Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ч. З. Ду, Дж. Ф. Лин, Морита-контекст, частичные
хопфовы расширения Галуа и частичная сплетающая
структура, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 50–
62

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10408>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 16:19:05

Морита-контекст, частичные хопфовы расширения Галуа и частичная сплетающая структура

Ч. З. Ду, Дж. Ф. Лин

Введено понятие правого обобщенного частичного smash-произведения и исследованы некоторые свойства этого произведения. На основании этого понятия и его свойств построен Морита-контекст для частичных кодействий кофробениусовой алгебры Хопфа. Доказано, что любое хопфово частичное расширение Галуа индуцирует единственное частичное сплетающее отображение, согласованное с правым частичным кодействием.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10408

Введение. Частичные действия групп впервые определил Эксель в контексте операторных алгебр. Оказалось, что такие действия представляют собой мощный инструмент для изучения C^* -алгебр, порожденных частичными изометриями гильбертова пространства [1]. Изучение частичных действий групп вскоре превратилось в независимую область исследований в теории колец [2]. Полученные результаты стали формулироваться в чисто алгебраическом виде, независимо от техники C^* -алгебр, из которой они возникли.

Введение частичных действий Хопфа было мотивировано предпринятой в [3] попыткой обобщения понятия частичных расширений Галуа коммутативных колец в наиболее широкий контекст. Частичные действия и кодействия Хопфа были определены в [4] Канепелом и Янссеном с использованием понятия структуры частичного сплетения. В частности, частичные действия группы G естественным образом определяют частичные действия группы групповой алгебры kG . В той же статье введено понятие частичного smash-произведения, которое в случае групповой алгебры kG превращается в скрещенное произведение $A \rtimes_{\alpha} G$ посредством частичного действия. Дальнейшее развитие теория частичных действий Хопфа получила в работе Ломпа [5]; Алвес и Батиста распространили несколько результатов теории частичных действий групп на алгебры Хопфа. Они построили Морита-контекст, который связывает подалгебры неподвижных точек частичных действий конечномерных алгебр Хопфа, а также частичное smash-произведение [6].

Работа выполнена при поддержке Национального фонда Аньхойских высших учебных заведений Китая (грант № kj2008B124) и программы поддержки молодых преподавателей Аньхойских высших учебных заведений Китая (грант № 2007jq1154).

Битти, Даскалеску и Раиану и его соавторы построили Морита-контексты, связывающие $A^{\text{co}H}$ и $A \# H^{*\text{rat}}$, где A – правая H -комодульная алгебра, для кофробениусовых алгебр Хопфа в трех разных направлениях и показали, что три полученных контекста изоморфны, т.е. связывающие бимодули изоморфны, причем соответствующие изоморфизмы согласованы с отображениями Морита-контекстов [7]. Бржезинский и Хайац ввели понятие расширения Галуа коалгебр для произвольных коалгебр как естественное обобщение хопфовых расширений Галуа и показали, что определенное ими расширение Галуа коалгебр всегда индуцирует единственное согласованное сплетающее отображение ψ [8].

В этой статье на основе упомянутых выше идей мы изучаем обобщенное частичное smash-произведение $A \#_l^H B$, где A – левая H -модульная алгебра, а B – левая частичная H -комодульная алгебра, и исследуем некоторые свойства обобщенных частичных smash-произведений $A \#_l^H B$ и $A \#_l^L B$. Мы описываем Морита-контекст, связывающий обобщенное частичное smash-произведение $A \# H^{*\text{rat}}$ и частичные коинварианты $A^{\text{co}H}$ для кофробениусовых алгебр Хопфа H , где A – частичная H -комодульная алгебра, и доказываем, что любое частичное хопфово расширение Галуа индуцирует частичное сплетающее отображение, согласованное с правым частичным действием.

Статья организована следующим образом.

В п. 2 мы изучаем обобщенное частичное smash-произведение $A \#_l^H B$, где A – левая H -модульная алгебра и B – левая частичная H -комодульная алгебра (см. предложение 2.1), а также исследуем некоторые свойства обобщенных частичных smash-произведений $A \#_l^H B$ и $A \#_l^L B$ (см. теорема 2.7).

