quad i = 1, \dots, n + r + 1 \quad (5)$$

(точки $x_i^{\pm}$ называют точками альтернанса);

2) для любого $k = 0, 1, \dots, r$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{+})^{(k)}(0) = (-1)^{r-k}, \quad \operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^{-})^{(k)}(0) = (-1)^{r-k+1}. \quad (6)$$

Сплайн, удовлетворяющий соотношениям (5), единственный в множестве $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$, причем для любого $\sigma^{\pm} \in S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$, $\sigma^{\pm} \neq \sigma_{n,r}^{\pm}$,

$$\|\sigma^{\pm}\|_{\infty} > \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 0$ утверждение теоремы 1 следует из известной теоремы Чебышева об альтернансе (см., например, [12, с. 50]), а сплайн $\sigma_{0,r}^{\pm}(\cdot)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с полиномом Чебышева первого рода. Поэтому будем считать, что $n \geq 1$.

В пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ рассмотрим сферу S^n радиуса 1, т.е. множество векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющих соотношению $\sum_{i=1}^{n+1} |\xi_i| = 1$. Каждому такому вектору $\xi \in S^n$ поставим в соответствие разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $0, |\xi_1|, |\xi_1| + |\xi_2|, \dots, \sum_{i=1}^n |\xi_i|, 1$. Положим

$$I_k = \left[\sum_{i=0}^{k-1} |\xi_i|, \sum_{i=0}^k |\xi_i| \right),$$

где $\xi_0 := 0$, $k = 1, \dots, n + 1$. По каждому из полученных разбиений B_{ξ} построим функцию

$$G_{\xi} = \frac{1}{(r-1)!} \int_0^1 (x-t)_{+}^{r-1} g_{\xi}(t) dt, \\ g_{\xi}(t) = \begin{cases} \alpha \operatorname{sgn} \xi_{2i-1}, & \text{если } t \in I_{2i-1}, \\ \beta \operatorname{sgn} \xi_{2i}, & \text{если } t \in I_{2i}, \end{cases} \quad i = 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2} \right].$$

Ясно, что $G_\xi(x)$ является сплайном порядка r с узлами в точках разбиения B_ξ , причем $G_\xi^{(r)} = g_\xi$ принимает значения $\pm\alpha, \pm\beta$. Пусть

$$P_{n+r-1}^\xi(x) = \sum_{i=0}^{n+r-1} a_i(\xi)x^i$$

– полином, имеющий наименьшее равномерное уклонение на отрезке $[0, 1]$ от функции $G_\xi(x)$ среди всех полиномов степени не выше $n + r - 1$.

Рассмотрим отображение $\varphi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, действующее по формуле

$$\varphi(\xi) = (a_r(\xi), a_{r+1}(\xi), \dots, a_{n+r-1}(\xi)).$$

Из построения отображения φ и свойств полиномов наилучшего равномерного приближения следует, что отображение φ непрерывно и нечетно. Поэтому из теоремы Борсука (см., например, [12, с. 255]) вытекает существование $\hat{\xi} \in S^n$ такого, что $\varphi(\hat{\xi}) = 0$. Это означает, что полином $P_{n+r-1}^{\hat{\xi}}$ наилучшего равномерного приближения функции $G_{\hat{\xi}}$ имеет степень не выше $r - 1$. Поэтому для разности $\Delta := G_{\hat{\xi}} - P_{n+r-1}^{\hat{\xi}}$ имеем $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$. Следовательно, функция $\Delta(x)$ является сплайном порядка r , причем $\Delta^{(r)}(x)$ принимает лишь значения $\pm\alpha, \pm\beta$. Более того, в силу теоремы Чебышева об альтернансе (см., например, [12, с. 50]) сплайн $\Delta(x)$ имеет $n + r + 1$ точек альтернанса на $[0, 1]$, а значит, $n + r$ перемен знака. Поэтому в силу теоремы Ролля $\Delta^{(r)} = g_{\hat{\xi}}$ имеет n перемен знака. Таким образом, у вектора $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_{n+1})$ все компоненты $\hat{\xi}_i$ отличны от 0. Следовательно, сплайн Δ имеет n узлов, причем $\Delta^{(r)}(x)$ меняет знак в точках $\sum_{i=1}^k |\xi_i|$, $k = 1, \dots, n$. По построению $\Delta^{(r)}(x) = g_{\hat{\xi}}(x) = \alpha$ для $x \in (0, \hat{\xi}_1)$ (переходя, если необходимо, к вектору $-\hat{\xi}$, можем считать $\hat{\xi}_1 > 0$), поэтому $\Delta^{(r)}(x)$ принимает лишь два значения: $\alpha, -\beta$. Итак, $\Delta \in S_{n,r}^+(\alpha, \beta)$ и имеет $n + r + 1$ точек альтернанса. Обозначим сплайн Δ через $\sigma_{n,r}^+(\cdot; \alpha, \beta)$. Аналогично доказывается существование в классе $S_{n,r}^-(\alpha, \beta)$ сплайна $\sigma_{n,r}^-(\cdot; \alpha, \beta)$, имеющего $n + r + 1$ точек альтернанса.

