Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Б. Вакарчук, О наилучших линейных методах приближения и поперечниках некоторых классов аналитических функций, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 186–193

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1040>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 17:29:21

УДК 517.512

О НАИЛУЧШИХ ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ И ПОПЕРЕЧНИКАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Б. Вакарчук

В пространстве Харди H_q , $q \geq 1$, указаны наилучшие линейные методы приближения для классов аналитических функций, изучавшихся Н. Айнуллоевым и являющихся в определенном смысле обобщением введенных Л. В. Тайковым функциональных множеств. Найдены точные значения их линейных и гельфандовских n -поперечников. Также получены точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечников классов аналитических в $|z| < 1$ функций, K -функционалы граничных значений которых мажорируются заданной функцией.

Библиография: 12 названий.

1. Задача построения наилучших линейных методов приближения для классов аналитических функций и вычисления точных значений n -поперечников вызывает определенный интерес, хотя по данной тематике в настоящее время уже получен целый ряд окончательных результатов (см., например, [1]–[6] и список литературы к ним). В [4] были построены наилучшие линейные методы приближения для некоторых из рассмотренных Л. В. Тайковым [5] функциональных классов. В данной работе указаны наилучшие линейные методы приближения для ряда классов, изучавшихся Н. Айнуллоевым [6] и являющихся в определенном смысле обобщением функциональных множеств из [5], и найдены точные значения их линейных и гельфандовских n -поперечников в пространствах Харди H_q , $q \geq 1$. Также получены точные значения колмогоровского и бернштейновского n -поперечников классов аналитических в единичном круге функций, K -функционалы граничных значений которых мажорируются заданной функцией.

Напомним, что функция $f(z)$ аналитическая в единичном круге $|z| < 1$ принадлежит банахову пространству H_q , если

$$\|f\|_{H_q} = \lim_{\rho \rightarrow 1-0} M_q(f, \rho) < \infty, \quad M_q(f, \rho) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{ix})|^q dx \right)^{1/q}.$$

При этом норма функции $f(z) \in H_q$ реализуется на ее угловых граничных значениях $f(e^{ix})$. Обозначим через $H_{q,\rho}$, $0 < \rho \leq 1$, пространство Харди аналитических в круге $|z| < \rho$ функций $f(z)$, для которых $\|f(z)\|_{H_{q,\rho}} = \|f(\rho z)\|_{H_q} < \infty$. Производную

r -го порядка функции $f(z)$ по аргументу x комплексного переменного $z = \rho e^{ix}$ обозначим через $f_a^{(r)}(z)$. Очевидно, что

$$f_a^{(1)}(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial x} = f_a^{(1)}(z), \quad z_a^{(1)} = f_a^{(1)}(z)zi,$$

$$f_a^{(r)}(z) = (f_a^{(r-1)}(z))_a^{(1)}, \quad r = 2, 3, \dots$$

Если $f_a^{(r)}(z) \in H_q$, то структурные свойства этой функции можно либо охарактеризовать быстротой стремления к 0 модуля гладкости ее граничных значений

$$\omega_2(f, 2x)_{H_q} = \sup_{|\tau| \leq x} \{ \|f_a^{(r)}(e^{i(\cdot + \tau)}) - 2f_a^{(r)}(e^{i(\cdot)}) + f_a^{(r)}(e^{i(\cdot - \tau)})\|_{H_q} \}$$

при $x \rightarrow 0$, либо задать скорость убывания к 0 мажоранты некоторой усредненной величины, содержащей $\omega_2(f, 2x)_{H_q}$ [5], [6].

Пусть $\Phi(x)$, $x \geq 0$, – произвольная возрастающая непрерывная функция, $\Phi(0) = 0$. Для любого заданного значения параметра $\mu \geq 1/2$ обозначим через $W_a^r H_q(\Phi, \mu)$, $r \in \mathbb{N}$, класс функций $f(z) \in H_q$, для которых производные $f_a^{(r)}(z) \in H_q$ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{t} \int_0^t \omega_2(f_a^{(r)}, 2x)_{H_q} \left(1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi x}{2t} \right) dx \leq \Phi(t)$$

для любого $t \in (0, \pi/2]$.

