Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Соколов, Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 5, 767–780

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10396>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:10:17

Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп

Е. В. Соколов

Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный корневой класс групп, состоящий лишь из конечных групп и содержащий хотя бы одну неединичную группу. Доказано, что любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$ -группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности. Установлено также, что если G – свободное произведение двух $\mathcal{C}$ -аппроксимируемых относительно сопряженности групп с конечной объединенной подгруппой или HNN-расширение $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой относительно сопряженности группы с конечными связанными подгруппами, то $\mathcal{C}$ -аппроксимируемость группы G равносильна ее $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости относительно сопряженности.

Библиография: 14 названий.

DOI: 10.4213/mzm10396

1. Введение. Формулировка результатов. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный класс групп и X – некоторая группа. Будем говорить, что элемент x группы X *сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим* (в этой группе), если для любого элемента $y \in X$, не сопряженного с x , существует гомоморфизм группы X на $\mathcal{C}$ -группу, переводящий x и y в несопряженные элементы. Напомним, что группа X называется *аппроксимируемой классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности*, если произвольный ее элемент сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим.

Если в определениях выше в качестве $\mathcal{C}$ взять класс всех конечных групп, мы получим хорошо известное понятие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности.

Стиб [1] установил, что в произвольном расширении свободной группы при помощи конечной группы все элементы бесконечного порядка сопряженно финитно отделимы. Используя этот результат, Дайер [2] доказала, что любое конечное расширение свободной группы финитно аппроксимируемо относительно сопряженности. Ивановой [3]–[5] получен аналог последнего утверждения для свойства аппроксимируемости классом всех конечных p -групп, где p – некоторое простое число. Ею установлено, что произвольное расширение свободной группы при помощи конечной p -группы аппроксимируется конечными p -группами относительно сопряженности.

Основной целью данной статьи служит доказательство следующего утверждения, обобщающего результаты Дайер и Ивановой.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный (т.е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) корневой класс групп, состоящий лишь из конечных групп. Тогда любое расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$ -группы аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ относительно сопряженности.

Напомним [6], что класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он удовлетворяет следующим условиям:

- 1) произвольная подгруппа $\mathcal{C}$ -группы также является $\mathcal{C}$ -группой;
- 2) прямое произведение любых двух $\mathcal{C}$ -групп принадлежит классу $\mathcal{C}$;
- 3) условие Грюнберга: для любой группы X и для любой субнормальной последовательности $Z \leq Y \leq X$ с факторами из класса $\mathcal{C}$ найдется нормальная подгруппа T группы X , лежащая в Z и такая, что $X/T \in \mathcal{C}$.

Легко видеть, что в этом определении второе условие следует из первого и третьего. Нетрудно показать также (см., например, [7]), что класс групп, содержащий лишь конечные группы, является корневым тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подгрупп и расширений. Конкретными примерами корневых классов конечных групп, кроме упоминавшихся выше классов всех конечных групп и всех конечных p -групп, могут служить классы всех конечных π -групп, где π – непустое множество простых чисел, и всех конечных разрешимых π -групп.

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный корневой класс конечных групп, G – обобщенное свободное произведение двух конечных групп или HNN-расширение конечной группы. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$ -аппроксимируема относительно сопряженности.

Действительно, если G есть обобщенное свободное произведение двух конечных групп A и B , то из $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G следует существование такой нормальной подгруппы N , что $G/N \in \mathcal{C}$ и $N \cap A = N \cap B = 1$ (см. предложение 1 ниже). По теореме Нейманн [8] подгруппа N является свободной, и потому группа G оказывается расширением свободной группы N при помощи $\mathcal{C}$ -группы G/N . Те же рассуждения подходят и в случае, когда G – HNN-расширение конечной группы, необходимо лишь воспользоваться соответствующим результатом из статьи [9] вместо теоремы Нейманн.

На самом деле, условия конечности свободных множителей и базовой группы из следствия 1 можно ослабить, потребовав лишь конечности, соответственно, объединенной или связанных подгрупп. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{C}$ – произвольный нетривиальный корневой класс конечных групп, G – свободное произведение двух $\mathcal{C}$ -аппроксимируемых относительно сопряженности групп с конечной объединенной подгруппой или HNN-расширение $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой относительно сопряженности группы с конечными связанными подгруппами. Если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то она $\mathcal{C}$ -аппроксимируема относительно сопряженности.

Поскольку обычное свободное произведение двух групп можно рассматривать как обобщенное с тривиальной объединенной подгруппой, из теоремы 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Свободное произведение двух групп, аппроксимируемых относительно сопряженности некоторым нетривиальным корневым классом конечных групп, само аппроксимируется относительно сопряженности этим классом.*

Отметим, что в случае, когда $\mathcal{C}$ совпадает с классом всех конечных групп, утверждения, доставляемые теоремой 2 и следствием 2, известны и доказаны в работах [10] и [1], соответственно.

2. Некоторые вспомогательные утверждения. Всюду далее мы будем предполагать, что $\mathcal{C}$ – нетривиальный корневой класс конечных групп. Если G – некоторая группа, то через $\mathcal{C}^*(G)$ будем обозначать семейство всех таких нормальных подгрупп группы G , фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть G – произвольная группа. Тогда*

- 1) *пересечение конечного числа подгрупп из семейства $\mathcal{C}^*(G)$ снова принадлежит этому семейству;*
- 2) *если группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема и $M \subseteq G \setminus \{1\}$ – конечное подмножество, то существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $N \cap M = \emptyset$;*
- 3) *если $K \leq H \leq G$ и $K \in \mathcal{C}^*(G)$, то $K \in \mathcal{C}^*(H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проверки утверждения 1) достаточно заметить, что если $H_1, H_2, \dots, H_n \in \mathcal{C}^*(G)$, то согласно теореме Ремака фактор-группа

$$G/(H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n)$$

вкладывается в прямое произведение фактор-групп $G/H_1, G/H_2, \dots, G/H_n \in \mathcal{C}$ и, следовательно, принадлежит $\mathcal{C}$ в силу свойств 1) и 2) из определения корневого класса.