Покажем теперь, что концы отрезка являются точками альтернанса сплайна $\sigma_{n,r}^\pm = \sigma_{n,r}^\pm(\cdot; \alpha, \beta)$. Действительно, в противном случае производная $(\sigma_{n,r}^\pm)'$ имела бы по крайней мере $n + r$ нулей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $(\sigma_{n,r}^\pm)^{(r)}$ имела бы $n + 1$ перемен знака, что невозможно.

Докажем соотношения (5) и (6). Так как сплайн $\sigma_{n,r}^\pm(\cdot; \alpha, \beta)$ имеет $n + r + 1$ точек альтернанса, соотношение (5) следует из соотношений (6) (при $k = 0$). Для доказательства соотношений (6) заметим, что для любого $i = 1, \dots, r$

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i-1)}(0) = -\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i)}(0). \quad (8)$$

Действительно, так как сплайн $\sigma_{n,r}^\pm$ имеет $n + r + 1$ точек альтернанса, в силу теоремы Ролля $(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i-1)}$ имеет $n + r - i + 1$ нулей внутри $(0, 1)$. С другой стороны, $(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i-1)}$ не может иметь больше чем $n + r - i + 1$ нулей в $[0, 1]$. В противном случае $(\sigma_{n,r}^\pm)^{(r)}$ имел бы $n + 1$ перемен знака, что невозможно. Пусть $t_1 \in (0, 1)$ – самый левый из нулей $(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i-1)}$. Предположим, что (8) не выполняется, т.е.

$$\operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i-1)}(0) = \operatorname{sgn}(\sigma_{n,r}^\pm)^{(i)}(0).$$

Тогда в силу теоремы Ферма производная $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ имеет нуль в интервале $(0, t_1)$. Поэтому число нулей $(\sigma_{n,r}^{\pm})^{(i)}$ в $(0, 1)$ не меньше чем $n + r - i + 1$, что невозможно.

Для завершения доказательства теоремы осталось убедиться в том, что если некоторый сплайн из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношениям (5), то его норма строго меньше нормы любого другого сплайна из $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$.

Предположим противное. Пусть некоторый сплайн из множества $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$ (сохраним за ним обозначение $\sigma_{n,r}^{\pm}$) удовлетворяет соотношениям (5), и пусть в $S_{n,r}^{\pm}(\alpha, \beta)$ найдется сплайн $\sigma^{\pm} \neq \sigma_{n,r}^{\pm}$ такой, что

$$\|\sigma^{\pm}\|_{\infty} \leq \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}. \quad (9)$$

Через $t_k^{\pm}$ (соответственно $u_k^{\pm}$) обозначим узлы сплайна $\sigma_{n,r}^{\pm}$ (соответственно $\sigma^{\pm}$). Покажем, что из предположения (9) следуют неравенства

$$u_k^{\pm} < t_k^{\pm}, \quad k = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Для этого заметим, что разность $\delta := \sigma_{n,r}^{\pm} - \sigma$ имеет в $(0, 1)$ $n + r$ нулей с учетом их кратностей (это следует из предположения (9) и того, что сплайн $\sigma_{n,r}^{\pm}$ имеет в $[0, 1]$ $n + r + 1$ точек альтернанса). Поэтому в силу теоремы Ролля производная $\delta^{(r)}$ имеет в $(0, 1)$ n перемен знака.

