Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Григорян, Об одном признаке обратимости интегральных операторов второго рода в пространстве суммируемых на полуоси функций, *Матем. заметки*, 2014, том 96, выпуск 6, 849–855

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10397>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:46:12

Об одном признаке обратимости интегральных операторов второго рода в пространстве суммируемых на полуоси функций

Г. А. Григорян

Применяется метод специальной факторизации для установления одного признака обратимости интегрального оператора второго рода в терминах ядра интегральной части этого оператора. Указывается преобразование, сводящее вопрос обратимости указанного оператора к обращению интегрального оператора второго рода со сжимающей интегральной частью.

Библиография: 7 названий.

DOI: 10.4213/mzm10397

1. Введение. Пусть Ω – класс интегральных операторов K на $(0, +\infty)$, ядра $\mathcal{K}$ которых удовлетворяют условию

$$\mu = \mu(K) \equiv \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^\infty |\mathcal{K}(x, t)| dx < +\infty. \quad (1.1)$$

Из (1.1) следует, что K действует в $L_1 = L_1(0, +\infty)$ и имеет место оценка

$$\|K\| = \|K\|_{L_1} \leq \mu(< +\infty).$$

Если $\mu < 1$, то K – оператор сжатия в L_1 . Поэтому условие $\mu < 1$ обеспечивает обратимость оператора $I - K$ в L_1 , где I – единичный оператор. Представляет интерес вопрос нахождения более слабых условий обратимости $I - K$ в L_1 .

В настоящей заметке применяется метод специальной факторизации для установления одного признака обратимости $I - K$. Этот метод возник в рамках теории уравнений типа свертки (см. [1]). В работах [2]–[7] метод специальной факторизации был распространен на другие классы интегральных операторов.

В этой заметке получен признак обратимости оператора $I - K$ в терминах ядра $\mathcal{K}(x, t)$ для определенного класса операторов K из Ω , где условие $\mu < 1$ заменено более слабым. Указывается преобразование, сводящее вопрос обращения $I - K$ к обращению некоторого оператора $I - K_1$, где K_1 – оператор сжатия.

2. Предварительная лемма. Рассмотрим на L_1 следующие формально вольтерровы операторы:

$$(\Psi - f)(x) \equiv \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^\beta f(\tau) d\tau,$$

$$(\Psi_+ f)(x) \equiv x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{\tau^{\alpha+1}} f(\tau) d\tau,$$

$f \in L_1$, $x > 0$, $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Операторы конструкции $\Psi_\pm$ общего вида даны в [3] (см. [3; с. 71]).

Покажем, что $\Psi_\pm$ – ограниченные операторы в L_1 .

ЛЕММА 1. Операторы $\Psi_\pm$ непрерывно действуют в L_1 ; при этом

$$(I - \Psi_-)(I - \Psi_+) = (I - \Psi_+)(I - \Psi_-) = I. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Psi_- f\| &= \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \left| \int_0^x \tau^\beta f(\tau) d\tau \right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} dx \int_0^x \tau^\beta |f(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \tau^\beta |f(\tau)| d\tau \int_\tau^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} dx = \frac{\alpha + \beta + 1}{\beta} \|f\|. \end{aligned}$$

Следовательно, Ψ_- ограничен в L_1 , причем

$$\|\Psi_-\| \leq \frac{\alpha + \beta + 1}{\beta}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|\Psi_+ f\| &= \int_0^{+\infty} x^\alpha \left| \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\tau^{\alpha+1}} f(\tau) d\tau \right| dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} x^\alpha dx \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\tau^{\alpha+1}} |f(\tau)| d\tau \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{|f(\tau)|}{\tau^{\alpha+1}} d\tau \int_0^\tau (\alpha + \beta + 1) x^\alpha dx = \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\alpha + 1} \|f\|. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\Psi_+\| \leq \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + 1}.$$