Обозначим через $d_n(\mathfrak{M}, X)$, $d^n(\mathfrak{M}, X)$, $b_n(\mathfrak{M}, X)$, $\delta_n(\mathfrak{M}, X)$ соответственно колмогоровский, гильбертовский, бернштейновский и линейный n -поперечники некоторого выпуклого центрально-симметричного компакта $\mathfrak{M}$ в банаховом пространстве X (см., например, [1], [4], [7]). Данные n -поперечники связаны следующими соотношениями:

$$b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d_n(\mathfrak{M}, X) \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X), \quad b_n(\mathfrak{M}, X) \leq d^n(\mathfrak{M}, X) \leq \delta_n(\mathfrak{M}, X). \quad (1)$$

Из результатов [6] следует, что если при заданном $\mu \geq 1/2$ и при любых $t, \tau \in (0, \pi/2]$ функция Φ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi}{\pi - 2} \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi t x}{2\tau \mu} \right)_* \left(1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi x}{2} \right) dx \leq \frac{\Phi(t)}{\Phi(\tau)}, \quad (2)$$

где

$$(1 - \cos x)_* = \begin{cases} 1 - \cos x, & \text{если } 0 \leq x \leq \pi, \\ 2, & \text{если } x \geq \pi, \end{cases}$$

то для любого натурального числа $n \geq 2$ справедливы равенства

$$b_n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = d_n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = \frac{\pi}{2(\pi - 2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right). \quad (3)$$

Там же приведен пример степенной функции $\Phi(t) = t^{\alpha(\mu)}$, где

$$\alpha(\mu) = \frac{\pi^2}{2(\pi - 2)\mu} \int_0^1 x \left(1 + (\mu^2 - 1) \sin \frac{\pi x}{2} \right) \sin \frac{\pi x}{2\mu} dx,$$

которая удовлетворяет условию (2), и отмечено, что случай $\alpha(1) = 2/(\pi - 2)$ содержится в [5].

В теории аппроксимации функций часто используется идея замены произвольной функции f достаточно гладкой функцией g . Одна из наиболее эффективных реализаций этой идеи основана на методе K -функционала Петре теории интерполяционных пространств [8].

В пространстве Харди H_q для произвольной функции $f(z) \in H_q$ определим K -функционал следующим образом:

$$K_{j,q}(f, \nu) = \inf_{g_a^{(j)} \in H_q} \{ \|f - g\|_{H_q} + \nu^j \|g_a^{(j)}\|_{H_q} \}, \quad (4)$$

где $\nu > 0$, $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$. При $q = \infty$ полагаем, что $f(z)$ имеет непрерывные угловые граничные значения $f(t) \stackrel{\text{def}}{=} f(e^{it})$, т.е. $f(t) \in C[0, 2\pi]$. Из рассуждений [9], [10, с. 60] применительно к функциям $f(z) \in H_q$ следует, что если $1 \leq q < \infty$, $j \in \mathbb{N}$ и $0 < \nu \leq \pi$, то

$$\omega_j(f, \nu)_q \asymp K_{j,q}(f, \nu), \quad (5)$$

где

$$\omega_j(f, \nu)_q = \sup_{0 \leq h \leq \nu} \left\| \sum_{s=0}^j (-1)^{j-s} \binom{j}{s} f(e^{i(\cdot + sh)}) \right\|_{H_q}$$

— модуль гладкости j -го порядка угловых граничных значений функции f . Соотношение (5) справедливо и в случае $q = \infty$, если $f(t) \in C[0, 2\pi]$.