С другой стороны, $\delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $(t_k^{\pm}, t_{k+1}^{\pm})$, $k = 0, 1, \dots, n$ ($t_0^{\pm} := 0$, $t_{n+1}^{\pm} := 1$). Следовательно, производная $\delta^{(r)}$ имеет в интервале $(0, 1)$ ровно n перемен знака, причем она не тождественна 0 ни в одном из интервалов $(t_k^{\pm}, t_{k+1}^{\pm})$.

Вернемся к доказательству неравенства (10). Проведем это доказательство индукцией по k . Пусть сначала $k = 1$. Предположим, что $u_1^{\pm} \geq t_1^{\pm}$. Тогда производная $\delta^{(r)}$ тождественна 0 в интервале $(0, t_1^{\pm})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (10) справедливо для всех $k = 1, \dots, m - 1$, $m \leq n$. Покажем, что оно справедливо для $k = m$. Действительно, предположим противное: $u_m^{\pm} \geq t_m^{\pm}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($u_k^{\pm} < t_k^{\pm}$, $k = 1, \dots, m - 1$) вытекает, что производная $\delta^{(r)}$ тождественна 0 в интервале $(t_{m-1}^{\pm}, t_m^{\pm})$, что, как мы знаем, невозможно.

Итак, мы убедились в том, что из предположения (9) следуют неравенства (10). Однако, тогда в интервале $(t_{n-1}^{\pm}, t_n^{\pm})$ производная $\delta^{(r)}$ тождественна 0, что невозможно.

Таким образом, предположение (9) приводит к противоречию. Тем самым, неравенство (7) доказано. Теорема доказана.

Так же как сплайн $\sigma_{n,r}$, наименее уклоняющийся от нуля в метрике пространства $C[0, 1]$ среди всех идеальных сплайнов вида (2), выполнял роль функции сравнения в работах [8], [9], сплайны $\sigma_{n,r}^{\pm}(\cdot; \alpha, \beta)$ играют роль функций сравнения при решении задачи (4) на классе функций $L_{\infty}^r(\mathbb{R}_+)$.

Для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ выберем $\lambda_n^{\pm}$ из условия $(\lambda_n^{\pm})^{-r} |\sigma_{n,r}^{\pm}(0; \alpha, \beta)| = |\sigma_{0,r}^{\pm}(0; \alpha, \beta)|$, т.е.

$$(\lambda_n^{\pm})^r = \left| \frac{\sigma_{n,r}^{\pm}(0; \alpha, \beta)}{\sigma_{0,r}^{\pm}(0; \alpha, \beta)} \right|, \quad (11)$$

и положим

$$s_{n,r}^{\pm}(x; \alpha, \beta) = (\lambda_n^{\pm})^{-r} \sigma_{n,r}^{\pm}(\lambda_n^{\pm} x; \alpha, \beta), \quad x \in (0, (\lambda_n^{\pm})^{-1}). \quad (12)$$

Справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, r-1$. Для любой функции $f \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ имеют место неравенства

$$\|((-1)^{r-k} f^{(k)})_\pm\|_\infty \leq \frac{((-1)^{r-k} s_{n,r}^\pm)^{(k)}(0; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty)}{((-1)^{r-k} s_{n,r}^\pm)^{(k)}(0; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty)^{1-k/r}} E_0(f)_\infty^{1-k/r}. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $f \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ и положим

$$\alpha = \|f_+^{(r)}\|_\infty, \quad \beta = \|f_-^{(r)}\|_\infty. \quad (14)$$

Без ограничения общности можем считать, что $\|f^{(k)}\|_\infty = |f^{(k)}(0)|$. (Действительно, в случае $\|f^{(k)}\|_\infty = |f^{(k)}(x_0)|$ перейдем к функции $\varphi(x) = f(x + x_0)$.)