В п. 3 мы изучаем Морита-контекст, связывающий обобщенное частичное smash-произведение $A \# H^{*\text{rat}}$ и частичные коинварианты $A^{\text{co}H}$ для кофробениусовой алгебры Хопфа H , где A – частичная H -комодульная алгебра (см. предложение 3.4).

В п. 4 мы доказываем, что любое частичное хопфово расширение Галуа индуцирует единственное частичное сплетающее отображение, согласованное с правым частичным действием (см. теорему 4.5).

1. Предварительные сведения. Фиксируем поле k и всюду ниже работаем над этим полем. Пусть M – векторное пространство над k и id_M – тождественное отображение. Операция $\otimes$ производится над полем k . Для коумножения Δ в коалгебре C с коединицей ε_C используем нотацию Свидлера–Хейнемана $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$ для любого $c \in C$ (см. статью Свидлера [9]).

Напомним некоторые основные факты, которые нам понадобятся в дальнейшем; они были доказаны Алвесом и Батистой [6], а также Битти, Даскалеску и Раиану [7].

Пусть H – алгебра Хопфа и A – алгебра. Назовем A *левой частичной H -модульной алгеброй*, если существует k -линейное отображение $\rightharpoonup: H \otimes A \rightarrow A$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) $h \rightharpoonup (ab) = \sum (h_1 \rightharpoonup a)(h_2 \rightharpoonup b)$;
- (2) $1_H \rightharpoonup a = a$;
- (3) $h \rightharpoonup (g \rightharpoonup a) = \sum (h_1 \rightharpoonup 1_A)(h_2 g \rightharpoonup a)$.

Поскольку хопфовы алгебры обладают хорошими свойствами двойственности, можно также определить понятие частичного (правого) кодействия хопфовой алгебры H на унитарной алгебре A , которое в дальнейшем играет важную роль. Пусть H – алгебра Хопфа и A – алгебра. Будем говорить, что A является *правой частичной H -комодульной алгеброй*, если существует k -линейное отображение $\rho: A \rightarrow A \otimes H$, являющееся частичной комодульной структурой и удовлетворяющее следующим условиям:

$$(\text{id}_A \otimes \varepsilon)\rho^A = \text{id}_A, \quad (1.1)$$

$$(\rho \otimes \text{id}_H)\rho(a) = (\rho(1_A) \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \Delta)\rho(a), \quad (1.2)$$

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b). \quad (1.3)$$

Будем писать $\rho(a) = a_{[0]} \otimes a_{[1]}$ для $a \in A$. Аналогичным образом определяется *левое частичное H -комодульное действие*. В рассматриваемом случае для левого частичного H -кодействия на A мы используем обозначение $\rho(a) = a_{[-1]} \otimes a_{[0]}$ ($a \in A$).

Пусть A – k -алгебра и H – алгебра Хопфа, частично кодействующая на A . Множество

$$A^{\text{co}H} := \{a \in A \mid \rho(a) = a\rho(1_A)\} \quad (1.4)$$

называется *коинвариантным* множеством k -алгебры A .

Пусть A – правая частичная H -комодульная алгебра. Рассмотрим A - A -подбимодуль

$$\underline{A \otimes H} = (A \otimes H)1_A = a1_{[0]} \otimes h1_{[1]}$$

бимодуля $A \otimes H$.

Пусть H – алгебра Хопфа и A – правая H -комодульная алгебра. Положим $B = A^{\text{co}H}$. Алгебра A является *частичным хопфовым H -расширением Галуа* алгебры B , если отображение $\text{can}: A \otimes_B A \rightarrow \underline{A \otimes H}$, определенное правилом $a \otimes_B b \rightarrow ab_{[0]} \otimes b_{[1]}$, биективно и является одновременно гомоморфизмом левых A -модулей и правых H -комодулей.

Пусть H – алгебра Хопфа. *Левым (правым) интегралом* для H называется k -линейная форма $\lambda \in H^*$, удовлетворяющая условию

$$f\lambda = f(1)\lambda \quad (\lambda g = g(1)\lambda)$$

для любого $f \in H^*$ (соответственно для любого $g \in H^*$).