Пусть $\mathcal{K}(t)$ — положительная монотонно возрастающая функция при $t > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mathcal{K}(t) = \mathcal{K}(0) = 0.$$

Обозначим через $H_q(\mathcal{K})$ класс функций $f(z) \in H_q$, каждая из которых при некотором $j \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условиям

$$K_{j,q}\left(f, \frac{1}{m}\right) \leq \mathcal{K}\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что в силу (5) такое определение класса оправдано.

Основными результатами данного сообщения являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если мажоранта $\Phi(x)$ при некотором заданном $\mu \geq 1/2$ удовлетворяет условию (2), то для любого натурального числа $n \geq 2$ имеют место равенства

$$d^n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = \delta_n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = \frac{\pi}{2(\pi - 2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2n\mu}\right).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть мажоранта $\mathcal{K}(t)$ для любых $m, s \in \mathbb{N}$, $m \geq s$, удовлетворяет неравенству

$$\frac{\mathcal{K}(1/m)}{\mathcal{K}(1/s)} \geq \frac{s}{m}. \quad (6)$$

Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \rho < 1$ справедливы равенства

$$d_n(H_q(\mathcal{K}); H_{q,\rho}) = b_n(H_q(\mathcal{K}); H_{q,\rho}) = \rho^n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (7)$$

2. Доказательство теоремы 1. Построим наилучший линейный метод приближения функций из класса $W_a^r H_q(\Phi, \mu)$ в пространстве H_q . Для произвольной функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

принадлежащей $W_a^r H_q(\Phi, \mu)$, запишем следующее соотношение:

$$f(z) - \mathfrak{L}_{n-1,r}(f, z) = \frac{1}{2\pi i r} \int_0^{2\pi} f_a^{(r)}(ze^{-ix}) e^{inx} \left(n^{-r} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} \cos(k-n)x \right) dx, \quad (8)$$

где

$$\mathfrak{L}_{n-1,r}(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,r} c_k z^k, \quad \lambda_{k,r} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = 0, \\ 1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r, & \text{если } k = 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (9)$$

Чтобы убедиться в справедливости (8), необходимо разложить $f_a^{(r)}(\cdot)$ в ряд Тейлора и затем почленно проинтегрировать.

При решении в [6] ряда экстремальных задач на основе разработанного в [5] подхода важную роль играет аналитическая функция

$$F_t(f, z) = \frac{\pi}{2t(\pi-2)} \int_0^t (f(ze^{ix}) + f(ze^{-ix})) \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2t} \right) dx, \quad (10)$$

используемая в процессе промежуточного приближения.

Полагая в (10) $t = t_* = \pi/(2\mu n)$, получим

$$\begin{aligned} F_*(f, z) &\stackrel{\text{df}}{=} F_{t_*}(f, z) = \frac{\mu n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} (f(ze^{ix}) + f(ze^{-ix})) (1 - \sin \mu n x) dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{k,n} c_k z^k, \end{aligned}$$

где

$$\psi_{k,n} = \frac{2\mu n}{\pi-2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \cos kx (1 - \sin \mu n x) dx.$$

Очевидно, что $F_*(f, z)$ принадлежит H_q , если $f(z)$ является элементом этого пространства.

Запишем для $f_a^{(r)}(z)$ функцию

$$F_*(f_a^{(r)}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{k,n} (ik)^r c_k z^k$$

и построим следующий вспомогательный оператор:

$$\begin{aligned}\Lambda_{n-1,r}(f, z) &\stackrel{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i^r} \int_0^{2\pi} \mathfrak{L}_{n-1,2}(F_*(f_a^{(r)}), ze^{-ix}) \\ &\quad \times e^{inx} \left(n^{-r} + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} \cos(k-n)x \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k} \right)^2 \right) \left(\frac{k}{2n-k} \right)^r \psi_{k,n} c_k z^k.\end{aligned}$$