Далее, заметим, что величина дроби, стоящей в правой части (13), не зависит от числа $\lambda_n^\pm$, участвующего в определении $s_{n,r}^\pm(\cdot; \alpha, \beta)$ (см. (12)), а величина $|s_{n,r}^\pm(0; \alpha, \beta)|$ непрерывно зависит от $\lambda_n^\pm$ и принимает любое значение из интервала $(0, \infty)$, когда $\lambda_n^\pm$ пробегает этот интервал. Поэтому временно, в ходе доказательства теоремы 2, нам будет удобно считать, что $\lambda_n^\pm$ выбрано не из условия (11), а из условия

$$E_0(f)_\infty = |s_{n,r}^\pm(0; \alpha, \beta)|. \quad (15)$$

Таким образом, для доказательства неравенств (13) достаточно установить справедливость неравенств

$$\begin{aligned} f_+^{(k)}(0) &\leq (s_{n,r}^-)^{(k)}(0; \alpha, \beta), \quad f_-^{(k)}(0) \leq (s_{n,r}^+)^{(k)}(0; \alpha, \beta), & \text{если } r-k \text{ нечетно,} \\ f_+^{(k)}(0) &\leq (s_{n,r}^+)^{(k)}(0; \alpha, \beta), \quad f_-^{(k)}(0) \leq (s_{n,r}^-)^{(k)}(0; \alpha, \beta), & \text{если } r-k \text{ четно.} \end{aligned} \quad (16)$$

Докажем неравенства (16) индукцией по k . Пусть сначала $k = 1$. Предположим, что имеет место неравенство, противоположное одному из неравенств (16), например первому неравенству. Тогда существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$\varepsilon f_+'(0) > (s_{n,r}^-)'(0; \alpha, \beta). \quad (17)$$

Рассмотрим разность $\delta := s_{n,r}^- - \varepsilon(f - \lambda_0(f))$, где $\lambda_0(f)$ – константа наилучшего равномерного приближения функции f . В силу условия (15)

$$\|\varepsilon(f - \lambda_0(f))\|_\infty < \|s_{n,r}^-\|_\infty, \quad (18)$$

а из теоремы 1 следует наличие у сплайна $s_{n,r}^\pm$ $n + r + 1$ точек альтернанса. Поэтому разность δ имеет внутри интервала $(0, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n + r$ нулей. С другой стороны, эта разность не может иметь более $n + r$ нулей, ибо в противном случае с помощью теоремы Ролля заключаем, что $\delta^{(r)} = (s_{n,r}^-)^{(r)} - \varepsilon f^{(r)}$ имеет $n + 1$ перемен знака, что ввиду равенств (14) невозможно. Обозначим через t_1 первый нуль разности δ в интервале $(0, (\lambda_n^\pm)^{-1})$. Согласно соотношениям (6) $s_{n,r}^-(0) < 0$, $(s_{n,r}^-)'(0) > 0$. Принимая во внимание неравенство (18) и учитывая соотношение (17), заключаем, что

$$\delta(0) < 0, \quad \delta'(0) < 0 \quad (19)$$

соответственно. Из неравенств (19) следует, что в некоторой точке интервала $(0, t_1)$ δ' обращается в 0. Кроме того, так как δ имеет в промежутке $[t_1, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n + r$ нулей, то в силу теоремы Ролля δ' имеет в интервале $(t_1, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n + r - 1$ нулей. Таким образом, δ' имеет в $(0, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ $n + r$ нулей. Тогда $\delta^{(r)}$ имеет согласно теореме Ролля $n + 1$ перемен знака, что невозможно, как было отмечено выше. Для $k = 1$ теорема доказана.

Продолжим доказательство теоремы по индукции. Докажем неравенства (16) для k -й производной $f^{(k)}$ в предположении, что они имеют место для $f^{(i)}$, $i < k$. Как и в случае $k = 1$, будем рассуждать от противного. Если имеет место неравенство, противоположное одному из неравенств (16), например первому неравенству (соответствующему случаю нечетного $r - k$), то существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$\varepsilon f_+^{(k)}(0) > (s_{n,r}^-)^{(k)}(0; \alpha, \beta). \quad (20)$$

Так как мы рассматриваем случай нечетного $r - k$, ввиду соотношений (6)

$$(s_{n,r}^-)^{(k)}(0; \alpha, \beta) > 0, \quad (s_{n,r}^-)^{(k-1)}(0; \alpha, \beta) < 0.$$

Поэтому из индуктивного предположения вытекает неравенство

$$\varepsilon f_-^{(k-1)}(0) < (s_{n,r}^-)^{(k-1)}(0; \alpha, \beta), \quad (21)$$

