Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Севостьянов, Об устранимых особенностях отображений, рост которых ограничен некоторой функцией, *Матем. заметки*, 2015, том 97, выпуск 3, 448–461

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10406>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 12:02:25

Об устранимых особенностях отображений, рост которых ограничен некоторой функцией

Е. А. Севостьянов

В настоящей работе исследованы вопросы, связанные с локальным поведением дифференцируемых почти всюду отображений, обладающих N -, N^{-1} -, ACP -, и ACP^{-1} -свойствами, характеристика квазиконформности которых удовлетворяет определенным условиям на рост. Показано, что, если отображение такого типа растет в окрестности изолированной точки границы не быстрее некоторой функции радиуса шара, то эта точка является устранимой особой точкой отображения, либо полюсом.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10406

1. Введение. Настоящая заметка посвящена поиску условий на отображение $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданное в окрестности точки b пространственной области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, при которых это отображение продолжается в точку b непрерывным образом. Хорошо известно, что даже аналитическая функция $\varphi: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, заданная в области $D \setminus \{b\}$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, вообще говоря, не продолжается в точку b по непрерывности ($\varphi(z) = \exp\{1/z\}$, $b = 0$). Однако, как следует из результатов настоящей статьи, при определенных условиях на рост f (на рост φ) это, все же, справедливо. Отметим, что ниже рассматриваются более общие отображения, чем отображения с ограниченным искажением, включающие в себя, как подкласс, класс аналитических функций. Определение и примеры отображений с ограниченным искажением могут быть найдены, например, в монографии [1]. Другие результаты автора на данную тему могут быть найдены в статье [2] и недавно опубликованной работе [3], где рассматриваются немного другие условия на отображение. Отметим, что результаты настоящей статьи автоматически являются верными для конформных и квазиконформных отображений, более того, они справедливы также для более общих Q -гомеоморфизмов и кольцевых Q -гомеоморфизмов (см., например, [4]); однако, в этом случае никаких ограничений на рост отображений не требуется, так что указанные результаты содержательны лишь для отображений, не являющихся инъективными.

Всюду далее D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$, $\text{dist}(A, B)$ – евклидово расстояние между множествами $A, B \subset \mathbb{R}^n$,

$$\text{dist}(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} |x - y|,$$

(x, y) обозначает (стандартное) скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\text{diam } A$ – евклидов диаметр множества $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}, \quad \mathbb{B}^n := B(0, 1),$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\}, \quad \mathbb{S}^{n-1} := S(0, 1),$$

ω_{n-1} означает площадь сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ в $\mathbb{R}^n$, Ω_n – объем единичного шара $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{R}^n$, запись $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ предполагает, что отображение f , заданное в области D , непрерывно. Отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in \mathbb{R}^n$ состоит из изолированных точек, и *открытым*, если образ любого открытого множества $U \subset D$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает *N -свойством Лузина*, или просто *N -свойством*, если из условия $m(E) = 0$, $E \subset D$, следует, что $m(f(E)) = 0$. Аналогично, говорят, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ обладает *N^{-1} -свойством*, если из условия $m(E) = 0$, $E \subset \mathbb{R}^n$, следует, что $m(f^{-1}(E)) = 0$, где, как обычно, запись $f^{-1}(E)$ обозначает полный прообраз множества E при отображении f .

Кривой γ мы называем непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ (открытого интервала (a, b) , либо полуоткрытого интервала вида $[a, b)$ или $(a, b]$) в $\mathbb{R}^n$, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Под семейством кривых Γ подразумевается некоторый фиксированный набор кривых γ , а $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$. Следующие определения могут быть найдены, например, [5; разд. 1–6, гл. I]. Борелева функция $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ называется *допустимой* для семейства Γ кривых γ в $\mathbb{R}^n$, если криволинейный интеграл первого рода от функции ρ по каждой (локально спрямляемой) кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяет условию $\int_\gamma \rho(x) |dx| \geq 1$. В этом случае мы пишем: $\rho \in \text{adm } \Gamma$. *Модулем* семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in \text{adm } \Gamma} \int_D \rho^n(x) dm(x).$$

Свойства модуля в некоторой мере аналогичны свойствам меры Лебега m в $\mathbb{R}^n$. Именно, модуль пустого семейства кривых равен нулю, $M(\emptyset) = 0$, модуль обладает свойством монотонности относительно семейств кривых Γ_1 и Γ_2 : из $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ следует $M(\Gamma_1) \leq M(\Gamma_2)$, а также свойством полуаддитивности:

$$M\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i),$$

см. [5; теорема 6.2]. Говорят, что некоторое свойство выполнено для *почти всех* (п.в.) *кривых* области D , если оно имеет место для всех кривых, лежащих в D , кроме некоторого их семейства, модуль которого равен нулю.

