Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Обобщение метода Абеля–Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 3, 473–475

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10393>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 17:55:26

Обобщение метода Абеля–Пуассона суммирования тригонометрических рядов Фурье

Р. М. Тригуб

1. Критерий равномерной сходимости. Примеры. Пусть функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ имеет период 2π , принадлежит $L_1(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, и ее ряд Фурье записан в виде

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_k e_k, \quad \hat{f}_k = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(u) e^{-iku} du, \quad e_k = e_k(x) = e^{ikx}.$$

Изучим следующую задачу. При какой функции $\phi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{r \uparrow 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{\phi(|k|)} \hat{f}_k e_k = f$$

по норме в $L_p(\mathbb{T})$ или почти всюду для $f \in L_1(\mathbb{T})$?

В случае $\phi(x) = x$ эти средние ряда Фурье определяют классический метод Абеля–Пуассона (свертка функции с положительным ядром Пуассона) и сходимость имеет место в $\mathbb{C}(\mathbb{T})$ и $L_p(\mathbb{T})$, $p \in [1, +\infty)$. Более того, эти средние сходятся во всех точках, в которых

$$\left(\int_0^x f(u) du \right)' = f(x)$$

(в частности, во всех точках Лебега). См. [1; гл. III, 7.9].

Будем предполагать, что ϕ возрастает и $\phi \uparrow \infty$.

Если речь идет о сходимости на всем банаховом пространстве, то необходимо и достаточно добавить ограниченность норм этих операторов по $r \in (0, 1)$.

Сходимость на всем $L_p(\mathbb{T})$ при $p \in (1, +\infty)$ имеет место всегда, так как при $\lambda_k = \lambda_{|k|} \downarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ ($S_n(f)$ – частная сумма ряда Фурье, $\|\cdot\|_p$ – норма в $L_p(\mathbb{T})$)

$$\begin{aligned} \left\| \sum \lambda_k \hat{f}_k e_k \right\|_p &= \left\| \sum (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k(f) \right\|_p \\ &\leq \sum |\lambda_k - \lambda_{k+1}| \|S_k(f)\|_p \leq c(p) \|f\|_p \sum |\lambda_k - \lambda_{k+1}| = 2\lambda_0 c(p) \|f\|_p. \end{aligned}$$

Здесь применены преобразование Абеля и теорема Рисса о проекторах (см. [1; гл. 7, 6.4], а кратный случай, например, [2]).

Другой ответ получаем для $C(\mathbb{T})$, как и для $L_1(\mathbb{T})$. В этих двух случаях норма сверточного оператора равна

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} r^{\phi(|k|)} e_k(x) \right| dx.$$

Если эти интегралы ограничены по r , близким к единице, когда имеем равномерную сходимость для любой непрерывной функции, будем писать: $\phi \in A - P$.

Простое необходимое условие состоит в следующем (см. ниже теорему 2):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\phi(m+1)}{\phi(m)} = 1.$$

Положим $r = e^{-t}$, где $t \downarrow 0$, а

$$L(\phi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-t\phi(|k|)} e^{ikx} \right| dx.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть функция $\Phi(k, t)$ такова, что ряд $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(k, t) e^{ikx}$ сходится при $t \in (0, 1]$ и $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Для того, чтобы

$$\sup_{t \in (0, 1]} \int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Phi(k, t) e^{ikx} \right| dx < \infty$$

необходимо и достаточно, чтобы $\Phi: \mathbb{Z} \times (0, 1]$ допускала такое продолжение на $\mathbb{R} \times (0, 1]$, при котором

$$\Phi(x, t) = \int_{\mathbb{R}} g(u, t) e^{-iux} du, \quad \sup_{t \in (0, 1]} \|g(\cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})} < \infty.$$

ПРИМЕР 1. Если $\phi_\alpha(x) = |x|^\alpha$, то $L(\phi_\alpha) < \infty$ при $\alpha > 0$ и $\phi_\alpha \in A - P$.

ПРИМЕР 2. При любых $m \in \mathbb{N}$, $a > 0$ и $b \geq 0$ имеем $\phi_{\alpha, m}(x) = (x^\alpha - a)^{2m+1} + b \in A - P$.

ПРИМЕР 3. При любом $m \in \mathbb{N}$ и достаточно большом $b = b(m)$ имеем $\phi(x) = x^{\ln_{(m)}(x+b)} \notin A - P$. Здесь $\ln_{(1)} = \ln$, а $\ln_{(m+1)} = \ln \ln_{(m)}$.

Функция $\Phi(x, t)$ имеет при $x > 0$ в первом примере одну точку перегиба, если еще $\alpha > 1$, а во втором – две точки перегиба. См. [2; 6.5.9].

Отметим, что представлению функций в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье посвящена обзорная статья [3].

Третий пример следует из теоремы 3 при $t_k = 1/\phi(k)$.