если $f^{(k-1)}(0) < 0$ (в противном случае неравенство (21) очевидно). Обозначим через t_1^{k-1} первый нуль разности $\delta^{(k-1)} = (s_{n,r}^-)^{(k-1)} - \varepsilon f^{(k-1)}$ в интервале $(0, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ (как и при $k = 1$, устанавливаем, что $\delta^{(k-1)}$ имеет в этом интервале ровно $n + r - k + 1$ нулей). В силу неравенств (18) и (20) $\delta^{(k-1)}(0) < 0$, $\delta^{(k)}(0) > 0$. Поэтому производная $\delta^{(k)}$ обращается в 0 в некоторой точке интервала $(0, t_1^{k-1})$. Учитывая также, что в интервале $(t_1^{k-1}, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ эта производная имеет $n + r - k$ нулей, заключаем, что внутри $(0, (\lambda_n^\pm)^{-1})$ $\delta^{(k)}$ имеет $n + r - k + 1$ нулей. Далее, с помощью теоремы Ролля приходим к выводу, что $\delta^{(r)}$ имеет $n + 1$ перемен знака, что невозможно. Теорема доказана.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. При любых фиксированных $r \in \mathbb{N}$ и положительных α, β существует определенный на $[0, \infty)$ сплайн $s_r^\pm(\cdot; \alpha, \beta)$ порядка r с бесконечным числом узлов $y_k^\pm$, $k = 1, 2, \dots$,

$$0 = y_0^\pm < y_1^\pm < y_2^\pm < \dots < y_k^\pm < \dots, \quad y_k^\pm \rightarrow \infty, \quad k \rightarrow \infty,$$

обладающий свойствами:

- 1) на каждом интервале $[y_k^\pm, y_{k+1}^\pm)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $(s_r^\pm)^{(r)}(x; \alpha, \beta) \equiv \alpha$ или $(s_r^\pm)^{(r)}(x; \alpha, \beta) \equiv -\beta$;
- 2) для любого $c > 0$ последовательность $\{s_{n,r}^\pm(\cdot; \alpha, \beta)\}_{n=1}^\infty$ (все элементы которой при всех достаточно больших n определены на $[0, c]$) сходится к $s_r^\pm(\cdot; \alpha, \beta)$ вместе со всеми производными до порядка $r - 1$ включительно равномерно на $[0, c]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим узлы сплайна $s_{n,r}^{\pm} = s_{n,r}^{\pm}(\cdot; \alpha, \beta)$ через $t_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$. Покажем, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$t_{n+1,k}^{\pm} < t_{n,k}^{\pm}, \quad n = k, k+1, \dots \quad (22)$$

Для доказательства (22) нам потребуется изучить некоторые свойства разности $\Delta := s_{n,r}^{\pm} - s_{n+1,r}^{\pm}$. Заметим, что она определена в интервале $\delta_n^{\pm} := (0, (\lambda_n^{\pm})^{-1})$. Чтобы в этом убедиться, покажем, что для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$\lambda_{n+1}^{\pm} < \lambda_n^{\pm}. \quad (23)$$

Действительно, из (7) следует, что $\|\sigma_{n+1,r}^{\pm}\|_{\infty} < \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}$. Тогда в силу (5) $|\sigma_{n+1,r}^{\pm}(0)| < |\sigma_{n,r}^{\pm}(0)|$. Теперь неравенство (23) следует из определения (11).

Отметим далее, что производная $\Delta^{(r)}$ имеет в $\delta_n^{\pm}$ не менее n перемен знака. Действительно, принимая во внимание равенство

$$\|\sigma_{n+1,r}^{\pm}\|_{\infty} = \|\sigma_{n,r}^{\pm}\|_{\infty}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (24)$$

вытекающее из (5), (11) и (12), и то обстоятельство, что сплайн $s_{n,r}^{\pm}$ имеет $n+r+1$ точек альтернанса (в силу теоремы 1 и определения (12)), заключаем, что разность Δ имеет в интервале $\delta_n^{\pm}$ $n+r$ нулей с учетом их кратностей. Тогда в силу теоремы Ролля производная $\Delta^{(r)}$ имеет в $\delta_n^{\pm}$ n перемен знака.