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – открытый интервал числовой прямой, $\gamma: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ – локально спрямляемая кривая. В таком случае, очевидно, существует единственная неубывающая функция длины $l_\gamma: \Delta \rightarrow \Delta_\gamma \subset \mathbb{R}$ с условием $l_\gamma(t_0) = 0$, $t_0 \in \Delta$ такая, что значение $l_\gamma(t)$ равно длине подкривой $\gamma|_{[t_0, t]}$ кривой γ , если $t > t_0$, и длине подкривой $\gamma|_{[t, t_0]}$ со знаком “–”, если $t < t_0$, $t \in \Delta$. Пусть $g: |\gamma| \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное отображение, где $|\gamma| = \gamma(\Delta) \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что кривая $\tilde{\gamma} = g \circ \gamma$ также локально спрямляема. Тогда, очевидно, существует единственная неубывающая функция $L_{\gamma, g}: \Delta_\gamma \rightarrow \Delta_{\tilde{\gamma}}$ такая, что

$$L_{\gamma, g}(l_\gamma(t)) = l_{\tilde{\gamma}}(t) \quad \text{при всех } t \in \Delta.$$

Кривая $\gamma \in D$ называется (полным) поднятием кривой $\tilde{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ при отображении $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$. Говорят, что отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу ACP в области D , пишем $f \in ACP$, если, для почти всех кривых γ в области D , кривая $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ локально спрямляема и функция длины $L_{\gamma, f}$, введенная выше, абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в Δ_γ , для почти всех кривых γ в D . Предположим, что $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ – дискретное отображение, тогда может быть определена функция $L_{\gamma, f}^{-1}$. В таком случае, будем говорить, что f обладает свойством ACP^{-1} в области D , пишем $f \in ACP^{-1}$, если для почти всех кривых $\tilde{\gamma} \in f(D)$ каждое поднятие γ при отображении f , $f \circ \gamma = \tilde{\gamma}$, является локально спрямляемой кривой и, кроме того, обратная функция $L_{\gamma, f}^{-1}$ абсолютно непрерывна на всех замкнутых интервалах, лежащих в $\Delta_{\tilde{\gamma}}$, для почти всех кривых $\tilde{\gamma}$ в $f(D)$ и каждого поднятия γ кривой $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

Полагаем

$$l(f'(x)) := \inf_{h \in \mathbb{R}^n: |h|=1} |f'(x)h|.$$

Напомним, что внутренняя дилатация отображения f в точке x определяется как

$$K_I(x, f) = \begin{cases} \frac{|J(x, f)|}{l(f'(x))^n}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 1, & \text{если } f'(x) = 0, \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Всюду далее $q_{x_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над сферой $S(x_0, r)$,

$$q_{x_0}(r) := \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{S(x_0, r)} Q(x) dS, \quad (1.1)$$

где dS – элемент площади поверхности S .

Напомним, что изолированная точка x_0 границы ∂D области D называется *устраняемой* для отображения f , если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Если $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$, точку x_0 будем называть *полосом*. Изолированная точка x_0 границы ∂D называется *существенно особой точкой* отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если при $x \rightarrow x_0$ нет ни конечного, ни бесконечного предела. Основной результат настоящей статьи заключает в себе следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина, а $Q: D \rightarrow [1, \infty)$ – некоторая функция такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа $\delta, C, p > 0$ и $\varepsilon_0 > 0, \varepsilon_0 < \text{dist}(b, \partial D)$, такие, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq C \cdot \exp \left\{ p \int_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_b^{1/(n-1)}(t)} \right\}. \quad (1.2)$$

Пусть, кроме того,

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Если вместо условия (1.2) имеет место более сильное предположение

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| \cdot \exp \left\{ - \int_{|x-b|}^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_b^{1/(n-1)}(t)} \right\} = 0,$$

то точка $x = b$ является для отображения f устранимой особой точкой.

Отметим, что для отображений с ограниченным искажением (когда функция $Q(x)$ ограничена) теорема 1 была получена в работе [6; теорема 4.2].

2. Основная лемма. Всюду далее, для произвольной области $G \subset D$, такой, что $\overline{G} \subset D$, и произвольного $y \in f(G) \setminus f(\partial G)$, символ $\mu(y, f, G)$ обозначает топологический индекс отображения f в точке y относительно области G , см., например, [1; § 2, гл. II]. Везде ниже мы подразумеваем, что отображение f сохраняет ориентацию, т.е., $\mu(y, f, G) > 0$ для всех указанных выше y и G , если не оговорено противное. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение и пусть существует область $G \subset D$, $\overline{G} \subset D$, такая, что

$$\overline{G} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}.$$

Тогда величина $\mu(f(x), f, G)$, называемая *локальным топологическим индексом*, не зависит от выбора области G и обозначается символом $i(x, f)$. Следующие определения см., например, в монографии [7; гл. II, п. 3], см. также [6; разд. 3.11]. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ произвольное отображение, $\beta: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — некоторая кривая и $x \in f^{-1}(\beta(a))$. Кривая $\alpha: [a, c) \rightarrow D$ называется *максимальным поднятием* кривой β при отображении f с началом в точке x , если

- (1) $\alpha(a) = x$;
- (2) $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c)}$;
- (3) если $c < c' \leq b$, то не существует кривой $\alpha': [a, c') \rightarrow D$ такой, что $\alpha = \alpha'|_{[a, c)}$ и $f \circ \alpha = \beta|_{[a, c')}$.

Пусть $x_1, \dots, x_k$ — k различных точек множества $f^{-1}(\beta(a))$ и $m = \sum_{i=1}^k i(x_i, f)$. Говорят, что последовательность кривых $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ есть *максимальная последовательность поднятий кривой β при отображении f с началом в точках $x_1, \dots, x_k$* , если

- (а) каждая кривая α_j есть максимальное поднятие кривой β при отображении f ,
- (б) $\text{card}\{j : \alpha_j(a) = x_i\} = i(x_i, f)$, $1 \leq i \leq k$,
- (с) $\text{card}\{j : \alpha_j(t) = x\} \leq i(x, f)$ для всех $x \in D$ и при всех t .