Утверждение 2) следует из утверждения 1), а утверждение 3) – из наследственности класса $\mathcal{C}$. $\square$

Приводимые ниже предложения 2 и 5 являются аналогами леммы 1 и теоремы 2 из работы [1], причем в отдельных местах их доказательства повторяют используемые в данной работе рассуждения почти дословно. Всюду далее, если H – подгруппа некоторой группы G и $g_1, g_2 \in G$, то запись $g_1 \sim_H g_2$ означает, что элементы g_1 и g_2 сопряжены при помощи элемента из подгруппы H .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть H – подгруппа некоторой группы G , и пусть существует подгруппа $F \in \mathcal{C}^*(G)$, лежащая в H . Если элемент $h \in H$ сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в H , то он сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим и во всей группе G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $h \in H$ сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в H , и пусть $g \in G$ – произвольный элемент, не сопряженный с h . Пусть также A – полная система представителей левых смежных классов группы G по подгруппе H и

$$B = \{a \in A \mid a^{-1}ga \in H\}.$$

Поскольку класс $\mathcal{C}$ состоит лишь из конечных групп, подгруппы F и H имеют конечный индекс в группе G и, следовательно, множества A и B конечны.

Так как элемент h не сопряжен с g , он не сопряжен ни с одним элементом вида $b^{-1}gb$, где $b \in B$. Поэтому, пользуясь сопряженной $\mathcal{C}$ -отделимостью элемента h

в группе H , для каждого элемента $b \in B$ можно найти подгруппу $M_b \in \mathcal{C}^*(H)$ такую, что $h \approx_H b^{-1}gb \pmod{M_b}$.

Пусть $M = (\bigcap_{b \in B} M_b) \cap F$. Так как множество B конечно и $F \in \mathcal{C}^*(G)$, то по предложению 1 $F \in \mathcal{C}^*(H)$, $M \in \mathcal{C}^*(H)$ и $M \in \mathcal{C}^*(F)$. Получаем субнормальную последовательность $M \leq F \leq G$ с факторами из класса $\mathcal{C}$. Поскольку этот класс является корневым, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G)$, лежащая в M .

Предположим, что $c^{-1}gc \equiv h \pmod{N}$ для некоторого элемента $c \in G$. Записывая c в виде $c = ad$ для подходящих элементов $a \in A$ и $d \in H$, получаем сравнение $a^{-1}ga \equiv dhda^{-1} \pmod{N}$, из которого следует, что $a^{-1}ga \in H$ и $a \in B$. Но тогда $N \leq M_a$ и $h \sim_H a^{-1}ga \pmod{M_a}$, что невозможно в силу выбора подгруппы M_a .

Таким образом, $g \approx_G h \pmod{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Произвольная свободная группа $\mathcal{C}$ -аппроксимируема относительно сопряженности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, поскольку класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну неединичную конечную группу и является наследственным, он включает некоторую циклическую группу простого порядка, который мы обозначим через p . Тогда все конечные p -группы также входят в класс $\mathcal{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия расширений. Остается лишь заметить, что свободные группы аппроксимируются конечными p -группами относительно сопряженности (см., например, [11; гл. 1, предложение 4.8]).

Справедливость следующего утверждения устанавливается в ходе доказательства теоремы 2 из [1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть F – свободная нормальная подгруппа конечного индекса некоторой группы G , g – элемент бесконечного порядка группы G , n – порядок элемента g по модулю подгруппы F и h – произвольный элемент из подгруппы H , порожденной g и F . Если $g \equiv h \pmod{F}$ и $g^n \sim_H h^n$, то $g \sim_H h$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть группа G представляет собой расширение свободной группы при помощи $\mathcal{C}$ -группы. Тогда произвольный элемент бесконечного порядка группы G сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – свободная нормальная подгруппа группы G и $G/F \in \mathcal{C}$. Пусть также $g \in G$ – произвольный элемент бесконечного порядка группы G и H – подгруппа группы G , порожденная g и F . Покажем, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в G .

Так как $g \in H$ и подгруппа H содержит подгруппу $F \in \mathcal{C}^*(G)$, то в силу предложения 2 достаточно показать, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в H .

Пусть $h \in H$ – произвольный элемент, не сопряженный с g в группе H . Если элементы g и h не сравнимы по модулю F , то гомоморфизм на фактор-группу H/F является искомым. Пусть $g \equiv h \pmod{F}$ и n – порядок элемента g по модулю подгруппы F . Тогда по предложению 4 $g^n \sim_H h^n$.

Поскольку F – свободная группа, ее элемент g^n сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в F согласно предложению 3. Так как $F \in \mathcal{C}^*(H)$, по предложению 2 элемент g^n сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим и в подгруппе H . Следовательно, найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(H)$ такая, что $g^n \approx_H h^n \pmod{N}$. Но тогда, очевидно, $g \approx_H h \pmod{N}$.

Далее через C_n будем обозначать циклическую группу порядка n .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть число $n \geq 2$ таково, что $C_n \in \mathcal{C}$. Пусть также $r, s_1, s_2, \dots, s_k, k \geq 0$, — делители числа n , большие 1, и

$$G(r, s_1, s_2, \dots, s_k) = \langle x, y, t_1, t_2, \dots, t_k; x^n = y^n = 1, x^r = y^r, t_i x^{s_i} t_i^{-1} = y^{s_i}, 1 \leq i \leq k \rangle.$$

Тогда существует гомоморфизм группы $G(r, s_1, s_2, \dots, s_k)$ на $\mathcal{C}$ -группу, переводящий x и y в несопряженные элементы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будем вести индукцией по k .

Если $k = 0$, то $G(r) = \langle x, y; x^n = y^n = 1, x^r = y^r \rangle$. Так как $r|n$, то $C_r \leq C_n$, откуда $C_r \in \mathcal{C}$ и $C_r \times C_r \in \mathcal{C}$ в силу определения корневого класса. Следовательно, искомым будет гомоморфизм группы $G(r)$ на группу $P = \langle x, y; x^r = y^r = 1, [x, y] = 1 \rangle$, изоморфную $C_r \times C_r$.

Пусть теперь $k \geq 1$,

$$G_1 = \langle x, y, t_1, t_2, \dots, t_k; x^n = y^n = 1, x^r = y^r, t_i x^{s_i} t_i^{-1} = y^{s_i}, 1 \leq i \leq k, t_k^n = 1 \rangle$$

и H — нормальное замыкание в группе G_1 множества элементов $\{x, y, t_1, \dots, t_{k-1}\}$. Тогда $G_1/H \cong C_n$, т.е. $H \in \mathcal{C}^*(G_1)$.

