Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Таров, Гладко меняющиеся функции и совершенные уточненные порядки, *Матем. заметки*, 2004, том 76, выпуск 2, 258–264

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm104>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 16:12:37

УДК 517.518.26+517.547.22

ГЛАДКО МЕНЯЮЩИЕСЯ ФУНКЦИИ И СОВЕРШЕННЫЕ УТОЧНЕННЫЕ ПОРЯДКИ

В. А. Таров

В статье показано, что функция $h(r)$ является гладко меняющейся функцией порядка ρ тогда и только тогда, когда функция $\rho(r) = (\ln h(r))/\ln r$ является совершенным уточненным порядком, т.е. бесконечно дифференцируемой в некоторой окрестности $+\infty$ функцией, для которой выполняются условия $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho$, $\rho \in \mathbb{R}$, и $\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \ln r \rho^{(n)}(r) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В статье также получены некоторые следствия приведенного выше результата.

Библиография: 4 названия.

1. Введение и формулировка результатов. При изучении асимптотических свойств функций различных классов часто имеют дело с положительными в окрестности $+\infty$ функциями. Например, для целой не равной тождественно константе функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, положительной в некоторой окрестности $+\infty$ является (см. [1, гл. 1, § 1]) функция $\ln M(r, f)$, где $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Функция $n(r, f)$ – число нулей $f(z)$ в круге $\{z : |z| \leq r\}$ – также положительна в некоторой окрестности $+\infty$, если $f(z)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке.

В многочисленных работах, особенно в работах, касающихся роста субгармонических функций (частным случаем которых являются логарифмы модулей целых функций) положительные в окрестности $+\infty$ функции сравниваются с функциями вида $h(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Вещественнозначная дифференцируемая на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функция $\rho(r)$ называется *уточненным порядком*, если

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} (r \ln r) \rho'(r) = 0.$$

Функция $h(r) = r^{\rho(r)}$, где $\rho(r)$ – уточненный порядок, является, как это следует из леммы 5 [1, гл. 1, § 12], правильно меняющейся функцией порядка ρ .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 02-01-01098, и программы “Ведущие научные школы”, грант № 00-15-96189.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Измеримая положительная на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функция $h(r)$ называется *правильно меняющейся порядка* ρ , $\rho \in \mathbb{R}$, если для любого положительного числа k

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{h(kr)}{h(r)} = k^\rho.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Правильно меняющаяся функция нулевого порядка называется *медленно меняющейся функцией*.

Известно (см. [2, теорема 1.8.2]), что любая правильно меняющаяся функция $h(r)$ эквивалентна при $r \rightarrow +\infty$ некоторой гладко меняющейся функции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Положительная бесконечно дифференцируемая на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функция $h(r)$ называется *гладко меняющейся порядка* ρ , $\rho \in \mathbb{R}$, если

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\ln h(e^r))' = \rho, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} (\ln h(e^r))^{(n)} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (1)$$

Сформулируем в виде теоремы известное (см. [2, п. 1.8.1] и [3, лемма 9]) утверждение.

ТЕОРЕМА А. Положительная бесконечно дифференцируемая на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функция $h(r)$ удовлетворяет условиям (1) тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^n h^{(n)}(r)}{h(r)} = \rho(\rho - 1) \cdots (\rho - n + 1). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Бесконечно дифференцируемый в некоторой окрестности $+\infty$ уточненный порядок $\rho(r)$ называется *совершенным*, если для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \ln r \rho^{(n)}(r) = 0. \quad (3)$$

Основным результатом данной статьи является

ТЕОРЕМА 1. Положительная бесконечно дифференцируемая на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функция $h(r)$ является гладко меняющейся функцией порядка ρ тогда и только тогда, когда функция

$$\rho(r) = \frac{\ln h(r)}{\ln r} \quad (4)$$

является совершенным уточненным порядком, для которого выполняется равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho(r) = \rho. \quad (5)$$

Для того чтобы сформулировать следующую теорему, нам потребуется еще одно определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Уточненные порядки $\rho_1(r)$ и $\rho_2(r)$ называются *эквивалентными*, если

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\rho_1(r) - \rho_2(r)) \ln r = 0.$$

ТЕОРЕМА 2. Для любого уточненного порядка найдется эквивалентный ему совершенный уточненный порядок.