Пусть f — открытое дискретное отображение и $x_1, \dots, x_k \in f^{-1}(\beta(a))$. Тогда кривая β имеет максимальную последовательность поднятий при отображении f с началом в точках $x_1, \dots, x_k$, см. [7; теорема 3.2, гл. II]. Следующее утверждение доказано автором, см., например, [8; теорема 1].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствами Лузина, Γ — семейство кривых в D , Γ' — семейство кривых в $\mathbb{R}^n$ и m — натуральное число, такое что выполнено следующее условие. Для каждой кривой $\beta \in \Gamma'$ найдутся кривые $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ семейства Γ такие, что $f \circ \alpha_j \subset \beta$ для всех j и равенство $\alpha_j(t) = x$ имеет место при всех $x \in G$, всех t и не более чем $i(x, f)$ индексах j .

Тогда для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$

$$M(\Gamma') \leq \frac{1}{m} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x). \quad (2.1)$$

Для отображения $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ множества $E \subset D$ и $y \in \mathbb{R}^n$ определим функцию кратности $N(y, f, E)$ как число прообразов точки y во множестве E , т.е.

$$N(y, f, E) = \text{card}\{x \in E : f(x) = y\}.$$

Далее символ $\Gamma(E, F, D)$ означает семейство всех кривых $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, которые соединяют E и F в D , т.е. $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $t \in (a, b)$. Компактное множество $G \subset \mathbb{R}^n$ условимся называть *множеством нулевой емкости*, пишем $\text{cap } G = 0$, если существует ограниченное открытое множество $A \subset \mathbb{R}^n$, содержащее G , такое, что $M(\Gamma(G, \partial A, A)) = 0$, см., например, [7; гл. III, раздел 2 и гл. II, предложение 10.2]. Будем говорить, что произвольное множество G имеет емкость нуль, если произвольное его компактное подмножество G_0 имеет нулевую емкость. Множества емкости нуль, как известно, всюду разрывны (любая компонента их связности вырождается в точку), т.е., условие $\text{cap } G = 0$ влечет, что $\text{Int } G = \emptyset$, см., например, [7; гл. III, следствие 2.5]. Открытое множество $U \subset D$, $\bar{U} \subset D$, называется *нормальной окрестностью* точки $x \in D$ при отображении $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, если

$$U \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}, \quad \partial f(U) = f(\partial U),$$

см., например, [7; раздел 4, гл. I].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ открытое дискретное отображение. Тогда для каждого $x \in D$ существует s_x такое, что при всех $s \in (0, s_x)$ компонента связности множества $f^{-1}(B(f(x), s))$, содержащая точку x и обозначаемая символом $U(x, f, s)$, является нормальной окрестностью точки x при отображении f , при этом

$$f(U(x, f, s)) = B(f(x), s), \quad \text{diam } U(x, f, s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow 0,$$

см., например, [7; лемма 4.9, гл. I].

Для доказательства основных результатов работы нам необходимо воспользоваться следующими утверждениями, см. [9; следствие 8.1, предложение 8.5 и теорема 8.6], а также, соответственно, [2; лемма 5.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Произвольное открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, обладающее N - и N^{-1} -свойствами Лузина и такое, что $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, удовлетворяет неравенству вида

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(x) \cdot \rho^n(x) dm(x) \quad (2.2)$$

для любого семейства кривых Γ в области D и $\rho \in \text{adm } \Gamma$ при $Q(x) = K_I(x, f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $Q: \mathbb{B}^n \rightarrow [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, пусть $f: \mathbb{B}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – открытое дискретное отображение, удовлетворяющее

неравенству (2.2) при $D := \mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ для любого семейства кривых Γ в $\mathbb{B}^n \setminus \{0\}$ и $\rho \in \text{adm } \Gamma$. Пусть, кроме того,

$$\text{cap}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n \setminus \{0\})) > 0.$$

Предположим, что существует $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такое, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) = o(I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)),$$

где $\psi(t)$ – измеримая по Лебегу функция такая, что $\psi(t) > 0$ п.в. и

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty$$

для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда f имеет непрерывное продолжение $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$ в $\mathbb{B}^n$.

Важную роль при доказательстве основных результатов работы играет следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и некоторой строго убывающей функции $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, для которой $\varphi(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow 0$, имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq C \cdot \varphi^p(|x - b|), \quad (2.3)$$

где $p > 0$ и $C > 0$ – некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q: D \rightarrow [1, \infty]$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \text{dist}(b, \partial D)$, $A > 0$ и борелевская функция $\psi(t): (0, \varepsilon_0) \rightarrow (0, \infty)$ такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in B(0, \delta) \setminus \{b\}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x - b|) dm(x) \leq \frac{A \cdot I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)}{(\log \varphi(\varepsilon))^{n-1}}, \quad (2.4)$$

где

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt < \infty \quad \text{для всех } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \quad (2.5)$$

Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, а именно, что точка b является существенно особой точкой отображения f . Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$, $\delta < \text{dist}(0, \partial D)$ и $C = 1$. В таком случае, сфера $S(0, \delta)$ является компактным множеством в $D \setminus \{0\}$, поэтому найдется $R > 0$ такое, что

$$f(S(0, \delta)) \subset B(0, R). \quad (2.6)$$

Поскольку $b = 0$ является существенно особой точкой отображения f , в виду условий (2.1) и (2.4), а также предложений 3 и 4, отображение f в $B(0, \delta) \setminus \{0\}$ принимает все значения в $\mathbb{R}^n$, за исключением, может быть, некоторого множества емкости нуль, т.е.

$$N(y, f, \mathbb{B}^n \setminus \{0\}) = \infty \quad \text{при всех } y \in \mathbb{R}^n \setminus E,$$

где $\text{cap } E = 0$. Так как E имеет емкость нуль, множество $\mathbb{R}^n \setminus E$ не может быть ограниченным. В таком случае, найдется $y_0 \in \mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(0, R))$.