Множество $\{1, t_k, t_k^2, \dots, t_k^{n-1}\}$ является шрайеровской системой представителей смежных классов группы G_1 по подгруппе H . Поэтому подгруппа H порождается элементами

$$x_j = t_k^j x t_k^{-j}, \quad y_j = t_k^j y t_k^{-j}, \quad t_{ij} = t_k^j t_i t_k^{-j}, \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

и определяется в этих порождающих соотношениями

$$x_j^n = y_j^n = 1, \quad x_j^r = y_j^r, \quad t_{ij} x_j^{s_i} t_{ij}^{-1} = y_j^{s_i}, \quad x_{(j+1) \bmod n}^{s_k} = y_j^{s_k}, \\ 1 \leq i \leq k-1, \quad 0 \leq j \leq n-1.$$

Покажем, что для каждого $j \in \{0, \dots, n-1\}$ существует гомоморфизм группы H на $\mathcal{C}$ -группу, переводящий элементы x_0 и y_j в несопряженные.

Если $j = 0$, рассмотрим отображение α образующих группы H в группу $G(r, s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$, определенное по правилу

$$x_0, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} \mapsto x, \quad y_0, x_1 \mapsto y, \\ t_{i0} \mapsto t_i, \quad t_{i1} \mapsto t_i^{-1}, \quad t_{ij} \mapsto 1 \quad 1 \leq i \leq k-1, \quad 2 \leq j \leq n-1,$$

и естественным образом продолжаемое до отображения слов. Непосредственно проверяется, что отображение α переводит все определяющие соотношения группы H в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \dots, s_{k-1})$, и, следовательно, является гомоморфизмом. Так как $x_0 \alpha = x$ и $y_0 \alpha = y$, то гомоморфизм α может быть продолжен до искомого в силу индуктивного предположения.

Если $1 \leq j \leq n-1$, то точно так же до искомого гомоморфизма продолжается отображение β порождающих группы H в группу

$$G(s_k) = \langle x, y; x^n = y^n = 1, x^{s_k} = y^{s_k} \rangle,$$

определенное по правилу

$$\begin{aligned} x_0, y_0 &\mapsto x, & x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{n-1}, y_{n-1} &\mapsto y, \\ t_{ij} &\mapsto 1, & 1 \leq i \leq k-1, \quad 0 \leq j \leq n-1, \end{aligned}$$

и переводящее x_0 в x , y_j в y .

Таким образом, для каждого $j \in \{0, \dots, n-1\}$ существует подгруппа $M_j \in \mathcal{C}^*(H)$ такая, что $x_0 \approx_H y_j \pmod{M_j}$. Положим $M = \bigcap_{j=0}^{n-1} M_j$. Тогда $M \leq H \leq G_1$ – субнормальная последовательность с факторами из класса $\mathcal{C}$. Так как этот класс является корневым, то найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(G_1)$, лежащая в M .

Предположим, что $g^{-1}xg \equiv y \pmod{N}$ для некоторого элемента $g \in G_1$. Тогда, записывая g в виде $g = ht_k^j$ для подходящих числа $j \in \{0, \dots, n-1\}$ и элемента $h \in H$, получаем сравнение

$$h^{-1}x_0h = h^{-1}xh \equiv t_k^j y t_k^{-j} = y_j \pmod{N},$$

из которого следует, что $x_0 \sim_H y_j \pmod{M_j}$ в противоречие с выбором подгруппы M_j .

Таким образом, $x \approx_{G_1} y \pmod{N}$, и композиция естественных гомоморфизмов группы G на G_1 и группы G_1 на G_1/N является искомой.

3. Графы групп. Прежде всего, напомним определение и некоторые свойства фундаментальной группы графа групп.

Пусть Γ – неориентированный связный граф с множеством вершин V и семейством ребер E (допускаются петли и пары вершин, соединенные более, чем одним ребром). Пусть также каждой вершине $v \in V$ сопоставлена группа G_v , а каждому ребру $e \in E$ – группа G_e и вложения $\varphi_{e,u}: G_e \rightarrow G_u$ и $\varphi_{e,v}: G_e \rightarrow G_v$, где u и v – вершины, соединяемые ребром e . Тогда Γ называется *графом групп*.

Зафиксируем некоторое максимальное дерево T в графе Γ . *Фундаментальной группой* $\pi_1(\Gamma)$ графа групп Γ называется группа, порождающими которой являются порождающие групп G_v , $v \in V$, и символы t_e , $e \in E \setminus T$, а определяющими соотношениями – определяющие соотношения групп G_v , $v \in V$, а также все соотношения вида

$$\begin{aligned} g\varphi_{e,u} &= g\varphi_{e,v}, & g \in G_e, \quad e \in T, \\ t_e g\varphi_{e,u} t_e^{-1} &= g\varphi_{e,v}, & g \in G_e, \quad e \in E \setminus T. \end{aligned}$$

Хорошо известно, что фундаментальная группа графа Γ не зависит от выбора дерева T и представляет собой HNN-расширение с проходными буквами t_e , $e \in E \setminus T$, древесного произведения групп G_v , $v \in V$. Отсюда следует, в частности, что все вершинные группы G_v вкладываются в $\pi_1(\Gamma)$.

Пусть далее $\{V_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ – такое разбиение множества вершин графа Γ на попарно непересекающиеся подмножества, что подграфы Γ_i , $i \in \mathcal{I}$, порожденные множествами V_i , являются связными. Определим граф групп Γ^* следующим образом:

- вершинами графа Γ^* служат подграфы Γ_i , $i \in \mathcal{I}$, вершинными группами являются группы $\pi_1(\Gamma_i)$, $i \in \mathcal{I}$;
- каждому ребру e графа Γ , связывающему некоторую вершину u подграфа Γ_i с некоторой вершиной v подграфа Γ_j , $j \neq i$, сопоставляется ребро e^* графа Γ^* , связывающее вершины Γ_i и Γ_j ; ребру e^* соответствуют группа G_e и вложения

$$\varphi_{e^*,i} = \varphi_{e,u} \circ \psi_i, \quad \varphi_{e^*,j} = \varphi_{e,v} \circ \psi_j,$$

где $\psi_i: G_u \rightarrow \pi_1(\Gamma_i)$, $\psi_j: G_v \rightarrow \pi_1(\Gamma_j)$ – вложения вершинных групп G_u и G_v в фундаментальные группы соответствующих подграфов.