Заметим, что при любом числе $\lambda > 0$ $L(\lambda\phi) = L(\phi)$, а если ϕ_1 и $\phi_2 \in A - P$, то при $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 \in A - P$.

Поэтому, как следует из первого примера, при любых положительных λ_k и α_k , $1 \leq k \leq n$,

$$\sum_1^n \lambda_k x^{\alpha_k} \in A - P.$$

А из второго примера следует, что некоторые коэффициенты в такой сумме могут быть отрицательными.

2. Необходимые условия.

ТЕОРЕМА 2. Если $\phi \uparrow \infty$ на $\mathbb{Z}_+$ и $\phi \in A - P$, то при $m \rightarrow \infty$

$$1 \leq \frac{\phi(m+1)}{\phi(m)} \leq 1 + O\left(\frac{1}{\ln m}\right).$$

Считая, что $\phi \in C[0, +\infty)$ и $\phi(0) \geq 1$, что не уменьшает общности, определим $x_1 = x_1(t)$ условием $\phi(x_1) = 1/t$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h(x) = \ln \phi(x)$ и при больших x выполняются условия

$$h(x) = h_1(x) \ln x, \quad h'_1(x) > 0, \quad h_1 \uparrow \infty$$

и

$$h''_1(x)x \ln x + 2h'_1(x) \leq 0, \quad h'_1(x) = O\left(h'_1\left(x + \frac{x}{h_1(x)}\right)\right).$$

Тогда при $\Phi(x, t) = e^{-t\phi(|x|)}$ и $t \rightarrow 0$

$$\ln h_1(x_1(t)) = O(\|\widehat{\Phi}(\cdot, t)\|_{L_1(\mathbb{R})}).$$

3. Случай $\phi_\alpha(x) = |x|^\alpha(|x| - \text{евклидова норма в } \mathbb{R}^d, d \geq 1)$. Аналог теоремы 1 справедлив и при $d \geq 2$.

Известно, что преобразование Фурье функции $e^{-|x|^\alpha}$ положительное при $\alpha \in (0, 2]$ и только в этом случае (см. [2] перед 6.3.10). Следовательно, и соответствующее ядро

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-t|k|^\alpha} e^{i(k,x)} \geq 0.$$

При любом $\alpha > 0$ имеем суммируемость в точках Лебега (см. критерий 8.1.3 в [2]) и, тем более, имеет место сходимость в $C(\mathbb{T}^d)$ и $L_p(\mathbb{T}^d)$, $p \in [1, +\infty)$.

Найдем теперь точный порядок приближения (по норме) каждой периодической функции этими средними типа Гаусса–Вейерштрасса

$$W_\alpha(f; t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-t|k|^\alpha} \widehat{f}_k e_k, \quad \alpha > 0, \quad t > 0.$$

ТЕОРЕМА 4. При симметрической разности $\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x-h)$, $\Delta_h^{m+1} = \Delta_h(\Delta_h^m)$, $r \in \mathbb{N}$ и $2r > d + \alpha - 1$ выполнено

$$\|f - W_\alpha(f; t)\| \asymp \left\| \int_{|u| \geq 1} \frac{\Delta_{t^{1/\alpha} u}^{2r} f(\cdot)}{|u|^{r+\alpha}} du \right\|$$

(двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от f и t). Норму в $C(\mathbb{T}^d)$ можно заменить на норму в $L_p(\mathbb{T}^d)$, $p \in [1, +\infty)$ при тех же константах.

Для доказательства убеждаемся с помощью принципа сравнения (см. 7.1.11 в [2]), что

$$\|f - W_\alpha(f; t)\| \asymp \|f - R_{\alpha, \delta}(f; t)\|,$$

где

$$R_{\alpha, \delta}(f; t) = \sum (1 - t|k|^\alpha)_+^\delta \widehat{f}_k e_k, \quad \alpha > 0, \quad \delta > \frac{d-1}{2},$$

– средние типа Бохнера–Рисса, а точный порядок приближения полиномами $R_{\alpha, \delta}(f; t)$ уже найден ([4; теорема 1]).

Отметим еще, что вопрос, изучаемый в этой статье, был поставлен во время доклада автора в апреле 2013 на семинаре в МГУ по теории функций действительного переменного. Частичный ответ приведен в лекции автора на Международной конференции “Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения, III” в Ростове-на-Дону (ЮФУ, 2–6 июня 2013).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. 1, Мир, М., 1965. [2] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004. [3] E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, *Anal. Math. Phys.*, 2:1 (2012), 1–68. [4] О. И. Кузнецова, Р. М. Тригуб, *Докл. АН СССР*, 251:1 (1980), 34–36.

Р. М. Тригуб

Донецкий национальный университет, Украина
E-mail: roald.trigub@gmail.com

Поступило

25.08.2013

Исправленный вариант

12.12.2013