Пусть $k_0 > 4Ap^{n-1}/\omega_{n-1}$, $k_0 \in \mathbb{N}$. Поскольку $N(y_0, f, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \infty$, найдутся точки

$$x_1, \dots, x_{k_0} \in f^{-1}(y_0) \cap (B(0, \delta) \setminus \{0\}).$$

По предложению 2 при некотором фиксированном $r > 0$ каждая точка x_j , $j = 1, \dots, k_0$, имеет нормальную окрестность $U_j := U(x_j, f, r)$ такую, что $\overline{U_l} \cap \overline{U_m} = \emptyset$ при всех $l \neq m$, $l, m \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k_0$ и $1 \leq m \leq k_0$.

Полагаем

$$d := \min\{\varepsilon_0, \text{dist}(0, \overline{U_1} \cup \dots \cup \overline{U_{k_0}})\}.$$

Пусть $a \in (0, d)$ и $V := B(0, \delta) \setminus \overline{B(0, a)}$. В силу неравенства (2.3), строгого убывания функции φ , а также предположения о том, что $C = 1$, имеем

$$f(V) \subset B(0, \varphi^p(a)). \quad (2.7)$$

Поскольку

$$z_0 := y_0 + re \in \overline{B(y_0, r)} = f(\overline{U(x_j, f, r)}), \quad j = 1, \dots, k_0,$$

где e – единичный вектор, будем иметь $z_0 \in f(V)$. Следовательно, найдется последовательность точек $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{k_0}$, $\tilde{x}_j \in \overline{U_j}$, $1 \leq j \leq k_0$, такая, что $f(\tilde{x}_j) = z_0$. Заметим, что

$$k_0 \leq \sum_{j=1}^{k_0} i(\tilde{x}_j, f) = m'.$$

Обозначим через H полусферу

$$H = \{e \in \mathbb{S}^{n-1} : (e, y_0) > 0\},$$

через Γ' – семейство всех кривых $\beta: [r, \varphi^p(a)) \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида $\beta(t) = y_0 + te$, $e \in H$, а через Γ максимальную последовательность поднятий кривой β при отображении f относительно области V с началом в точках $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{k_0}$, $\tilde{x}_j \in \overline{U_j}$, $1 \leq j \leq k_0$, состоящую из m' кривых, $m' = \sum_{j=1}^{k_0} i(\tilde{x}_j, f)$, которая существует в силу [7; теорема 3.2, гл. II]. По предложению 1

$$M(\Gamma') \leq \frac{1}{m'} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \leq \frac{1}{k_0} \int_D K_I(x, f) \cdot \rho^n(x) dm(x) \quad (2.8)$$

для каждой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$.

При любом фиксированном $e \in H$ покажем, что для каждой кривой $\beta = y_0 + te$ и каждого максимального ее поднятия $\alpha(t): [r, c) \rightarrow V$ с началом в точке $\tilde{x}_{j_0}$, $\alpha \in \Gamma$, $1 \leq j_0 \leq k_0$, существует последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \rightarrow c - 0$ при $k \rightarrow \infty$ и $\text{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Предположим противное, тогда найдется $e_0 \in H$ такое, что кривая $\alpha(t)$, $t \in [r, c)$, являющаяся максимальным поднятием кривой $\beta = y_0 + te_0$, лежит внутри V вместе со своим замыканием. Пусть $C(c, \alpha(t))$ обозначает предельное множество кривой α при $t \rightarrow c - 0$; тогда для каждого $x \in C(c, \alpha(t))$ найдется последовательность $t_k \rightarrow \infty$ такая, что $x = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)$. По непрерывности f , поскольку, по предположению, $C(c, \alpha(t)) \subset V$, будем иметь

$$f(x) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha(t_k)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta(t_k) = \beta(c),$$

откуда следует, что отображение f постоянно на множестве $C(c, \alpha(t))$. Так как по условию f дискретно, а множество $C(c, \alpha(t))$, очевидно, является связным, будем иметь $C(c, \alpha(t)) = p_1 \in V$.

Полагаем $b_0 := \varphi^p(a)$. Пусть $c \neq b_0$. Тогда можно построить новое максимальное поднятие α' кривой β с началом в точке p_1 . Объединяя поднятия α и α' , получаем еще одно поднятие α'' кривой β с началом в точке $\tilde{x}_{j_0}$, что противоречит свойству максимальности исходного поднятия α . Значит, $c = b_0$.