Нетрудно показать, что максимальные деревья в графах Γ и Γ^* можно выбрать так, что группы $\pi_1(\Gamma)$ и $\pi_1(\Gamma^*)$ будут иметь одинаковые представления. Поэтому имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7 [2]. *Фундаментальная группа построенного выше графа Γ^* изоморфна фундаментальной группе графа Γ .*

Зафиксируем теперь в каждой вершинной группе G_v графа Γ нормальную подгруппу N_v , в каждой реберной группе G_e нормальную подгруппу N_e и предположим, что для любого ребра e графа Γ выполняются соотношения

$$N_u \cap G_e \varphi_{e,u} = N_e \varphi_{e,u}, \quad N_v \cap G_e \varphi_{e,v} = N_e \varphi_{e,v},$$

где u и v – вершины, связываемые ребром e . Тогда отображения

$$\bar{\varphi}_{e,u}: G_e/N_e \rightarrow G_u/N_u, \quad \bar{\varphi}_{e,v}: G_e/N_e \rightarrow G_v/N_v,$$

заданные правилами

$$(xN_e)\bar{\varphi}_{e,u} = (x\varphi_{e,u})N_u, \quad (xN_e)\bar{\varphi}_{e,v} = (x\varphi_{e,v})N_v,$$

корректно определены и являются изоморфными вложениями. Поэтому мы можем рассмотреть граф групп $\bar{\Gamma}$ с теми же множеством вершин V и семейством ребер E , что и у графа Γ , вершинам которого сопоставляются группы $\bar{G}_v = G_v/N_v$, $v \in V$, а ребрам – группы $\bar{G}_e = G_e/N_e$ и вложения $\bar{\varphi}_{e,v}$, $e \in E$, $v \in e$.

Зафиксируем в графах Γ и $\bar{\Gamma}$ одно и то же максимальное дерево T и соответствующие ему представления групп $\pi_1(\Gamma)$ и $\pi_1(\bar{\Gamma})$. Тогда можно определить отображение $\rho: \pi_1(\Gamma) \rightarrow \pi_1(\bar{\Gamma})$, продолжающее естественные гомоморфизмы групп G_v на $\bar{G}_v$, $v \in V$, и ставящее в соответствие порождающим символам t_e , $e \in E \setminus T$, группы $\pi_1(\Gamma)$ такие же символы группы $\pi_1(\bar{\Gamma})$. Легко видеть, что это отображение переводит все определяющие соотношения группы $\pi_1(\Gamma)$ в равенства, верные в группе $\pi_1(\bar{\Gamma})$, и потому является сюръективным гомоморфизмом. Используя преобразования Тице, нетрудно показать также, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе $\pi_1(\Gamma)$ объединения подгрупп N_v , $v \in V$.

Из определения графа групп $\bar{\Gamma}$ и гомоморфизма ρ следует, что группа $\pi_1(\bar{\Gamma})$ представляет собой HNN-расширение с тем же числом проходных букв, что и у группы $\pi_1(\Gamma)$, а базовая группа этого расширения является древесным произведением, свободными множителями которого служат группы $G_v \rho$, $v \in V$. Очевидно также, что объединяемые и связанные подгруппы группы $\pi_1(\bar{\Gamma})$ оказываются образами относительно ρ соответствующих объединяемых и связанных подгрупп группы $\pi_1(\Gamma)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть Γ – граф групп с конечным числом вершин и ребер, все реберные группы графа Γ конечны и его фундаментальная группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимироваема. Пусть также для каждого $v \in V$ зафиксирована подгруппа $N_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$. Тогда найдется такая подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(G)$, что для всякого $v \in V$ имеет место соотношение $T \cap G_v \leq N_v$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как группа G $\mathcal{C}$ -аппроксимируема, то по предложению 1 найдется подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(G)$, тривиально пересекающаяся с конечным множеством элементов $\bigcup_{e \in E, v \in e} G_e \varphi_{e,v} \subseteq G$. Для каждого $v \in V$ положим $M_v = R \cap N_v$.

Поскольку подгруппы M_v , $v \in V$, в силу выбора подгруппы R тривиально пересекаются с образами относительно вложений $\varphi_{e,v}$ всех реберных групп, мы можем рассмотреть граф групп $\bar{\Gamma}$, вершинам которого соответствуют группы $\bar{G}_v = G_v/M_v$, а ребрам – группы $\bar{G}_e = G_e$ и вложения $\bar{\varphi}_{e,v}$, определенные выше. Обозначим через $\bar{G}$ фундаментальную группу этого графа и через ρ гомоморфизм группы G на группу $\bar{G}$, продолжающий естественные гомоморфизмы групп G_v , $v \in V$, на фактор-группы G_v/M_v .

Пусть $\bar{R} = R\rho$ и для каждого $v \in V$ $\bar{L}_v = \bar{R} \cap \bar{G}_v$. Так как ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе G подгрупп M_v , $v \in V$, то оно содержится в R . С учетом этого из равенств

$$R \cap G_e \varphi_{e,v} = 1, \quad \bar{G}_e \bar{\varphi}_{e,v} = (G_e \varphi_{e,v})M_v/M_v = (G_e \varphi_{e,v})\rho, \quad e \in E, \quad v \in e,$$

вытекают соотношения $\bar{R} \cap \bar{G}_e \bar{\varphi}_{e,v} = 1$. Так как графы Γ и $\bar{\Gamma}$ имеют конечное число вершин и ребер, то группа $\bar{G}$ представляет собой HNN-расширение с конечным числом проходных букв древесного произведения, имеющего конечное число свободных множителей. Используя результаты работ [9], [12] и очевидную индукцию, мы получаем отсюда, что подгруппа $\bar{R}$ раскладывается в свободное произведение некоторой свободной подгруппы F и подгрупп, сопряженных с $\bar{L}_v$, $v \in V$.