Поскольку последовательность $\{(n+k)^{-r}\}_{k=0}^{\infty}$ является выпуклой, ряд

$$\frac{1}{2n^r} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-r} \cos(k-n)x$$

сходится всюду, за исключением быть может точки $x = 0$, к некоторой неотрицательной интегрируемой функции $g(x)$ и является рядом Фурье этой функции (см., например, [11]). Используя этот факт, соотношение (8), неравенство Минковского и полагая $\Pi_{n-1,r}(f, z) = \mathfrak{L}_{n-1,r}(f, z) + \Lambda_{n-1,r}(f, z)$, имеем

$$\|f - \Pi_{n-1,r}(f)\|_{H_q} \leq n^{-r} (\|f_a^{(r)} - F_*(f_a^{(r)})\|_{H_q} + \|F_*(f_a^{(r)}) - \mathfrak{L}_{n-1,2}(F_*(f_a^{(r)}))\|_{H_q}). \quad (11)$$

Оценку сверху первого слагаемого в правой части неравенства (11) получаем сразу же, применив неравенство Минковского и определение величины $\omega_2(f, 2x)_{H_q}$:

$$\|f_a^{(r)} - F_*(f_a^{(r)})\|_{H_q} \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2x)_{H_q} (1 - \sin \mu n x) dx. \quad (12)$$

Прежде чем приступить к оценке второго слагаемого в правой части (12), как и в [5, с. 289], отметим, что $f(z)$ можно считать произвольным полиномом $p_m(z)$ любого порядка m . Поскольку множество всех полиномов всюду плотно в H_q , осуществляемые далее математические операции над функцией $f(z)$ являются корректными. Используя (8), запишем

$$\|F_*(f_a^{(r)}) - \mathfrak{L}_{n-1,2}(F_*(f_a^{(r)}))\|_{H_q} \leq n^{-2} \|(F_*(f_a^{(r)}))_a^{(2)}\|_{H_q} = n^{-2} \|F_*(f_a^{(r+2)})\|_{H_q}. \quad (13)$$

Воспользовавшись далее определением функции $F_*(\cdot)$ и дважды интегрируя по частям, на основании неравенства Минковского получим следующее продолжение оценки (13):

$$\|F_*(f_a^{(r)}) - \mathfrak{L}_{n-1,2}(F_*(f_a^{(r)}))\|_{H_q} \leq \frac{\mu n}{\pi - 2} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2x)_{H_q} \mu^2 \sin \mu n x dx. \quad (14)$$

В силу (12)–(14) для любой функции $f(z) \in W_a^r H_q(\Phi, \mu)$ из (11) имеем

$$\begin{aligned}\|f - \Pi_{n-1,r}(f)\|_{H_q} &\leq \frac{\mu n}{(\pi - 2)n^r} \int_0^{\pi/(2\mu n)} \omega_2(f_a^{(r)}, 2x)_{H_q} (1 + (\mu^2 - 1) \sin \mu n x) dx \\ &\leq \frac{\pi}{2(\pi - 2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right).\end{aligned} \quad (15)$$

Используя определение линейного n -поперечника

$$\delta_n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = \inf_{L_n \subset H_q} \inf_{\Lambda: H_q \rightarrow L_n} \sup_{f \in W_a^r H_q(\Phi, \mu)} \|f - \Lambda f\|_{H_q},$$

где L_n – линейное n -мерное подпространство, а $\Lambda: H_q \rightarrow L_n$ есть линейный непрерывный оператор, из (1), (3) и (15) получим

$$\begin{aligned} d^n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) &= \delta_n(W_a^r H_q(\Phi, \mu); H_q) = \sup_{f \in W_a^r H_q(\Phi, \mu)} \|f - \Pi_{n-1, r}(f)\|_{H_q} \\ &= \frac{\pi}{2(\pi - 2)n^r} \Phi\left(\frac{\pi}{2\mu n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Pi_{n-1, r}(f, z) = c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \left(\frac{k}{2n-k}\right)^r \left(\psi_{k, n} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^2\right) - 1\right)\right) c_k z^k$$