В таком случае $C(b_0, \alpha(t))$ континуум внутри V , при этом, $C(b_0, \alpha(t)) = p'_1 \in V$ и, значит, α продолжается до замкнутой кривой, определенной на отрезке $[r, \varphi^p(a)]$. Обозначим эту кривую снова через α (обозначения не меняем). Тогда при всех $t \in [r, \varphi^p(a)]$ имеем $\beta(t) = f(\alpha(t)) \subset f(V)$, в частности, полагая $t := \varphi^p(a)$, рассмотрим элемент z_1 , определяемый по правилу $z_1 := y_0 + \varphi^p(a)e_0$. Ввиду включения (2.7), имеем

$$z_1 = y_0 + \varphi^p(a)e_0 \in f(V) \subset B(0, \varphi^p(a)). \quad (2.9)$$

Однако, поскольку $e_0 \in H$,

$$|z_1| = |y_0 + \varphi^p(a)e_0| = \sqrt{|y_0|^2 + 2(y_0, \varphi^p(a)e_0) + \varphi^{2p}(a)} \geq \sqrt{|y_0|^2 + \varphi^{2p}(a)} \geq \varphi^p(a). \quad (2.10)$$

Однако, соотношение (2.10) противоречит (2.9), что, в свою очередь, опровергает предположение о включении замыкания кривой $\alpha(t)$ во множество V .

Следовательно, $\text{dist}(\alpha(r_k), \partial V) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и некоторой последовательности $r_k \in [r, c)$ такой, что $r_k \rightarrow c - 0$ и $k \rightarrow \infty$, что и требовалось установить.

Заметим, что ситуация, когда $\text{dist}(\alpha(r_k), S(0, \delta)) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, исключена. Действительно, пусть эта ситуация имеет место. Тогда найдутся $p_2 \in S(0, \delta)$ и подпоследовательность номеров k_l , $l \in \mathbb{N}$ такие, что $\alpha(r_{k_l}) \rightarrow p_2$ при $l \rightarrow \infty$. Отсюда, по непрерывности f , получаем, что $\beta(r_{k_l}) \rightarrow f(p_2)$ при $l \rightarrow \infty$, что невозможно ввиду соотношения (2.6), поскольку, при каждом фиксированном $e \in H$ и $t \in [r, \varphi^p(a))$, имеем

$$|\beta(t)| = |y_0 + te| = \sqrt{|y_0|^2 + 2t(y_0, e) + t^2} \geq |y_0| > R$$

по выбору y_0 .

Из сказанного выше следует, что найдется последовательность $r_k \in [r, c)$ такая, что $r_k \rightarrow c - 0$ при $k \rightarrow \infty$, и $\alpha(r_k) \rightarrow p_3 \in S(0, a)$. Кроме того, каждая такая кривая $\alpha \in \Gamma$ пересекает сферу $S(0, d)$, поскольку, согласно построению, α имеет начало вне шара $B(0, d)$. Рассмотрим функцию

$$\rho_a(x) = \begin{cases} \frac{\psi(|x|)}{I(a, d)}, & x \in B(0, d) \setminus B(0, a), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus (B(0, d) \setminus B(0, a)), \end{cases}$$

где величина $I(a, d)$ определена также, как в (2.5), а ψ – функция из условия леммы. Заметим, что функция $\rho_a(x)$ является борелевской и, кроме того, поскольку $\rho_a(x)$ является радиальной функцией, в силу установленных выше свойств кривых из семейства Γ , а также в силу [5; теорема 5.7], для любой (локально спрямляемой) кривой $\alpha \in \Gamma$ имеем

$$\int_{\alpha} \rho_a(x) |dx| \geq \frac{1}{I(a, d)} \int_a^d \psi(t) dt = 1,$$

т.е., $\rho_a(x) \in \text{adm } \Gamma$. В таком случае, из соотношения (2.8) получаем

$$\begin{aligned}
 M(\Gamma') &\leq \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a, d)} \int_{a < |x| < d} K_I(x, f) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \\
 &\leq \frac{I^n(a, \varepsilon_0)}{k_0 \cdot I^n(a, d) \cdot I^n(a, \varepsilon_0)} \int_{a < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \\
 &= \left(1 + \frac{I(d, \varepsilon_0)}{I(a, d)}\right)^n \frac{1}{k_0 \cdot I^n(a, \varepsilon_0)} \int_{a < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x) \\
 &\leq \frac{2}{k_0 \cdot I^n(a, \varepsilon_0)} \int_{a < |x| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x|) dm(x)
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

при всех $a \in (0, d_1)$ и некотором d_1 , $d_1 \leq d$, поскольку, в силу соотношения (2.4), $I^n(a, d) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow \infty$. Снова, из (2.4) и (2.11) получаем, что при $a \in (0, d_1)$

$$M(\Gamma') \leq \frac{2A}{k_0(\log \varphi(a))^{n-1}}. \tag{2.12}$$

С другой стороны, в силу [5; раздел 7.7]

$$M(\Gamma') = \frac{1}{2} \frac{\omega_{n-1}}{(\log(\varphi^p(a)/r))^{n-1}}. \tag{2.13}$$

Тогда из неравенств (2.12) и (2.13) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\omega_{n-1}}{(\log(\varphi^p(a)/r))^{n-1}} \leq \frac{2A}{k_0(\log \varphi(a))^{n-1}},$$

откуда

$$\begin{aligned}
 \left(\log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)\right)^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}} &\geq (\log(\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)}})^{n-1}, \\
 \log\left(\frac{\varphi^p(a)}{r}\right)^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}} &\geq \log(\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)}}, \\
 \frac{1}{r^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}} &\geq (\varphi(a))^{(k_0/(2A))^{1/(n-1)} - p(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}.
 \end{aligned}$$

Поскольку по выбору $k_0 > 4Ap^{n-1}/\omega_{n-1}$, в правой части последнего соотношения величина $\varphi(a)$ берется в некоторой положительной степени. Переходя здесь к пределу при $a \rightarrow 0$ и учитывая, что по условию леммы $\varphi(a) \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 0$, получаем, что

$$\frac{1}{r^{(2/\omega_{n-1})^{1/(n-1)}}} \geq \infty,$$

что невозможно. Полученное противоречие означает, что точка $b = 0$ не может быть существенно особой для отображения f .