Очевидно, что существует гомоморфизм σ группы $\bar{R}$ на прямое произведение P групп $\bar{L}_v$, $v \in V$, действующий инъективно на всех сомножителях, кроме F , и переводящий элементы подгруппы F в 1. Обозначим ядро этого гомоморфизма через $\bar{S}$.

Поскольку $R \in \mathcal{C}^*(G)$, для всякого $v \in V$ имеет место включение $R \cap G_v \in \mathcal{C}^*(G_v)$. Отсюда вытекает, что

$$M_v = N_v \cap (R \cap G_v) \in \mathcal{C}^*(G_v), \quad G_v/M_v \in \mathcal{C}, \quad \bar{L}_v \in \mathcal{C},$$

так как $\bar{L}_v \leq G_v/M_v$. Следовательно, группа P представляет собой прямое произведение $\mathcal{C}$ -групп, число сомножителей в котором конечно ввиду конечности множества V . Поэтому в силу определения корневого класса $P \in \mathcal{C}$ и $\bar{S} \in \mathcal{C}^*(\bar{R})$.

Так как $\ker \rho \leq R$, то $\bar{G}/\bar{R} \cong G/R$. Следовательно, $\bar{R} \in \mathcal{C}^*(\bar{G})$, и мы получаем субнормальную последовательность $\bar{S} \leq \bar{R} \leq \bar{G}$ с факторами из класса $\mathcal{C}$. Поскольку данный класс является корневым, найдется подгруппа $\bar{T} \in \mathcal{C}^*(\bar{G})$, лежащая в $\bar{S}$.

Пусть T – прообраз подгруппы $\bar{T}$ относительно гомоморфизма ρ . В силу определения гомоморфизма σ для каждого $v \in V$ имеют место соотношения

$$\bar{S} \cap \bar{G}_v = \bar{S} \cap (\bar{R} \cap \bar{G}_v) = \bar{S} \cap \bar{L}_v = 1.$$

Поскольку $\bar{T} \leq \bar{S}$, отсюда следует, что $\bar{T} \cap \bar{G}_v = 1$ и потому $T \cap G_v = M_v$. Таким образом, подгруппа T является искомой.

4. Доказательство теоремы 1. Рассуждения, приводимые в данном параграфе, в целом следуют той же схеме, что и в работе [2].

Пусть F – свободная нормальная подгруппа некоторой группы G и $G/F \in \mathcal{C}$. Пусть также $g \in G$ – произвольный элемент. Покажем, что он сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в группе G .

В силу предложения 5 можно считать, что элемент g имеет конечный порядок n . Подгруппа H , порожденная подгруппой F и этим элементом, содержит подгруппу $F \in \mathcal{C}^*(G)$. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать, что элемент g сопряженно $\mathcal{C}$ -отделим в группе H .

Пусть h – произвольный элемент группы H , не сопряженный с g . Если h имеет бесконечный порядок, то существование искомого гомоморфизма следует из предложения 5. Поэтому далее можно считать, что порядок элемента h конечен.

Фактор-группа H/F абелева. Поэтому, если $g \not\equiv h \pmod{F}$, то искомым будет гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F , и далее мы можем считать, что $g \equiv h \pmod{F}$. Поскольку подгруппа F без кручения, из последнего сравнения следует, что элементы g и h имеют одинаковый порядок $n \geq 2$.

Будучи конечным расширением свободной группы, подгруппа H представляет собой фундаментальную группу некоторого графа групп Γ , все вершинные группы которого конечны и потому тривиально пересекаются со свободной подгруппой F [13]. Следовательно, гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F , изоморфную циклической группе C_n , инъективен на вершинных группах, и все они являются подгруппами группы C_n .

Поскольку группа $\pi_1(\Gamma)$ представляет собой HNN-расширение древесного произведения вершинных групп, любой ее элемент конечного порядка сопряжен с некоторым элементом какой-либо вершинной группы. Поэтому, заменяя при необходимости элементы g и h сопряженными, можно считать далее, что они принадлежат вершинным группам графа Γ . Обозначим соответствующие вершины через u и v , соответственно. Заметим, что $u \neq v$ (в противном случае $g = h^k$ для некоторого целого k и, следовательно, $h \equiv g \equiv h^k \pmod{F}$, откуда $k \equiv 1 \pmod{n}$ и $g = h$, что невозможно).

Пусть граф Γ' получается из графа Γ удалением всех ребер, группы которых отличны от C_n . Очевидно, что если V_0 – множество вершин некоторой компоненты связности графа Γ' , то подграф, порожденный в графе Γ множеством V_0 , является связным. Поэтому мы можем рассмотреть граф Γ^* , определяемый разбиением множества V на подмножества, соответствующие компонентам связности графа Γ' .

Понятно, что все реберные группы графа Γ^* отличны от C_n . Заметим также, что вершины u и v принадлежат разным компонентам связности графа Γ' , а потому элементы g и h содержатся в разных вершинных группах графа Γ^* .

Действительно, если u и v принадлежат одной компоненте связности графа Γ' , то вершинные группы графа Γ , соответствующие u и v , сопряжены в группе $H = \pi_1(\Gamma)$, и потому $g \sim_H h^k$ для некоторого целого k . Тогда снова $g \equiv h^k \pmod{F}$ и $k \equiv 1 \pmod{n}$, откуда $g \sim_H h$, что невозможно.

Пусть далее T – некоторое максимальное дерево в графе Γ^* , u^* и v^* – вершины графа Γ^* , группам которых принадлежат элементы g и h , и пусть граф T' получается из T удалением некоторого ребра, лежащего на пути, соединяющем вершины u^* и v^* . Тогда граф T' имеет в точности две компоненты связности. Обозначим через V_1 и V_2 множества вершин этих компонент так, чтобы вершина u^* принадлежала V_1 , а вершина v^* – соответственно V_2 .

Граф Γ^{**} , определяемый множествами V_1 и V_2 , имеет две вершины, и все его реберные группы отличны от C_n . Согласно предложению 7 $\pi_1(\Gamma^{**}) \cong \pi_1(\Gamma^*) \cong H$,

и далее мы будем считать, что $H = \pi_1(\Gamma^{**})$. Заметим также, что элементы g и h по-прежнему принадлежат разным вершинным группам.