В то же время, $\Delta^{(r)}$ не может иметь перемен знака внутри интервалов $(t_{n,k}^{\pm}, t_{n,k+1}^{\pm})$, $k = 0, 1, \dots, n$ ($t_{n,0}^{\pm} := 0$, $t_{n,n+1}^{\pm} := (\lambda_n^{\pm})^{-1}$). Следовательно, $\Delta^{(r)}$ имеет в интервале $\delta_n^{\pm}$ ровно n перемен знака, причем она не тождественна 0 ни в одном из интервалов $(t_{n,k}^{\pm}, t_{n,k+1}^{\pm})$.

Вернемся к доказательству неравенства (22). Проведем это доказательство индукцией по k . Пусть сначала $k = 1$. Предположим, что $t_{n+1,1}^{\pm} > t_{n,1}^{\pm}$. Тогда производная $\Delta^{(r)}$ тождественна 0 в интервале $(0, t_{n,1}^{\pm})$, что, как было отмечено выше, невозможно.

Предположим, что неравенство (22) справедливо для всех $k = 1, \dots, m-1$, $m \leq n$. Покажем, что оно справедливо для $k = m$. Действительно, предположим противное: $t_{n+1,m}^{\pm} \geq t_{n,m}^{\pm}$. Из этого неравенства и индуктивного предположения ($t_{n+1,k}^{\pm} < t_{n,k}^{\pm}$, $k = 1, \dots, m-1$) вытекает, что производная $\Delta^{(r)}$ тождественна 0 в интервале $(t_{n,m-1}^{\pm}, t_{n,m}^{\pm})$, что, как мы знаем, невозможно.

Тем самым, неравенство (22) доказано. Из этого неравенства следует существование пределов у каждой из последовательностей $\{t_{n,k}^{\pm}\}_{n=k}^{\infty}$, $k = 1, 2, \dots$. Пусть $0 = y_0^{\pm} < y_1^{\pm} < y_2^{\pm} < \dots < y_i^{\pm} < \dots$ – все различные пределы этих последовательностей, упорядоченные по возрастанию. Для любого $i \in \mathbb{N}$ и любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует номер $n = n(i, \varepsilon)$ такой, что для любого $n \geq n(i, \varepsilon)$ $(s_{n,r}^{\pm})^{(r)}(x) = \alpha$ или $(s_{n,r}^{\pm})^{(r)}(x) = -\beta$ при всех $x \in I_i^{\pm}(\varepsilon) := (y_{i-1}^{\pm} + \varepsilon, y_i^{\pm} - \varepsilon)$. Другими словами, начиная с некоторого номера $n = n(i, \varepsilon)$, сужение сплайнов $s_{n,r}^{\pm}$ на интервал $I_i^{\pm}(\varepsilon)$ является многочленом степени r со старшей производной равной α или $-\beta$. Ввиду произвольности ε отсюда следует, что в каждом из интервалов $I_i^{\pm} := (y_{i-1}^{\pm}, y_i^{\pm})$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{n,r}^{\pm}(x; \alpha, \beta) =: s_r^{\pm}(x; \alpha, \beta), \quad (25)$$

причем $(s_r^\pm)^{(r)}(x; \alpha, \beta) = \alpha$ или $(s_r^\pm)^{(r)}(x; \alpha, \beta) = -\beta$ при всех $x \in I_i^\pm$.

Фиксируем $c > 0$. Так как $|\sigma_{n,r}^\pm(0; \alpha, \beta)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, в силу (11) $\lambda_n^\pm \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Поэтому, начиная с некоторого номера, последовательность сплайнов $\{s_{n,r}^\pm\}_{n=1}^\infty$ определена на $[0, c]$. Далее, из равенства (24) следует ее равномерная ограниченность, а из неравенств

$$-\beta \leq (s_{n,r}^\pm)^{(r)}(x; \alpha, \beta) \leq \alpha, \quad x \in [0, c], \quad (26)$$

следует ее равностепенная непрерывность, а также равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность на этом отрезке последовательностей k -х производных $\{(s_{n,r}^\pm)^{(k)}\}_{n=1}^\infty$, $k = 1, \dots, r-1$. Поэтому сходимость в (25) будет равномерной на $[0, c]$ вместе со всеми производными до порядка $r-1$ включительно.