Отметим, что из теоремы 2, в частности, следует существование для любого уточненного порядка эквивалентного ему сильного уточненного порядка, т.е. дважды дифференцируемого в окрестности $+\infty$ уточненного порядка, для которого выполнено (3) при $n = 2$.

ТЕОРЕМА 3. Для любой положительной на некотором луче $(a, +\infty)$, $a \geq 0$, функции $\varphi(r)$, удовлетворяющей условию

$$\left| \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \varphi(r)}{\ln r} \right| < +\infty, \quad (6)$$

найдутся число $b > a$ и совершенный уточненный порядок $\rho(r)$, такие, что

$$\varphi(r) \leq r^{\rho(r)} \quad \text{при } r \geq b, \quad (7)$$

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho(r)}} = 1. \quad (8)$$

Заметим, выполнение условия (6) означает, что $\varphi(r)$ имеет конечный порядок; выполнение условия (8) – что $\varphi(r)$ имеет при $\rho(r)$ нормальный (т.е. конечный положительный) тип, равный 1, а $\rho(r)$ является уточненным (в данном случае – совершенным уточненным) порядком $\varphi(r)$.

Отметим также, что все имеющиеся выше определения (кроме определения 5) известны и во многих работах приводились с некоторыми отличиями в формулировках, а в этой статье даны в удобной для рассматриваемых вопросов форме.

2. Доказательство теоремы 1. Везде в доказательстве считаем, что $r \in (a + 1, +\infty)$.

Необходимость. Пусть $h(r)$ – гладко меняющаяся функция порядка ρ . Тогда $h(r)$ является (см. [2, п. 1.8.1]) правильно меняющейся функцией порядка ρ и поэтому представляется в виде

$$h(r) = r^\rho h_0(r), \quad (9)$$

где $h_0(r)$ – медленно меняющаяся функция. Из (9) и следует (5), так как известно (см. [4, п. 1.5, свойство 2°]), что $\lim_{r \rightarrow +\infty} \ln h_0(r) / \ln r = 0$.

Из определения 4 вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Если $h(r) = r^\rho h_0(r)$, то $h(r)$ является гладко меняющейся функцией порядка ρ в том и только том случае, когда $h_0(r)$ – гладко меняющаяся функция порядка 0.

В силу утверждения 1 и теоремы А для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^n h_0^{(n)}(r)}{h_0(r)} = 0. \quad (10)$$

Докажем теперь, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n (\ln h_0(r))^{(n)} = 0. \quad (11)$$

Из (10) при $n = 1$ получаем (11) при $n = 1$. Предположим, что (11) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего $k \in \mathbb{N}$. Ввиду равенства

$$h_0^{(k+1)}(r) = (h_0(r) (\ln h_0(r))')^{(k)} = \sum_{i=0}^{k+1} C_k^i h_0^{(i)}(r) (\ln h_0(r))^{(k+1-i)}$$

имеем

$$\frac{r^{k+1} h_0^{(k+1)}(r)}{h_0(r)} = r^{k+1} (\ln h_0(r))^{(k+1)} + \sum_{i=1}^{k+1} C_k^i \frac{r^i h_0^{(i)}(r)}{h_0(r)} r^{k+1-i} (\ln h_0(r))^{(k+1-i)}. \quad (12)$$

Из (12), принимая во внимание выполнение (10) для любого $n \in \mathbb{N}$ и сделанное предположение, получаем (11) при $n = k + 1$. Таким образом, (11) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$ вследствие принципа математической индукции.