Обозначим вершинные группы графа Γ^{**} через A , B и положим $M = A \cap F$, $N = B \cap F$, $\bar{A} = A/M$, $\bar{B} = B/N$. Тогда

$$\bar{A} \cong AF/F \leq H/F \cong C_n, \quad \bar{B} \cong BF/F \leq H/F \cong C_n.$$

Так как подгруппа F свободна, она тривиально пересекается со всеми конечными подгруппами графа Γ^{**} . Поэтому образы элементов g и h относительно естественных гомоморфизмов $\delta: A \rightarrow \bar{A}$ и $\varepsilon: B \rightarrow \bar{B}$, соответственно, по-прежнему имеют порядок n и, следовательно, $\bar{A} \cong \bar{B} \cong C_n$. Кроме того, подгруппы M , N тривиально пересекаются с образами всех реберных групп графа Γ^{**} , и это дает нам возможность рассмотреть граф групп $\bar{\Gamma}^{**}$, вершинам которого соответствуют группы $\bar{A}$ и $\bar{B}$, и гомоморфизм $\rho: H \rightarrow \pi_1(\bar{\Gamma}^{**})$, продолжающий естественные гомоморфизмы δ и ε .

Выберем элементы $x = g\rho$, $y = h\rho$ в качестве порождающих групп $\bar{A}$, $\bar{B}$. Тогда для подходящих чисел $r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \mathcal{J}$, группа $\bar{H} = \pi_1(\bar{\Gamma}^{**})$ имеет представление

$$\bar{H} = \langle x, y, t_j; x^n = y^n = 1, x^{r_1} = y^{r_2}, t_j x^{s_{j1}} t_j^{-1} = y^{s_{j2}} (j \in \mathcal{J}) \rangle.$$

Положим $\bar{F} = F\rho$ и обозначим через θ естественный гомоморфизм группы H на фактор-группу H/F .

В предыдущем пункте было отмечено, что ядро гомоморфизма ρ совпадает с нормальным замыканием в группе H множества $M \cup N$ и потому содержится в F . Следовательно, $\bar{H}/\bar{F} \cong H/F$ и существует гомоморфизм $\sigma: \bar{H} \rightarrow H/F$, удовлетворяющий условию $\rho \circ \sigma = \theta$. Имеем

$$x\sigma = g\rho\sigma = g\theta = h\theta = h\rho\sigma = y\sigma$$

и, так как $g\theta = h\theta$ – элемент порядка n , то $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$ и $s_{j1} \equiv s_{j2} \pmod{n}$ для всех $j \in \mathcal{J}$. Но $r_1, r_2, s_{j1}, s_{j2} \in \{1, 2, \dots, n\}$; следовательно, $r_1 = r_2$, $s_{j1} = s_{j2}$, $j \in \mathcal{J}$.

Очевидно, что числа r_1 , r_2 , s_{j1} , s_{j2} , $j \in \mathcal{J}$, можно считать делителями числа n . Заметим также, что все реберные группы графа Γ^{**} были отличны от C_n , а реберные группы графа $\bar{\Gamma}^{**}$ изоморфны им. Поэтому каждое из чисел r_1 , r_2 , s_{j1} , s_{j2} , $j \in \mathcal{J}$, больше 1.

Понятно, что среди чисел s_{j1} , $j \in \mathcal{J}$, лишь конечное число различных. Обозначим их через $s_1, s_2, \dots, s_k$, положим $r = r_1 = r_2$ и рассмотрим отображение λ порождающих группы $\bar{H}$ в группу

$$G(r, s_1, s_2, \dots, s_k) \\ = \langle \chi, \gamma, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k; \chi^n = \gamma^n = 1, \chi^r = \gamma^r, \tau_i \chi^{s_i} \tau_i^{-1} = \gamma^{s_i}, 1 \leq i \leq k \rangle,$$

определяемое по правилу

$$x \mapsto \chi, \quad y \mapsto \gamma, \quad t_j \mapsto \tau_{i_j}, \quad j \in \mathcal{J},$$

где $i_j \in \{1, 2, \dots, k\}$ – такое число, что $s_{j1} = s_{j2} = s_{i_j}$.

Продолжая λ естественным образом до отображения слов, мы видим, что все определяющие соотношения группы $\bar{H}$ под его действием переходят в равенства, верные в группе $G(r, s_1, s_2, \dots, s_k)$. Поэтому λ – гомоморфизм и, так как $x\lambda = \chi$, $y\lambda = \gamma$, согласно предложению 6 гомоморфизм $\rho \circ \lambda$ можно продолжить до искомого.

5. Доказательство теоремы 2. Пусть Γ – граф групп с конечным числом вершин и ребер, и пусть $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$. Положим для каждого $v \in V$ $N_v = R \cap G_v$.

Тогда для любого ребра e имеют место соотношения

$$(N_u \cap G_e \varphi_{e,u}) \varphi_{e,u}^{-1} = (R \cap G_e \varphi_{e,u}) \varphi_{e,u}^{-1} = (R \cap G_e \varphi_{e,v}) \varphi_{e,v}^{-1} = (N_v \cap G_e \varphi_{e,v}) \varphi_{e,v}^{-1},$$

где, как обычно, u и v – вершины, связываемые ребром e . Поэтому, полагая

$$N_e = (N_u \cap G_e \varphi_{e,u}) \varphi_{e,u}^{-1} = (N_v \cap G_e \varphi_{e,v}) \varphi_{e,v}^{-1},$$

мы можем построить граф групп Γ_R и гомоморфизм $\rho_R: \pi_1(\Gamma) \rightarrow \pi_1(\Gamma_R)$ так, как это было описано в п. 3.

Будучи нормальным замыканием подгрупп N_v , $v \in V$, ядро гомоморфизма ρ_R содержится в R . Поэтому из соотношений $N_v = R \cap G_v$ следует, что $R\rho_R \cap G_v\rho_R = 1$. Применяя, как и при доказательстве предложения 8, к группе $\pi_1(\Gamma_R)$ результаты работ [9] и [12], получаем отсюда, что подгруппа $R\rho_R$ является свободной. Стало быть, группа $\pi_1(\Gamma_R)$ представляет собой расширение свободной группы $R\rho_R$ при помощи группы $\pi_1(\Gamma_R)/R\rho_R \cong \pi_1(\Gamma)/R \in \mathcal{C}$.