Докажем равенство (2.1). Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$\begin{aligned} (\Psi_-(\Psi_+ f))(x) &= \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^\beta \tau^\alpha d\tau \int_\tau^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\xi^{\alpha+1}} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^{\alpha+\beta} d\tau \int_\tau^x \frac{f(\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \\ &\quad + \frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^{\alpha+\beta} d\tau \int_x^{+\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \\ &= \frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{x^{\beta+1}} \int_0^x \frac{f(\xi)}{\xi^{\alpha+1}} d\xi \int_0^\xi \tau^{\alpha+\beta} d\tau + x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\xi^{\alpha+1}} f(\xi) d\xi \\ &= \frac{(\alpha + \beta + 1)}{x^{\beta+1}} \int_0^x \xi^\beta f(\xi) d\xi + x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\xi^{\alpha+1}} f(\xi) d\xi \\ &= (\Psi_- f)(x) + (\Psi_+ f)(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Psi_- \Psi_+ = \Psi_- + \Psi_+. \quad (2.2)$$

Далее,

$$\begin{aligned}
 (\Psi_+(\Psi_-f))(x) &= x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\tau^{\alpha+1}} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\tau^{\beta+1}} d\tau \int_0^\tau \xi^\beta f(\xi) d\xi \\
 &= (\alpha + \beta + 1)^2 x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+\beta+2}} \int_0^x \xi^\beta f(\xi) d\xi \\
 &\quad + (\alpha + \beta + 1)^2 x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+\beta+2}} \int_x^\tau \xi^\beta f(\xi) d\xi \\
 &= (\alpha + \beta + 1)^2 x^\alpha \frac{1}{(\alpha + \beta + 1)x^{\alpha+\beta+1}} \int_0^x \xi^\beta f(\xi) d\xi \\
 &\quad + (\alpha + \beta + 1)^2 x^\alpha \int_x^{+\infty} \xi^\beta f(\xi) d\xi \int_\xi^{+\infty} \frac{d\tau}{\tau^{\alpha+\beta+2}} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta + 1)}{x^{\beta+1}} \int_0^x \xi^\beta f(\xi) d\xi + x^\alpha \int_x^{+\infty} \frac{(\alpha + \beta + 1)}{\xi^{\beta+1}} f(\xi) d\xi \\
 &= (\Psi_-f)(x) + (\Psi_+f)(x).
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.2) следует (2.1). Лемма доказана.

3. Признак обратимости. Пусть K – ограниченный в L_1 оператор. Тогда в силу (1.1) будем иметь

$$\begin{aligned}
 I - K &= (I - \Psi_+)(I - \Psi_-)(I - K)(I - \Psi_+)(I - \Psi_-) \\
 &= (I - \Psi_+)[(I - \Psi_-)(I - \Psi_+) - (I - \Psi_-)K(I - \Psi_+)](I - \Psi_-) \\
 &= (I - \Psi_+)[I - K_1](I - \Psi_-),
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$K_1 = (I - \Psi_-)K(I - \Psi_+). \tag{3.2}$$

В силу ограниченности операторов $I - \Psi_\pm$ и K из (3.2) следует, что K_1 также является ограниченным.

Пусть теперь K – интегральный оператор с ядром $\mathcal{K}(x, t)$, удовлетворяющим условию

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} |\mathcal{K}(x, t)| dx < +\infty.$$

Нетрудно убедиться, что тогда K_1 – интегральный оператор с ядром (ср. с [4], [5])

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1(x, t) &= \mathcal{K}(x, t) - \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^\beta \mathcal{K}(\tau, t) d\tau - \frac{\alpha + \beta + 1}{t^{\alpha+1}} \int_0^x \mathcal{K}(x, \xi) \xi^\alpha d\xi \\
 &\quad + \frac{(\alpha + \beta + 1)^2}{x^{\beta+1} t^{\alpha+1}} \int_0^x \tau^\beta \left(\int_0^t \mathcal{K}(x, \xi) \xi^\alpha d\xi \right) d\tau;
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

при этом

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} |\mathcal{K}_1(x, t)| dx < +\infty.$$