Введем функцию

$$\rho_0(r) = \rho(r) - \rho. \quad (13)$$

Докажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \ln r \rho_0^{(n)}(r) = 0. \quad (14)$$

Из (5) и (13) следует, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_0(r) = 0. \quad (15)$$

Из (4), (9) и (13) получаем равенство

$$\rho_0(r) = \frac{\ln h_0(r)}{\ln r}. \quad (16)$$

Учитывая (16), находим

$$r (\ln h_0(r))' = r (\ln r \rho_0(r))' = \rho_0(r) + r \ln r \rho_0'(r). \quad (17)$$

Из (17), если принять во внимание (11) при $n = 1$ и (15), вытекает (14) при $n = 1$.

Предположим, что (14) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего $k \in \mathbb{N}$. Тогда для этих же значений n будет выполняться и равенство

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^n \rho_0^{(n)}(r) = 0. \quad (18)$$

Используя (16), имеем

$$(\ln h_0(r))^{(k+1)} = (\ln r \rho_0(r))^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{i=k+1} C_{k+1}^i (\ln r)^{(i)} \rho_0^{(k+1-i)}(r).$$

Из этого равенства вытекает, что

$$r^{k+1} (\ln h_0(r))^{(k+1)} = r^{k+1} \ln r \rho_0^{(k+1)}(r) + \sum_{i=1}^{i=k+1} C_{k+1}^i (-1)^{i+1} (i-1)! r^{k+1-i} \rho_0^{(k+1-i)}(r), \quad (19)$$

откуда в силу (11) при $n = k + 1$, (15) и (18) для n , не превосходящих k , следует (14) при $n = k + 1$. На основании принципа математической индукции (14) верно для любого $n \in \mathbb{N}$, но тогда и (3) верно для любого $n \in \mathbb{N}$, так как ввиду (13) $\rho^{(n)}(r) = \rho_0^{(n)}(r)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $\rho(r) = (\ln h(r))/\ln r$ – совершенный уточненный порядок, для которого выполняется (5). Из (3) и (13) следует (14), а значит, и (18), для любого $n \in \mathbb{N}$. Из (5) и (13) получаем (15).

Из (14) при $n = 1$, (15) и (17) находим (11) при $n = 1$. Для $n > 1$ (11) следует из (19), если учесть (15), а также выполнение (14) и (18) при любом $n \in \mathbb{N}$.

Условие (10) при $n = 1$ вытекает из (11) при $n = 1$. Предположим, что (10) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего $k \in \mathbb{N}$. Из (12), принимая во внимание выполнение (11) при любом $n \in \mathbb{N}$ и сделанное предположение, получаем (10) при $n = k + 1$. Тогда по принципу математической индукции (10) верно для любого $n \in \mathbb{N}$ и в силу теоремы А $h_0(r)$ – гладко меняющаяся функция порядка 0. Ввиду утверждения 1 $h(r)$ является гладко меняющейся функцией порядка ρ . Достаточность доказана.

Покажем, что используя соотношения, полученные при доказательстве теоремы 1, можно дать доказательство теоремы А, отличное от доказательства, приведенного в лемме 9 [3].

3. Доказательство теоремы А. Докажем сначала

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если $h(r) = r^\rho h_0(r)$, то (2) выполняется при любом $n \in \mathbb{N}$ в том и только том случае, когда (10) выполняется при любом $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Ввиду (9) имеем

$$h'(r) = \rho r^{\rho-1} h_0(r) + r^\rho h_0'(r). \quad (20)$$

Из (20), учитывая (2) при $n = 1$ и (9), находим, что (10) верно при $n = 1$. Предположим, что (10) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего $k \in \mathbb{N}$. Из (9) и равенства

$$(r^\rho h_0(r))^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{i=k+1} C_{k+1}^i (r^\rho)^{(i)} h_0^{(k+1-i)}(r)$$

вытекает, что

$$\frac{r^{k+1}h^{(k+1)}(r)}{h(r)} = \frac{r^{k+1}h_0^{(k+1)}(r)}{h_0(r)} + \sum_{i=1}^{k+1} C_{k+1}^i \rho(\rho-1) \cdots (\rho-i+1) \frac{r^{k+1-i}h_0^{(k+1-i)}(r)}{h_0(r)} + \rho(\rho-1) \cdots (\rho-k), \quad (21)$$

откуда в силу сделанного предположения и (2) при $n = k + 1$ следует (10) при $n = k + 1$. На основании принципа математической индукции (10) верно для любого $n \in \mathbb{N}$.