Таким образом, какова бы ни была подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$, построенная по ней группа $\pi_1(\Gamma_R)$ оказывается $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой относительно сопряженности в силу теоремы 1. Это означает, что для доказательства $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости относительно сопряженности группы $\pi_1(\Gamma)$ нам достаточно уметь для любых двух несопряженных элементов $u, v \in \pi_1(\Gamma)$ находить такую подгруппу $R \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\Gamma))$, что образы этих элементов относительно определенного выше гомоморфизма ρ_R не являются сопряженными в группе $\pi_1(\Gamma_R)$.

Реализуем данную идею применительно к группе G из теоремы 2.

Пусть сначала данная группа представляет собой свободное произведение $\mathcal{C}$ -аппроксимируемых относительно сопряженности групп A и B с конечной объединенной подгруппой H , и пусть $u = u_1 u_2 \dots u_m$, $v = v_1 v_2 \dots v_n$ – два циклически несократимых элемента, несопряженных в группе G . Положим

$$X = H \cup \{u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_n\} \\ \cup \{h^{-1} u_i u_{i+1} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1} h \mid h \in H, 1 \leq i \leq m\} \cup \{v\}.$$

Поскольку подгруппа H конечна, множество X также является конечным. Поэтому согласно предложению 1, пользуясь $\mathcal{C}$ -аппроксимируемостью группы G , мы можем найти подгруппу $R \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющую условию

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies xR \neq yR.$$

Как было отмечено в п. 3, группа $G\rho_R$ представляет собой свободное произведение своих подгрупп $A\rho_R$ и $B\rho_R$ с объединенной подгруппой $H\rho_R$. Заметим, что если $m > 1$, то для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ $u_i \notin H$. Так как $u_i \in X$ и $H \subseteq X$, то в силу выбора подгруппы R получаем отсюда, что $u_i R \notin H R$. Из включения $\ker \rho_R \leq R$ теперь следует, что $u_i \rho_R \notin H \rho_R$. Поэтому элемент $u \rho_R$ по-прежнему будет иметь в группе $G\rho_R$ циклически несократимую запись длины m .

Точно так же элемент $v \rho_R$ имеет в группе $G\rho_R$ циклически несократимую запись длины n . Следовательно, если $m \neq n$, то $u \rho_R$ и $v \rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$ и подгруппа R является искомой.

Пусть далее $m = n$. Пользуясь $\mathcal{C}$ -аппроксимируемостью групп A и B относительно сопряженности, найдем подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(A)$ и $N \in \mathcal{C}^*(B)$, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \forall x, y \in X \cap A \quad x \sim_A y &\implies xM \sim_{A/M} yM, \\ \forall x, y \in X \cap B \quad x \sim_B y &\implies xN \sim_{B/N} yN. \end{aligned}$$

Согласно предложению 8 существует подгруппа $T \in \mathcal{C}^*(G)$ такая, что $T \cap A \leq M$ и $T \cap B \leq N$. Тогда $T \cap R \in \mathcal{C}^*(G)$ и, следовательно, подгруппу R с самого начала можно было выбрать так, чтобы выполнялись соотношения $R \cap A \leq M$ и $R \cap B \leq N$.

Заметим, что гомоморфизм ρ_R продолжает естественный гомоморфизм группы A на фактор-группу $A/(R \cap A)$ и $R \cap A \leq M$. Поэтому для любых двух элементов $x, y \in X \cap A$ из соотношения $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$ следует, что $xM \sim_{A/M} yM$ и, в силу выбора подгруппы M , $x \sim_A y$. Аналогичные рассуждения справедливы и для элементов множества $X \cap B$.

Предположим теперь, что элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ сопряжены в группе $G\rho_R$. Вспоминая, что группа $G\rho_R$ представляет собой свободное произведение своих подгрупп $A\rho_R$ и $B\rho_R$ с объединенной подгруппой $H\rho_R$, и применяя к этой группе теорему о сопряженности для обобщенных свободных произведений (см., например, [14; теорема 4.6]), мы заключаем, что возможны два случая:

- 1) $m = n = 1$, и существуют элементы $h_1, h_2, \dots, h_l \in H$, $l \geq 0$, такие, что в последовательности $u\rho_R, h_1\rho_R, h_2\rho_R, \dots, h_l\rho_R, v\rho_R$ соседние элементы сопряжены в $A\rho_R$ или в $B\rho_R$;
- 2) $m = n > 1$, и для некоторого элемента $h \in H$ и числа $i \in \{1, \dots, m\}$ имеет место равенство

$$v\rho_R = (h\rho_R)^{-1}u_i\rho_R u_{i+1}\rho_R \dots u_m\rho_R u_1\rho_R \dots u_{i-1}\rho_R h\rho_R.$$

Заметим, что $u, h_1, h_2, \dots, h_l, v \in X$. Поэтому в первом случае ввиду отмеченных выше свойств элементов из множеств $X \cap A$ и $X \cap B$ сопряженными в группе G оказываются соседние элементы последовательности $u, h_1, h_2, \dots, h_l, v$, что противоречит несопряженности элементов u и v .

Во втором случае из соотношения $v\rho_R = u^*\rho_R$, где

$$u^* = h^{-1}u_i u_{i+1} \dots u_m u_1 \dots u_{i-1} h,$$

следует, что $v \equiv u^* \pmod{R}$ и, так как $u^* \in X$, то в силу выбора подгруппы R $v = u^*$. Поскольку элемент u^* сопряжен с u , последнее равенство также противоречит несопряженности элементов u и v .

Таким образом, элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$, и подгруппа R является искомой.

Аналогичным образом рассматривается случай, когда группа G является HNN-расширением $\mathcal{C}$ -аппроксимируемой относительно сопряженности группы A с подгруппами H и K , связанными при помощи изоморфизма φ , и проходной буквой t .

Пусть u и v – два циклически приведенных элемента, несопряженных в группе G , и пусть

$$u = u_1 t^{\delta_1} u_2 t^{\delta_2} \dots u_m t^{\delta_m} u_{m+1}, \quad v = v_1 t^{\varepsilon_1} v_2 t^{\varepsilon_2} \dots v_n t^{\varepsilon_n} v_{n+1}$$

– их циклически приведенные записи, причем $u_{m+1} = 1$, если $m > 0$, и $v_{n+1} = 1$, если $n > 0$. Определим множество X элементов группы G , включив в него все элементы

объединения

$$H \cup K \cup \{v, u_1, u_2, \dots, u_{m+1}, v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\},$$

а также всевозможные элементы вида $w^{-1}u^*w$, где u^* – некоторая циклическая перестановка элемента u , $w \in H \cup K$.