является наилучшим линейным методом приближения функций из класса $W_a^r H_q(\Phi, \mu)$ в метрике пространства H_q . Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2. Для функции $f(z) \in H_q(\mathcal{K})$ при $|z| < 1$ и $0 < \rho < 1$ воспользуемся следующим представлением:

$$f(\rho z) - V_{n-1}^\rho(f, \rho z) = \frac{\rho^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{-ix}) e^{inx} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kx\right) dx, \quad (16)$$

где

$$V_{n-1}^\rho(f, z) \stackrel{\text{df}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \rho^{2(n-k)}) c_k z^k.$$

Чтобы убедиться в справедливости (16), необходимо разложить подынтегральную функцию $f(\cdot)$ в ряд Тейлора и затем почленно проинтегрировать.

Используя введенный в п. 2 полиномиальный оператор (9) при $r = j$, для произвольной аналитической в $|z| < 1$ функции

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k z^k,$$

у которой $g_a^{(j)}(z) \in H_q$, рассмотрим оператор

$$Q_{n-1, j}^\rho(g, \rho z) = \frac{\rho^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{L}_{n-1, j}(g, ze^{-ix}) e^{inx} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kx\right) dx. \quad (17)$$

Легко проверить, что

$$Q_{n-1, j}^\rho(g, \rho z) = \beta_0 \rho^{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{2n-k}\right)^j\right) \rho^{2(n-k)} \beta_k z^k.$$

Так как числовая последовательность $\{\rho^k\}_{k=0}^{\infty}$ является выпуклой, то, рассуждая как и при выводе оценки (11), из (16), (17) имеем

$$\|f(\rho z) - V_{n-1}^{\rho}(f, \rho z) - Q_{n-1,j}^{\rho}(g, \rho z)\|_{H_q} \leq \rho^n (\|f - g\|_{H_q} + \|g - \mathfrak{L}_{n-1,j}(g)\|_{H_q}). \quad (18)$$

Полагая, в (8) $f \equiv g$, $r = j$, продолжим данное неравенство следующим образом:

$$\|f(\rho z) - V_{n-1}^{\rho}(f, \rho z) - Q_{n-1,j}^{\rho}(g, \rho z)\|_{H_q} \leq \rho^n (\|f - g\|_{H_q} + n^{-j} \|g_a^{(j)}\|_{H_q}). \quad (19)$$

Из формулы (4) и неравенств (18), (19) следует оценка сверху для наилучшего приближения функции $f(z) \in H_q(\mathcal{K})$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$ алгебраических полиномов степени $\leq n-1$ в круге $|z| < \rho$:

$$E_{n-1}(f; H_{q,\rho}) \stackrel{\text{df}}{=} \inf_{p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}} \|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n K_{j,q} \left(f, \frac{1}{n} \right). \quad (20)$$

На основании определений класса $H_q(\mathcal{K})$ и колмогоровского n -поперечника получим оценку сверху:

$$d_n(H_q(\mathcal{K}); H_{q,\rho}) = \inf_{L_n \subset H_{q,\rho}} \sup_{f \in H_q(\mathcal{K})} \inf_{\varphi \in L_n} \|f - \varphi\|_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right). \quad (21)$$

Для получения оценки снизу бернштейновского n -поперечника

$$b_n(H_q(\mathcal{K}); H_{q,\rho}) = \sup_{L_{n+1} \subset H_{q,\rho}} \sup_{\varepsilon > 0} \{\varepsilon B \cap L_{n+1} \subset H_q(\mathcal{K})\},$$

где B – шар единичного радиуса в $H_{q,\rho}$, рассмотрим множество

$$B_* \stackrel{\text{df}}{=} \rho^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) B \cap \mathcal{P}_n = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