Алгебра Хопфа H называется *кофробениусовой*, если пространство $\int_l$ левых интегралов (пространство $\int_r$ правых интегралов) на H ненулевое.

Напомним, что $H^{*\text{rat}}$ – единственный максимальный левый (правый) рациональный подмодуль левого (правого) H^* -модуля H^* . Подмодуль $H^{*\text{rat}}$ является *идеалом* в H^* , и он равен сумме всех конечномерных левых (правых) идеалов в $H^{*\text{rat}}$ [6]; следовательно, $H^{*\text{rat}}$ является H^* - H^* -бимодулем.

Для любой кофробениусовой алгебры Хопфа H верны следующие утверждения.

(1) Алгебра H содержит группоподобный элемент x такой, что $\lambda h^* = \langle h^*, x \rangle \lambda$ для каждого $h^* \in H^*$, $\lambda(S(h)) = \lambda(hx)$ для каждого $h \in H$ и $\lambda(S^{-1}(h)) = \lambda(xh)$ для каждого $h \in H$.

(2) Алгебра H^* является свободным левым (правым) H -модулем относительно действия, определенного правилом $(h \rightharpoonup f)(l) = f(lh)$ (соответственно $(f \leftharpoonup h)(l) = f(hl)$) для любых $f \in H^*$ и $h, l \in H$. Подалгебра $H^{*\text{rat}}$ алгебры H^* является H - H -бимодулем относительно этих действий.

2. Обобщенное частичное smash-произведение. Пусть A – левая H -модульная алгебра и B – левая частичная H -комодульная алгебра. В этом разделе мы определяем обобщенное левое частичное smash-произведение как векторное пространство

$$\underline{A \#_l^H B} = (1_A \otimes 1_B)(A \otimes B).$$

Частичное smash-произведение является подалгеброй, порожденной элементами вида

$$\underline{a \#_l^H b} = 1_{[-1]} \rightharpoonup a \otimes 1_{[0]} b$$

для всех $a \in A$ и $b \in B$ относительно умножения

$$(\underline{a \#_l^H b})(\underline{c \#_l^H d}) = \underline{a(b_{[-1]} \rightharpoonup c) \#_l^H b_{[0]} d} \quad (2.1)$$

для всех $a, c \in A$ и $b, d \in A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Пространство $\underline{A \#_l^H B}$ является ассоциативной алгеброй относительно умножения, определенного формулой (2.1), и содержит единицу $1_A \#_l^H 1_B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциативность умножения проверяется непосредственно. Проверим унитарность:

$$(1_A \#_l^H 1_B)(\underline{a \#_l^H b}) = \underline{(1_{[-1]} \rightharpoonup a) \#_l^H 1_{[0]} b} = \underline{a \#_l^H b}.$$

Аналогично,

$$(\underline{a \#_l^H b})(1_A \# 1_B) = \underline{a(b_{[-1]} \rightharpoonup 1_A) \#_l^H 1_{[0]} b} = \underline{a \#_l^H b}.$$

Это завершает доказательство предложения.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. *Пусть $A = H$. Тогда $\underline{H \#_l^H B}$ является ассоциативной алгеброй с единицей $1_H \#_l^H 1_B$.*

Аналогично, предположим, что L – алгебра Хопфа, B – правая L -модульная алгебра и A – правая частичная L -комодульная алгебра. Мы определяем обобщенное правое частичное smash-произведение $\underline{A \#_r^L B}$ с умножением

$$(\underline{a \#_r^L b})(\underline{c \#_r^L d}) = \underline{ac_{[0]} \#_l^L b \leftarrow c_{[1]} d}$$

для всех $a, c \in A$ и $b, d \in B$.