Поскольку подгруппы H и K конечны, множество X также является конечным и ввиду $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы G существует подгруппа $R \in \mathcal{C}^*(G)$, удовлетворяющая условию

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies xR \neq yR.$$

Согласно общим рассуждениям из п. 3 группа $G\rho_R$ представляет собой HNN-расширение группы $A\rho_R$ со связанными подгруппами $H\rho_R$, $K\rho_R$ и проходной буквой $t\rho_R$. В силу выбора подгруппы R , включения $\ker \rho_R \leq R$ и определения множества X из соотношения $u_i \notin H$ ($v_j \notin H$) следует, что $u_i\rho_R \notin H\rho_R$ (соответственно, $v_j\rho_R \notin H\rho_R$), а из соотношения $u_i \notin K$ ($v_j \notin K$) – что $u_i\rho_R \notin K\rho_R$ (соответственно, $v_j\rho_R \notin K\rho_R$). Поэтому элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ имеют в группе $G\rho_R$ циклически приведенные записи длин m и n , соответственно, и, стало быть, если $m \neq n$, то указанные элементы не сопряжены в группе $G\rho_R$ и подгруппа R оказывается искомой.

Далее будем предполагать, что $m = n$. В силу $\mathcal{C}$ -аппроксимируемости группы A относительно сопряженности существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(A)$, удовлетворяющая условию

$$\forall x, y \in X \cap A \quad x \sim_A y \implies xN \sim_{A/N} yN.$$

Ввиду предложения 8 можно считать, что $R \cap A \leq N$. Тогда, рассуждая как и в предыдущем случае, мы получаем, что для любых элементов $x, y \in X \cap A$ из соотношения $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$ следует, что $x \sim_A y$.

Согласно лемме Коллинза (см., например, [11; гл. IV, теорема 2.5]), если элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ сопряжены в группе $G\rho_R$, то выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $m = n = 0$, и существуют элементы $h_1, h_2, \dots, h_l \in H \cup K$, $l \geq 0$, такие, что любые два соседних элемента последовательности $u\rho_R, h_1\rho_R, h_2\rho_R, \dots, h_l\rho_R, v\rho_R$ сопряжены при помощи элемента из множества $A\rho_R \cup \{t\rho_R, (t\rho_R)^{-1}\}$.
- 2) $m = n > 0$, и $v\rho_R = w^{-1}\rho_R u_R^* w\rho_R$ для подходящих элемента $w \in H \cup K$ и циклической перестановки u_R^* элемента $u\rho_R$.

Очевидно, что элемент u_R^* является образом некоторой циклической перестановки u^* элемента u относительно гомоморфизма ρ_R . Поэтому, если справедливо утверждение 2, то $v\rho_R = (w^{-1}u^*w)\rho_R$, и, так как $v, w^{-1}u^*w \in X$ и $v \neq w^{-1}u^*w$, мы получаем противоречие с выбором подгруппы R .

Пусть выполняется утверждение 1, и пусть $x\rho_R, y\rho_R$ – произвольные соседние элементы последовательности. Если $x\rho_R \sim_{A\rho_R} y\rho_R$, то в силу отмеченного выше мы получаем, что $x \sim_A y$. Если же

$$x\rho_R = (t\rho_R)^{-\varepsilon} y\rho_R (t\rho_R)^\varepsilon = (t^{-\varepsilon} y t^\varepsilon)\rho_R$$

для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, то $x, y, t^{-\varepsilon} y t^\varepsilon \in H \cup K$ и, так как согласно выбору подгруппы R гомоморфизм ρ_R инъективен на множестве X , то $x = t^{-\varepsilon} y t^\varepsilon$. Таким образом, в любом случае элементы x и y оказываются сопряженными в группе G , а это влечет за собой и сопряженность элементов u и v , противоречащую их выбору.

Из доказанного следует, что элементы $u\rho_R$ и $v\rho_R$ не сопряжены в группе $G\rho_R$, и потому подгруппа R является искомой.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. F. Stebe, “A residual property of certain groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **26** (1970), 37–42.
- [2] J. L. Dyer, “Separating conjugates in free-by-finite groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **20**:2 (1979), 215–221.
- [3] Е. А. Иванова, *О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Ивановский гос. ун-т, Иваново, 2004.
- [4] Е. А. Иванова, “Об аппроксимируемости относительно сопряженности конечными p -группами свободных произведений двух групп с объединенной подгруппой”, *Матем. заметки*, **76**:4 (2004), 502–509.
- [5] Е. А. Иванова, “Аппроксимируемость относительно сопряженности конечными p -группами свободных произведений двух групп”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Биология, Химия, Физика, Математика”*, 2005, № 3, 83–91.
- [6] K. W. Gruenberg, “Residual properties of infinite soluble groups”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **7** (1957), 29–62.
- [7] Д. В. Гольцов, Н. И. Яцкин, “Классы групп и подгрупповые топологии”, *Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. “Естественные, общественные науки”*, 2011, № 2, 115–128.
- [8] H. Neumann, “Generalized free products with amalgamated subgroups. II”, *Amer. J. Math.*, **31**:3 (1949), 491–540.
- [9] A. Karrass, D. Solitar, “Subgroups of HNN groups and groups with one defining relations”, *Canad. J. Math.*, **23** (1971), 627–543.
- [10] J. L. Dyer, “Separating conjugates in amalgamated free products and HNN extensions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **29**:1 (1980), 35–51.
- [11] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М., 1980.
- [12] A. Karrass, D. Solitar, “The subgroups of a free product of two groups with an amalgamated subgroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **150** (1970), 227–255.
- [13] G. P. Scott, “An embedding theorem for groups with a free subgroups of finite index”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **6** (1974), 304–306.
- [14] В. Магнус, А. Каррасс, Д. Солитер, *Комбинаторная теория групп. Представление групп в терминах образующих и соотношений*, Наука, М., 1974.

Е. В. Соколов

Ивановский государственный университет

E-mail: ev-sokolov@yandex.ru

Поступило

22.09.2013