В частности, если $\mathcal{K}(x, t) = \sum_{j=1, n}^n p_j(x) q_j(t)$, где

$$\int_0^{+\infty} |p_j(x)| dx < +\infty, \quad \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} |q_j(t)| < +\infty, \quad j = 1, \dots, n,$$

то

$$\mathcal{K}_1(x, t) = \sum_{j=1}^n \left[p_j(x) - \frac{(\alpha + \beta + 1)}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^\beta p_j(\tau) d\tau \right] \left[q_j(t) - \frac{(\alpha + \beta + 1)}{t^{\alpha+1}} \int_0^t \xi^\alpha q_j(\xi) d\xi \right].$$

ТЕОРЕМА 1 (об обратимости). Пусть ядро $\mathcal{K}(x, t)$ интегрального оператора K удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\mathcal{K}(x, t) \geq 0$ при $x, t \geq 0$;
- 2) существует $\alpha \geq 0$ такое, что $\mathcal{K}(x, t)/x^\alpha$ — монотонно невозрастающая по x функция;
- 3) $\text{ess sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx < +\infty$;
- 4) имеет место оценка

$$\sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi^{1/(\alpha+1)}) dx \right) d\xi < 1.$$

Тогда оператор $I - K$ обратим в L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}_1(x, t)$ — ядро оператора $K_1 = (I - \Psi_-)K(I - \Psi_+)$. Тогда в силу (3.3) имеем

$$\mathcal{K}_1(x, t) = \widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t) - \frac{\alpha + \beta + 1}{t^{\alpha+1}} \int_0^t \widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, \xi) \xi^\alpha d\xi, \quad (3.4)$$

где

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t) = \mathcal{K}(x, t) - \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^\beta \mathcal{K}(\tau, t) d\tau. \quad (3.5)$$

Поскольку $((\alpha + \beta + 1)/x^{\alpha+\beta+1}) \int_0^x \tau^{\alpha+\beta} d\tau \equiv 1$, то из (3.5) имеем

$$\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t) = \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} \int_0^x \tau^{\alpha+\beta} \left[\frac{\mathcal{K}(x, t)}{x^\alpha} - \frac{\mathcal{K}(\tau, t)}{\tau^\alpha} \right] d\tau.$$

Отсюда и из условий 1) и 2) следует, что $\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t) \leq 0$ при $x, t \geq 0$. В силу условия 3) отсюда и из (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t)| dx &= - \int_0^{+\infty} \widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{x^{\beta+1}} dx \int_0^x \tau^\beta \mathcal{K}(\tau, t) d\tau - \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \tau^\beta \mathcal{K}(\tau, t) d\tau \int_\tau^{+\infty} \frac{\alpha + \beta + 1}{\tau^{\beta+1}} dx - \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx \\ &= \frac{\alpha + 1}{\beta} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4) будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\mathcal{K}_1(x, t)| dx &\leq \int_0^{+\infty} |\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, t)| dx + \frac{\alpha + \beta + 1}{t^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} dx \int_0^t |\widetilde{\mathcal{K}}_{\alpha, \beta}(x, \xi)| \xi^\alpha d\xi dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\alpha+1}{\beta} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx + \frac{\alpha+\beta+1}{\beta t^{\alpha+1}} \int_0^t (\alpha+1) \xi^\alpha d\xi \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi) dx \\ &\leq 2 \frac{\alpha+1}{\beta} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx + \frac{1}{t^{\alpha+1}} \int_0^{t^{\alpha+1}} d\xi \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi^{1/(\alpha+1)}) dx. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} |\mathcal{K}_1(x, t)| dx \\ &\leq \frac{2(\alpha+1)}{\beta} \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx + \sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi^{1/(\alpha+1)}) dx \right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условие 3) позволяет выбрать β настолько большим, чтобы

$$\frac{2(\alpha+1)}{\beta} \operatorname{ess\,sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx < \frac{1}{2} \left(1 - \sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi^{1/(\alpha+1)}) dx \right) d\xi \right).$$

Тогда в силу условия 4) из неравенства (3.6) будем иметь

$$\|K_1\| \leq \frac{1}{2} \left(1 + \sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, \xi^{1/(\alpha+1)}) dx \right) d\xi \right) < 1.$$