ПРИМЕР 2.3. Для любой конечномерной алгебры Хопфа H алгебра $H^{*\text{rat}}$ является правой H -модульной алгеброй относительно $(f \leftarrow h)(g) = f(hg)$ для $g, h \in H$ и $f \in H^{*\text{rat}}$. Таким образом, если A является правой частичной H -комодульной алгеброй, то можно определить правое частичное smash-произведение $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. *Пусть A – левая H -модульная алгебра и B – левая частичная H -комодульная алгебра. Предположим также, что A – правая частичная L -комодульная алгебра и B – правая L -модульная алгебра со свойством*

$$a_{[0]} \otimes b \leftarrow a_{[1]} = b_{[-1]} \rightharpoonup a \otimes b_{[0]}$$

для всех $a \in A$ и $b \in B$. Тогда существует естественный изоморфизм алгебр из $\underline{A \#_l^H B} \rightarrow \underline{A \#_r^L B}$, определенный отображением $\underline{a \#_l^H b} \rightarrow \underline{a \#_r^L b}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для отображения $\xi: \underline{A \#_l^H B} \rightarrow \underline{A \#_r^L B}$, определенного правилом $\xi(\underline{a \#_l^H b}) = \underline{a \#_r^L b}$ для $a \in A$ и $b \in B$, имеем

$$\begin{aligned} \xi((\underline{a \#_l^H b})(\underline{c \#_l^H d})) &= \xi(\underline{a(b_{[-1]} \rightharpoonup c) \#_l^H b_{[0]} d}) = \underline{a(b_{[-1]} \rightharpoonup c) \#_l^L b_{[0]} d} \\ &= \underline{ac_{[0]} \#_l^L b \leftarrow c_{[1]} d} = \underline{(a \#_r^L b)(c \#_r^L d)} = \xi(\underline{a \#_l^H b})\xi(\underline{c \#_l^H d}). \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Алгебра A называется *левой (правой) L - H -димодульной алгеброй*, если A является левой (правой) L -модульной алгеброй и левой (правой) частичной H -комодульной алгеброй, для которой H -комодульное структурное отображение является гомоморфизмом L -модулей, т.е.

$$\begin{aligned} (m \rightharpoonup a)_{[-1]} \otimes (m \rightharpoonup a)_{[0]} &= a_{[-1]} \otimes m \rightharpoonup a_{[0]}, \\ ((a \leftarrow m)_{[0]} \otimes (a \leftarrow m)_{[1]}) &= a_{[0]} \leftarrow m \otimes a_{[1]} \end{aligned}$$

для всех $m \in L$ и $a \in A$.

ЛЕММА 2.6. Пусть H и L – две алгебры Хопфа. Тогда справедливы следующие утверждения.

(1) Пусть A – левая H -модульная алгебра и B – левая L - H -димодульная алгебра. Тогда $\underline{A \#_l^H B}$ является левой L -модульной алгеброй относительно левого L -действия, индуцированного из B , т.е. определенного правилом

$$l \rightharpoonup (\underline{a \#_l^H b}) = \underline{a \#_l^H (l \rightharpoonup b)}$$

для всех $l \in L$.

(2) Пусть A – левая L - H -димодульная алгебра и B – левая частичная L -комодульная алгебра. Тогда $\underline{A \#_l^L B}$ является левой частичной H -комодульной алгеброй относительно левого частичного H -кодействия, индуцированного из A , т.е.

$$(\underline{a \#_l^L b})_{[-1]} \otimes (\underline{a \#_l^L b})_{[0]} = a_{[-1]} \otimes \underline{a_{[0]} \#_l^L b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственной проверкой.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть A – левая H -модульная алгебра, B – левая L - H -димодульная алгебра и C – левая частичная L -комодульная алгебра. Тогда отображение, переводящее $(\underline{a \#_l^H b}) \#_l^L c$ в $\underline{a \#_l^H (b \#_l^L c)}$, является естественным изоморфизмом из $(\underline{A \#_l^H B}) \#_l^L C$ в $\underline{A \#_l^H (B \#_l^L C)}$, где частичные smash-произведения $(\underline{A \#_l^H B})$ и $(\underline{B \#_l^L C})$ снабжены структурами левого L -модуля и левого частичного H -комодуля, определенными, соответственно, в утверждениях (1) и (2) леммы 2.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Можно определить правую версию теоремы 2.7 для обобщенного правого слабого smash-произведения, определенного по-другому. Здесь мы ее не приводим.

3. Морита-контекст. В этом разделе мы строим аналог Морита-контекста, построенного Битти, Даскалеску и Раиану в [7], который связывает правое обобщенное частичное smash-произведение $\underline{A \# H^{* \text{rat}}}$ и $A^{\text{co } H}$ для кофробениусовой алгебры Хопфа H , где A – частичная H -комодульная алгебра.