Отдельный случай представляет собой ситуация, когда $I(\varepsilon, \varepsilon_0) \leq M \cdot \log \varphi(\varepsilon)$ при некоторой постоянной $M > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$. Следующее утверждение может быть получено из [10; лемма 5] и оценки (2.1) при $m = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Предположим, что $b \in D$, $f: D \rightarrow B(0, R)$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина, при этом, существуют измеримая по Лебегу функция $Q: D \rightarrow [1, \infty]$, числа $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \text{dist}(b, \partial D)$, и $A > 0$, такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ почти всюду в D , при этом, при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеют место соотношения (2.4), (2.5). Пусть, кроме того, существует постоянная $M > 0$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такие, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ выполнено условие*

$$I(\varepsilon, \varepsilon_0) \leq M \cdot \log \varphi(\varepsilon), \quad (2.14)$$

где $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ определяется соотношением (2.5), а $\varphi: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – некоторая функция. Тогда при всех $x \in B(b, \varepsilon_1)$ имеет место оценка

$$|f(x) - f(b)| \leq \frac{\alpha_n(1 + R^2)}{\delta} \exp\{-\beta_n I(|x - b|, \varepsilon_0)\}, \quad (2.15)$$

где постоянные α_n и $\beta_n = (\omega_{n-1}/(AM^{n-1}))^{1/(n-1)}$ зависят только от n , а δ – от R .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что в условиях леммы 1, помимо соотношений (2.4) и (2.5) имеет место условие (2.14), а вместо условия (2.3) имеет место более сильное предположение:*

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| \cdot \exp\{-\beta_n I(|x - b|, \varepsilon_0)\} = 0, \quad (2.16)$$

где $\beta_n = (\omega_{n-1}/(AM^{n-1}))^{1/(n-1)}$. Тогда точка $x = b$ является устранимой для отображения f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $b = 0$. По лемме 1 точка b не может быть существенно особой для f . Предположим, что $b = 0$ является для отображения f полюсом. Тогда рассмотрим композицию отображений $h = g \circ f$, где $g(x) = x/|x|^2$ – инверсия относительно единичной сферы S^{n-1} . Заметим, что $h \in ACP \cap ACP^{-1}$ обладает N - и N^{-1} -свойствам Лузина, при этом, $K_I(x, f) = K_I(x, h)$ и $h(0) = 0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h (по построению) является ограниченным. В таком случае найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $R > 0$ такие, что $|h(x)| \leq R$ при $|x| < \varepsilon_0$. Следовательно, возможно применение предложения 5. По неравенству (2.15),

$$|h(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\alpha_n(1 + R^2)}{\delta} \exp\{-\beta_n I(|x|, \varepsilon_0)\}.$$

Отсюда следует, что

$$|f(x)| \cdot \exp\{-\beta_n I(|x|, \varepsilon_0)\} \geq \frac{\delta}{\alpha_n(1 + R^2)}.$$

Однако, последнее соотношение противоречит (2.16). Полученное противоречие доказывает, что точка $b = 0$ является устранимой для отображения f .

3. Основные следствия. Прежде всего, проведем доказательство теоремы 1. В лемме 1 полагаем

$$\psi(t) = \frac{1}{t q_b^{1/(n-1)}(t)}, \quad \varphi(t) = \exp\left\{\int_t^{\varepsilon_0} \frac{dr}{r q_b^{1/(n-1)}(r)}\right\}.$$

Отметим, что при указанных ограничениях на $Q(x) < \infty$, при почти всех $r \in (0, \varepsilon_0)$ имеем $q_b(r) < \infty$, откуда вытекает строгое убывание функции φ . Кроме того, по теореме Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} Q(x) \cdot \psi^n(|x-b|) dm(x) &= \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \int_{S(b,r)} Q(x) \cdot \psi^n(|x-b|) dS dr \\ &= \omega_{n-1} \cdot \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} r^{n-1} \psi^n(r) q_b(r) dr = \omega_{n-1} \cdot I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \omega_{n-1} \cdot \log \varphi(\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что выполнено условие (2.14) при $M = 1$. Оставшаяся часть утверждения следует из леммы 1 и следствия 1.