Значит, оператор $I - K_1$ обратим. Тогда, поскольку в силу (2.1) операторы $I - \Psi_{\pm}$ обратимы, то из (3.1) следует, что оператор $I - K$ обратим. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathcal{K}(x, t) > 0$ и $\mathcal{K}(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x на $[0, +\infty)$ (при каждом фиксированном $t \geq 0$), то условие 2) теоремы 1 эквивалентно условию

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, t) / \partial x}{\mathcal{K}(x, t)} \leq \frac{\alpha}{x}, \quad x > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогичным образом можно доказать обратимость оператора $I - K$ в более общем случае, а именно, когда

$$\mathcal{K}(x, t) = \int_a^b T(x, t, \lambda) d\sigma(\lambda),$$

где $\sigma(\lambda)$ – комплексная мера, а $T(x, t, \lambda)$ при каждом $\lambda \in [a, b]$ удовлетворяет условиям 1)–3) теоремы 1, при этом условие 4) заменяется условием

$$\sup_{t > 0} \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_a^b \left(\int_0^{+\infty} T(x, \xi^{1/(\alpha+1)}, \lambda) dx \right) |d\sigma(\lambda)| \right) d\xi < 1.$$

ПРИМЕР 1. Пусть ядро $\mathcal{K}(x, t)$ оператора K имеет вид $\mathcal{K}(x, t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \mu_j(t)$, где $\lambda_j(x) \geq 0$, $x \geq 0$, $\lambda_j(x)$ монотонно невозрастающая на $(0; +\infty)$ функция,

$$r_j \equiv \int_0^{+\infty} \lambda_j(x) dx < +\infty, \quad 0 \leq \mu_j(t) \leq \mu_j^0 = \text{const}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

и

$$\sup_{t \geq 0} \frac{1}{t} \int_0^t \sum_{j=1}^n r_j \mu_j(\xi) d\xi < 1.$$

Нетрудно проверить, что для $\mathcal{K}(x, t)$ выполняются все условия теоремы 1. Значит, оператор $I - K$ обратим.

ПРИМЕР 2. Пусть

$$\mathcal{K}(x, t) = \frac{2 + \sin(8 \ln(1 + x))}{(1 + x)^2} \mu(x),$$

где $0 \leq \mu(t) \leq \mu_0 = \text{const}$, $t \geq 0$,

$$\sup \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\xi^{1/7}) d\xi < \frac{1}{\gamma}, \quad \gamma \equiv \int_0^{+\infty} \frac{2 + \sin(8 \ln(1 + x))}{(1 + x)^2} dx.$$

Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial \mathcal{K}(x, t) / \partial x}{\mathcal{K}(x, t)} \leq \frac{6}{x}, \quad x > 0.$$

Тогда с учетом замечания 1 легко показать, что выполняются все условия теоремы 1. Поэтому оператор $I - K$ обратим.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия 1) и 2) теоремы 1, и пусть

3') $\text{ess sup}_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t) dx = 1$;

4') функция $Q(t) = \int_0^{+\infty} \mathcal{K}(x, t^{1/(\alpha+1)}) dx$ периодична и непрерывна в точке $t = 0$, причем $Q(0) < 1$.

Тогда оператор $I - K$ обратим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$q(t) \equiv \frac{1}{t} \int_0^t Q(\xi) d\xi.$$

Нужно показать, что $\sup_{t > 0} q(t) < 1$.