Достаточность. Из (20), учитывая (9) и (10) при $n = 1$, получаем (2) при $n = 1$. При $n > 1$ (2) следует из (21), так как (10) верно при любом $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2 доказано.

Из доказательства теоремы 1 вытекает, что (10) верно для любого $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ верно (11).

Осталось доказать следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для того чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнялось (11), необходимо и достаточно, чтобы для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\ln h_0(e^r))^{(n)} = 0. \quad (22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* сразу же следует из верного для любого $n \in \mathbb{N}$ равенства

$$(\ln h_0(e^r))^{(n)} = \sum_{j=1}^{j=n} b_{jn} e^{jr} (\ln h_0(t))^{(j)}|_{t=\exp r}, \quad (23)$$

где b_{jn} – константы.

Достаточность. При $n = 1$ (11) вытекает из (22) при $n = 1$. Предположим, что (11) выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$, не превосходящего $k \in \mathbb{N}$. Тогда из (23) при $n = k + 1$, учитывая (22) при $n = k + 1$ и сделанное предположение, находим, что (11) выполняется при $n = k + 1$. Вследствие принципа математической индукции (11) верно для любого $n \in \mathbb{N}$. Утверждение 3 доказано.

Ввиду утверждения 1 доказана и теорема А.

4. Доказательство теоремы 2. Если $\rho(r)$ – уточненный порядок, то, как отмечалось во введении, $h(r) = r^{\rho(r)}$ – правильно меняющаяся функция. По теореме 1.8.2 [2] для $h(r)$ найдется эквивалентная ей при $r \rightarrow +\infty$ гладко меняющаяся функция $h_1(r)$. Ввиду теоремы 1 $\rho_1(r) = (\ln h_1(r))/\ln r$ – совершенный уточненный порядок. Из

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{\rho(r)}}{r^{\rho_1(r)}} = 1$$

следует

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} (\rho(r) - \rho_1(r)) \ln r = 0.$$

Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3. Ввиду (6) найдется число $b_1 > a + 1$ такое, что функция $\varphi(r)$ ограничена на отрезке $[b_1, b_2]$ при любом $b_2 \in (b_1, +\infty)$. Тогда из доказательства теоремы 16 [1, гл. 1, § 12] вытекает существование такого уточненного порядка $\rho_1(r)$, что

$$\varphi(r) \leq r^{\rho_1(r)} \quad \text{при } r \geq b_1 \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(r)}{r^{\rho_1(r)}} = 1. \quad (24)$$

Вследствие теоремы 1.8.2 [2] для правильно меняющейся функции $r^{\rho_1(r)}$ найдутся число $b \geq b_1$ и гладко меняющаяся функция $h(r)$ такие, что

$$r^{\rho_1(r)} \leq h(r) \quad \text{при } r \geq b \quad \text{и} \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^{\rho_1(r)}}{h(r)} = 1. \quad (25)$$

В силу теоремы 1 $\rho(r) = (\ln h(r))/\ln r$ – совершенный уточненный порядок. Поэтому из (24) и (25) следует (7) и (8). Теорема доказана.

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю чл.-корр. РАН, профессору В.В. Напалкову за полезное обсуждение статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
- [2] Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L. Regular Variation. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. V. 27. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- [3] Balkema A. A., Geluk J. L., De Haan L. An extension of Karamata's Tauberian theorem and its connection with complementary convex functions // Quart. J. Math. Oxford (2). 1979. V. 30, № 120. P. 385–416.
- [4] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН
E-mail: tarov@imat.rb.ru

Поступило
27.03.2003