Полагая в лемме 1 в качестве функции $\psi(t) = 1/t$, а в качестве $\varphi(t) = t^{-q}$, $q > 0$, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$, такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство

$$|f(x)| \leq C|x-b|^{-q},$$

где $q > 0$ и $C > 0$ – некоторые постоянные. Пусть, кроме того, существуют измеримая по Лебегу функция $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ и число $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ такие, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x)}{|x-b|^n} dm(x) \leq C_1 \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

где $C_1 = C_1(b)$ – некоторая положительная постоянная. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой. Кроме того, существует постоянная $p > 0$ такая, что оценка вида

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| \cdot |x-b|^p = 0 \quad (3.2)$$

влечет, что точка b является устранимой для отображения f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $I(\varepsilon, \varepsilon_0) = \log(\varepsilon_0/\varepsilon)$, где, как и прежде, $I(\varepsilon, \varepsilon_0)$ задается соотношением вида (2.5). Все остальное непосредственно вытекает из леммы 1 и следствия 1.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина. Предположим, что существует некоторое число $\delta > 0$ такое, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ имеет место неравенство (2.3) при

$$\varphi(t) = \exp \log^{(n-\alpha-1)/(n-1)} \left(\frac{1}{t} \right)$$

при некотором $\alpha \in (0, n-1)$, где $p > 0$ и $C > 0$ – фиксированные постоянные. Пусть, кроме того, существует измеримая по Лебегу функция $Q: D \rightarrow [1, \infty]$ такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при некотором $K > 0$

$$q_b(r) \leq K \cdot \left(\log \frac{1}{r} \right)^\alpha \quad (3.3)$$

при $r \rightarrow 0$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \text{dist}(b, \partial D)\})$. Полагаем

$$\psi(t) = \frac{1}{t}, \quad I(\varepsilon, \varepsilon_0) := \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_0} \psi(t) dt.$$

Тогда при некоторой постоянной $C_1 > 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, учитывая условие (3.3), имеем

$$\frac{1}{I^n(\varepsilon, \varepsilon_0)} \int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x) dm(x)}{|x-b|^n} \leq C_1 \cdot \frac{1}{\log^{n-\alpha-1}(1/\varepsilon)} = C_1 \log^{1-n} \varphi(\varepsilon),$$

откуда вытекает выполнение условий (2.4)–(2.5) леммы 1. Применяя эту лемму, заключаем, что точка b не может быть существенно особой для отображения f .

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина. Тогда найдется положительная постоянная $\gamma > 0$, $\gamma < 1$, со следующим свойством.

Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 \in (0, \min\{1, \text{dist}(b, \partial D)\})$, отображение f удовлетворяет более сильному, чем (2.3) (при $\varphi(t) = \exp \log^{(n-\alpha-1)/(n-1)}(1/t)$), условию

$$\lim_{x \rightarrow b} |f(x)| \cdot \exp \left\{ -\gamma \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)} \left(\frac{\varepsilon_0}{|x-b|} \right) \right\} = 0, \quad (3.4)$$

при этом, $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D$ и при $r \rightarrow 0$ выполнено условие (3.3), то f имеет устранимую особенность в точке b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 3 точка b не может быть существенно особой для отображения f . Осталось показать, что при выполнении более сильных условий (3.3)–(3.4) точка b для отображения f также не может быть полюсом. Заметим, что при достаточно большом $M_1 > 0$, некотором $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ и всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\int_{\varepsilon < |x-b| < \varepsilon_0} \frac{Q(x) dm(x)}{|x-b|^n} \leq M_1 \cdot I^{\alpha+1}(\varepsilon, \varepsilon_0). \quad (3.5)$$

Предположим, что точка b является для отображения f полюсом. Рассмотрим композицию отображений $h = g \circ f$, где $g(x) = (x-b)/|x-b|^2$ – инверсия относительно единичной сферы $S(b, 1)$. Заметим, что отображение h является дифференцируемым почти всюду, $h \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладает N - и N^{-1} -свойствам Лузина, при этом, $K_I(x, f) = K_I(x, h)$ и $h(0) = 0$. Кроме того, в некоторой окрестности нуля отображение h , по построению, является ограниченным. В таком случае, найдутся $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, и $R > 0$, такие, что $|h(x)| \leq R$ при $|x-b| < \varepsilon_2$. Согласно [10; лемма 5] и оценке (2.1) при $m = 1$, учитывая соотношение (3.5), получаем

$$|h(x)| = \frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\alpha_n(1+R^2)}{\delta} \exp \left\{ -\gamma \cdot \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|} \right\},$$

где постоянные α_n и $\gamma = (\omega_{n-1}/M_1)^{1/(n-1)}$ зависят только от n , а δ – от R . Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma < 1$. Тогда

$$|f(x)| \cdot \exp \left\{ -\gamma \cdot \log^{(n-1-\alpha)/(n-1)} \frac{\varepsilon_0}{|x-b|} \right\} \geq \frac{\delta}{\alpha_n(1+R^2)}.$$

Однако, если при этом выполнено условие (3.4), мы приходим к противоречию, что и доказывает следствие.

Пусть $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ – неубывающая функция. Тогда обратная функция Φ^{-1} может быть корректно определена следующим образом:

$$\Phi^{-1}(\tau) = \inf_{\Phi(t) \geq \tau} t, \quad (3.6)$$

Как обычно, $\inf$ в (3.6) равен ∞ , если множество $t \in [0, \infty]$ таких, что $\Phi(t) \geq \tau$, пусто. Заметим, что функция Φ^{-1} также является неубывающей.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $b \in D$ и $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – открытое дискретное дифференцируемое почти всюду отображение, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающее N - и N^{-1} -свойствам Лузина, а $Q: D \rightarrow [1, \infty)$ – некоторая функция такая, что $K_I(x, f) \leq Q(x)$ при почти всех $x \in D \setminus \{b\}$. Предположим, что существуют некоторые числа $\delta, C, p > 0$, такие, что при всех $x \in B(b, \delta) \setminus \{b\}$ и некотором $\varepsilon_0 > 0$, $\varepsilon_0 < \text{dist}(b, \partial D)$, имеет место неравенство (1.2). Кроме того, предположим, что существуют число $M > 0$, неубывающая выпуклая функция $\Phi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ и окрестность U точки b , такие что

$$\int_U \Phi(Q(x)) \frac{dm(x)}{(1 + |x|^2)^n} \leq M, \quad (3.7)$$

$$\int_{\delta_0}^{\infty} \frac{d\tau}{\tau[\Phi^{-1}(\tau)]^{1/(n-1)}} = \infty \quad (3.8)$$