Поскольку $Q(t)$ непрерывна в точке $t = 0$ и $Q(0) < 1$, то $q(0+) = Q(0) < 1$. В силу этого и непрерывности $q(t)$ на $(0, +\infty)$ выберем $t_0 > 0$ так, чтобы

$$q(t) \leq \sqrt{Q(0)} < 1, \quad 0 < t \leq t_0. \quad (3.7)$$

Покажем, что

$$q(t) < 1, \quad t \in (0, +\infty). \quad (3.8)$$

Имеем

$$t - \int_0^t Q(\xi) d\xi = \int_0^t [1 - Q(\xi)] d\xi = \int_0^{t_0} [1 - Q(\xi)] d\xi + \int_{t_0}^t [1 - Q(\xi)] d\xi.$$

В силу условия 3') отсюда и из (3.7) следует, что

$$t - \int_0^t Q(\xi) d\xi \geq \int_0^{t_0} [1 - Q(\xi)] d\xi = t_0(1 - q(t_0)) \geq t_0(1 - \sqrt{Q(0)}) > 0, \quad t \geq t_0.$$

Отсюда и из (3.7) следует (3.8).

Пусть T – период функции $Q(t)$. Тогда $Q(T) \equiv \rho < 1$. В силу периодичности $Q(t)$ отсюда следует, что

$$q(nT) = \rho (< 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

Пусть $t \in [nT, (n+1)T]$ для некоторого $n = 1, 2, \dots$. Тогда в силу (3.9) имеем

$$q(t) = \frac{1}{t} \left(\int_0^{nT} Q(\xi) d\xi + \int_0^{t-nT} Q(\xi) d\xi \right) < \frac{1}{t} [nT\rho + s],$$

где $s = \max_{t \in [0, T]} tq(t) < 1$. Отсюда имеем

$$q(t) < \rho + \frac{s}{n}, \quad t \in [nT, (n+1)T]. \quad (3.10)$$

Поскольку $\rho < 1$, то мы можем выбрать $n = n_0$ настолько большим, чтобы

$$\rho_0 \equiv \rho + \frac{s}{n_0} < 1.$$

Тогда из (3.10) следует, что $q(t) \leq \rho_0 < 1$ при $t \in [n_0T, +\infty)$, и так как в силу (3.8) $q(t) < 1$ при $t \in (0, n_0T]$ и $q(0+) < 1$, то $\sup_{t \in (0, +\infty)} q(t) < 1$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$\mathcal{K}(x, t) = c \cdot \frac{1 + \sin^2(\lambda(t) \ln(1+x))}{1+x+x^2}, \quad x, t \geq 0,$$

$\lambda(t)$ – непрерывная периодическая функция с $\lambda(0) = 0$ и $|\lambda(t)| \leq 1$, $t \geq 0$,

$$c \cdot \sup_{t \geq 0} \int_0^{+\infty} \frac{1 + \sin^2(\lambda(t) \ln(1+x))}{1+x+x^2} dx = 1.$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 2 (при $\alpha = 0$). Действительно, выполнимость условий 1), 3) и 4) очевидна. Для проверки выполнимости 2) нужно показать, что $\partial \mathcal{K}(x, t) / \partial x \leq 0$, $x, t \geq 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] З. Пресдорф, *Некоторые классы сингулярных уравнений*, Мир, М., 1979.
- [2] Н. Б. Енгибарян, Б. Н. Енгибарян, “Интегральное уравнение свертки на полупрямой с вполне монотонным ядром”, *Матем. сб.*, **187**:10 (1996), 53–72.
- [3] Н. Б. Енгибарян, “Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов”, *Матем. сб.*, **191**:12 (2000), 61–76.
- [4] Г. А. Григорян, “Специальная факторизация необратимого оператора Фредгольма второго рода”, *Дифференц. уравнения*, **38**:12 (2002), 1690–1697.
- [5] Г. А. Григорян, “Специальная факторизация необратимого интегрального оператора Фредгольма второго рода с ядром Гильберта–Шмидта”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 33–44.
- [6] Г. А. Григорян, “Вопросы разрешимости для одного класса интегральных уравнений Винера–Хопфа”, *Изв. НАН. Армении. Матем.*, **31**:2 (1996), 27–39.
- [7] Г. А. Григорян, “Уравнения Винера–Хопфа в закритическом случае”, *Изв. НАН. Армении. Матем.*, **32**:1 (1997), 60–74.

Г. А. Григорян

Институт математики НАН Республики Армении

E-mail: mathphys2@instmath.sci.am

Поступило

18.10.2013

Исправленный вариант

17.04.2014