и покажем включение $B_* \subset H_q(\mathcal{K})$. Из (4) для любого полинома $p_n(z)$ следуют очевидные неравенства

$$K_{j,q}(p_n, \nu) \leq \|p_n\|_{H_q}, \quad K_{j,q}(p_n, \nu) \leq \nu^j \|(p_n)_a^{(j)}\|_{H_q}. \quad (22)$$

Нам потребуется следующее неравенство:

$$\|p_n\|_{H_q} \leq \rho^{-n} \|p_n\|_{H_{q,\rho}}, \quad (23)$$

полученное Е. Хиллом, Г. Сегё, Я. Д. Тамаркиным (см., например, [12]).

Пусть сначала $m \leq n$. Тогда на основании (22), (23) для любого полинома $p_n \in B_*$ имеем

$$K_{j,q} \left(p_n, \frac{1}{m} \right) \leq \|p_n\|_{H_q} \leq \rho^n \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{n} \right) \leq \mathcal{K} \left(\frac{1}{m} \right). \quad (24)$$

При $m \geq n$ на основании тех же соображений, неравенства С. Н. Бернштейна [5]

$$\|(p_n)_a^{(j)}\|_{H_q} \leq n^j \|p_n\|_{H_q}$$

и соотношения (6) получим

$$\begin{aligned} K_{j,q}\left(p_n, \frac{1}{m}\right) &\leq \frac{1}{m^j} \|(p_n)_a^{(j)}\|_{H_q} \left(\frac{n}{m}\right)^j \|p_n\|_{H_q} \\ &\leq \rho^{-n} \left(\frac{n}{m}\right)^j \|p_n\|_{H_{q,\rho}} \leq \frac{n}{m} \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{K}\left(\frac{1}{m}\right). \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, на основании (24), (25) включение $B_* \subset H_q(K)$ доказано. Следовательно,

$$b_n(H_q(K); H_{q,\rho}) \geq \rho^n \mathcal{K}\left(\frac{1}{n}\right). \quad (26)$$

Из (21) и (26) следуют равенства (7), чем и завершается доказательство теоремы 2.

Нетрудно убедиться в том, что условию (6) удовлетворяют, например, функции вида $K(t) = At^\alpha$, где $A = \text{const} > 0$, $0 < \alpha \leq 1$. В заключение заметим, что из (20), (22) и известного равенства $E_{n-1}(z^n; H_{q,\rho}) = \rho^n$ следует одно экстремальное соотношение

$$\sup_{f \in H_q} \frac{E_{n-1}(f; H_{q,\rho})}{K_{j,q}(f, 1/n)} = \rho^n,$$

которое реализуется на функции z^n .

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Pinkus A. *n*-Widths in Approximation Theory. Berlin: Springer, 1985.
- [2] Fisher S.D., Stessin M.I. The *n*-width of the unit ball of H^q // J. Approx. Theory. 1991. V. 67. № 3. P. 347–356.
- [3] Фарков Ю. А. Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // УМН. 1990. Т. 45. № 5. С. 197–198.
- [4] Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Матем. заметки. 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39.
- [5] Тайков А. В. Поперечники некоторых классов аналитических функций // Матем. заметки. 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.
- [6] Айнуллоев Н. Поперечники классов аналитических функций в единичном круге // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1986. С. 91–101.
- [7] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [8] Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [9] Oswald P. On some approximation properties of real Hardy spaces ($0 < p \leq 1$) // J. Approx. Theory. 1984. V. 40. № 1. P. 45–65.
- [10] Schumaker L. L. Spline Functions. Basic Theory. New York: Wiley, 1981.
- [11] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
- [12] Шихалиев Н. И. Неравенства типа С. Н. Бернштейна–А. А. Маркова для аналитических функций // Докл. АН АзССР. 1975. Т. 31. № 8. С. 9–14.

Институт геотехнической механики НАН Украины,
г. Днепропетровск

Поступило
27.06.97
Исправленный вариант
18.03.98