при некотором $\delta_0 > \Phi(0)$. Тогда точка b является для отображения f либо полюсом, либо устранимой особой точкой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий (3.7), (3.8) и [11; теорема 3.1] следует расходимость интеграла вида

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{t q_b^{1/(n-1)}(t)} = \infty.$$

Все остальное следует из теоремы 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ дискретное отображение. Тогда f будем называть отображением с конечным искажением длины, пишем $f \in FLD$, если f дифференцируемо почти всюду в D , f обладает N - и N^{-1} -свойствам, и, кроме того, $f \in ACP \cap ACP^{-1}$. Отображения с конечным искажением длины введены в работе [12], см. также [9; раздел 8]. Их исследование тесно связано с отображениями конечного искажения, см., например, [13; гл. 6], а также работы [14]–[17].

Напоследок сформулируем еще одно важное утверждение, относящееся к одному достаточно широкому классу отображений, для которого основные результаты заметки имеют место. Напомним, что точка $x_0 \in D$ называется *точкой ветвления отображения f* , если ни в какой окрестности U точки x_0 сужение $f|_U$ не является гомеоморфизмом. Множество точек ветвления отображения f принято обозначать символом B_f . Поскольку произвольное открытое дискретное отображение $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}(D)$, для которого $K_I(x, f) \in L_{\text{loc}}^1$ и $m(B_f) = 0$, является дифференцируемым почти всюду отображением $f \in ACP \cap ACP^{-1}$, обладающим N - и N^{-1} -свойствам Лузина (в иных терминах – отображением с конечным искажением длины, см. [18; теорема 1] и [12; следствие 3.14 и предложение 4.3]), из теорем 1–4 вытекает следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Каждое из заключения теорем 1–4, а также следствий 1, 2, справедливо для произвольных открытых дискретных отображений $f: D \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{\text{loc}}^{1,n}(D \setminus \{b\})$ таких, что $K_I(x, f) \in L_{\text{loc}}^1$ и $m(B_f) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ю. Г. Решетняк, *Пространственные отображения с ограниченным искажением*, Наука, Новосибирск, 1982.
- [2] Е. А. Севостьянов, “К теории устранения особенностей отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:1 (2010), 159–174.
- [3] Е. А. Севостьянов, “О локальном поведении отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности”, *Сиб. матем. журн.*, **53**:3 (2012), 648–662.
- [4] А. А. Игнатьев, В. И. Рязанов, “К теории граничного поведения пространственных отображений”, *Укр. матем. вестник*, **3**:2 (2006), 199–211.
- [5] J. Väisälä, *Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings*, Lecture Notes in Math., **229**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [6] J. Väisälä, “Modulus and capacity inequalities for quasiregular mappings”, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I*, **509**, 1–14.
- [7] S. Rickman, *Quasiregular mappings*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **26**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [8] Е. А. Севостьянов, “Об одном модульном неравенстве для отображений с конечным искажением длины”, *Укр. матем. журн.*, **61**:5 (2009), 680–688.
- [9] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *Moduli in Modern Mapping Theory*, Springer Monogr. Math., Springer, New York, 2009.
- [10] Е. А. Севостьянов, “О нормальности семейств пространственных отображений с ветвлением”, *Укр. матем. журн.*, **60**:10 (2008), 1389–1400.
- [11] В. И. Рязанов, Е. А. Севостьянов, “Равностепенная непрерывность квазиконформных в среднем отображений”, *Сиб. матем. журн.*, **52**:3 (2011), 665–679.
- [12] O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, “Mappings with finite length distortion”, *J. Anal. Math.*, **93**:1 (2004), 215–236.
- [13] T. Iwaniec, G. Martin, *Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis*, Oxford Math. Monogr., Clarendon Press, Oxford, 2001.
- [14] C. J. Bishop, V. Ya. Gutlyanskii, O. Martio, M. Vuorinen, “On conformal dilatation in space”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, **22** (2003), 1397–1420.
- [15] V. Gutlyanskii, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov, *The Beltrami Equation: A Geometric Approach*, *Dev. Math.*, **26**, Springer, New York, 2012.
- [16] В. М. Миклюков, “Относительное расстояние М. А. Лаврентьева и простые концы на непараметрических поверхностях”, *Укр. матем. вестник*, **1**:3 (2004), 349–372.
- [17] A. Ukhlov, S. K. Vodop'yanov, “Mappings with bounded (P, Q) -distortion on Carnot groups”, *Bull. Sci. Mat.*, **134**:6 (2010), 605–634.
- [18] Е. А. Севостьянов, “Обобщение одной леммы Е. А. Полецкого на классы пространственных отображений”, *Укр. матем. журн.*, **61**:7 (2009), 969–975.

Е. А. Севостьянов

Житомирский государственный университет

им. И. Франко

E-mail: esevostyanov2009@mail.ru,

brusin2006@rambler.ru

Поступило

22.12.2012

Исправленный вариант

06.06.2014