Покажем, что $y_k^\pm \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Действительно, предположим противное. Тогда существует $c > 0$ такое, что сплайн $s_r^\pm$ на $[c, \infty)$ совпадает с некоторым многочленом степени r и, следовательно, неограничен, что противоречит равенствам (24) и (25).

Для завершения доказательства теоремы осталось доказать включение

$$s_r^\pm \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+). \quad (27)$$

Чтобы убедиться в справедливости (27), заметим, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ существует $c > 0$ такое, что $x_1, x_2 \in [0, c]$, и при всех достаточно больших n

$$|(s_{n,r}^\pm)^{(r-1)}(x_1; \alpha, \beta) - (s_{n,r}^\pm)^{(r-1)}(x_2; \alpha, \beta)| \leq K|x_1 - x_2|,$$

где $K = \max\{\alpha, \beta\}$. Это следует из (26). Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, имеем

$$|(s_r^\pm)^{(r-1)}(x_1; \alpha, \beta) - (s_r^\pm)^{(r-1)}(x_2; \alpha, \beta)| \leq K|x_1 - x_2|.$$

Отсюда следует включение (27). Теорема доказана.

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (13) и учитывая теорему 3, получаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 4. Для любых $r \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, r-1$ и любой функции $f \in L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ справедливы неравенства

$$\|((-1)^{r-k} f^{(k)})_\pm\|_\infty \leq \frac{((-1)^{r-k} s_r^\pm)^{(k)}(0; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty)}{((-1)^{r-k} s_r^\pm)^{(k)}(0; \|f_+^{(r)}\|_\infty, \|f_-^{(r)}\|_\infty)^{1-k/r}} E_0(f)_\infty^{1-k/r}. \quad (28)$$

Неравенства (28) являются точными. При этом неравенство для $((-1)^{r-k} f^{(k)})_+$ обращается в равенство, если $f(x) = \mu s_r^+(\lambda x; \alpha, \beta)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, а неравенство для $((-1)^{r-k} f^{(k)})_-$ обращается в равенство, если $f(x) = \mu s_r^-(\lambda x; \alpha, \beta)$, $\lambda > 0$, $\mu > 0$.

В заключение отметим, что приведенная в данной статье схема решения задачи (4) (теоремы 1–4) для функций класса $L_\infty^r(\mathbb{R}_+)$ такая же, как и в работах [8], [9]. Однако, наш метод доказательства теорем 2–4 существенно отличается от метода доказательства соответствующих теорем в этих работах.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Landau E. Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktion // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 13. P. 43–49.
- [2] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Soc. Math. France. 1914. V. 41. P. 68–72.
- [3] Боссэ Ю. Г. О неравенствах между производными // Сборник работ студенческих кружков Московского государственного университета / ред. Г. Е. Шилов. М., 1937. С. 17–27.
- [4] Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале // Уч. записки МГУ. 1939. Т. 30. С. 3–16.
- [5] Kolmogoroff A. Une généralisation de J. Hadamard entre les bornes supérieures des dérivées successives d'une fonction // C. R. Acad. Sci. France. 1938. V. 207. P. 764–765.
- [6] Маторин А. П. О неравенствах между наибольшими значениями абсолютных величин функции и ее производных на полупрямой // Укр. матем. ж. 1955. Т. 7. С. 262–266.
- [7] Стечкин С. Б. О неравенствах между верхними гранями производных произвольной функции на полуоси // Матем. заметки. 1967. Т. 1. № 6. С. 665–674.
- [8] Shönberg I. J., Cavaretta A. Solution of Landau's Problem, Concerning Higher Derivatives on Half-line. M.R.C. Technical Summary Report, 1970.
- [9] Shönberg I. J., Cavaretta A. Solution of Landau's problem, concerning higher derivatives on half-line // Proc. Conf. on Approximation Theory (Varna 1970). Sofia, 1972. P. 297–308.
- [10] Pinkus A. n -Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1985.
- [11] Hörmander L. New proof and generalization of inequality of Bohr // Math. Scand. 1954. V. 2. P. 33–45.
- [12] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.

Днепропетровский государственный университет
E-mail: babenko@ftf.dsu.dp.ua

Поступило
28.12.95