Пусть H – кофробениусова алгебра Хопфа и A – правая частичная H -комодульная алгебра. Тогда A является левой частичной H^* -модульной алгеброй относительно $f \rightharpoonup a = \sum \langle f, a_{[1]} \rangle a_{[0]}$ для $a \in A$ и $f \in H^*$. Определим частичное smash-произведение как векторное пространство

$$\underline{A \# H^*} = (A \otimes H^*)(1_A \otimes 1_{H^*});$$

оно является подалгеброй, порожденной элементами вида

$$\underline{a \# f} = a1_{[0]} \otimes f \leftarrow 1_{[1]}$$

для всех $a \in A$ и $f \in H^*$, где модульная структура $\leftarrow$ определена правилом $f \leftarrow h(g) = f(hg)$ для $h, g \in H$ и $f \in H^*$, относительно умножения

$$(\underline{a \# f})(\underline{b \# g}) = \underline{ab_{[0]} \# (f \leftarrow b_{[1]})g} \quad (3.1)$$

для $a, b \in A$ и $f, g \in H^*$.

В этом разделе мы предполагаем, что $\langle f, 1_{[1]} \rangle 1_{[0]}$ содержится в центре алгебры A для каждого $f \in H^*$, и рассматриваем максимальный рациональный подмодуль правого регулярного H^* -модуля H^* , который мы обозначаем через $H^{*\text{rat}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *В принятых выше обозначениях $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$ является ассоциативной алгеброй с единицей $\underline{1_A \# 1_{H^{*\text{rat}}}}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для всех $a, b, c \in A$ и $f, g, k \in H^{*\text{rat}}$ имеем

$$\begin{aligned} [(\underline{a \# f})(\underline{b \# g})](\underline{c \# k}) &\stackrel{(3.1)}{=} [\underline{ab_{[0]} \# (f \leftarrow b_{[1]})g}]c \# k \\ &= \underline{ab_{[0]}c_{[0]} \# ((f \leftarrow b_{[1]})g) \leftarrow c_{[1]})k} \\ &= \underline{ab_{[0]}1_{[0]}c_{[0]} \# ((f \leftarrow b_{[1]}1_{[1]}c_{[1]1})(g \leftarrow c_{[1]2})k} \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \underline{ab_{[0]}c_{[0][0]} \# ((f \leftarrow b_{[1]}c_{[0][1]})(g \leftarrow c_{[1]})k} \\ &= (\underline{a \# f})(\underline{(b \# g)(c \# k)}). \end{aligned}$$

Легко проверить, что $\underline{1_A \# 1_{H^{*\text{rat}}}}$ – единица.

Пусть x – любой группоподобный элемент H . Для алгебры A можно определить левое и правое smash-произведение $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$. Для любых $a, b \in A$ и $f \in H^{*\text{rat}}$ левая и правая модульные структуры определены отношениями

$$(\underline{a \# f}) \cdot b = \sum ab_{[0]} \langle f, b_{[1]}x \rangle, \quad (3.2)$$

$$b \cdot (\underline{a \# f}) = \sum b_{[0]}a_{[0]} \langle f, S^{-1}(b_{[1]}a_{[1]})x \rangle. \quad (3.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Для любого группоподобного элемента x алгебра A является $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$ - $A^{\text{co}H}$ -бимодулем и $A^{\text{co}H}$ - $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$ -бимодулем со структурой модуля, определенной формулами (3.2), (3.3), и обычной структурой $A^{\text{co}H}$ -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проверим, что A является левым $\underline{A \# H^{*\text{rat}}}$ -модулем. Для $a, b, c \in A$ и $f, g \in H^{*\text{rat}}$ имеем

$$[(\underline{a \# f})(\underline{b \# g})] \cdot c \stackrel{(3.1), (3.2)}{=} \sum ab_{[0]}c_{[0]} \langle (f \leftarrow b_{[1]})g, c_{[1]}x \rangle$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(1.3)}{=} \sum ab_{[0]}1_{[0]}c_{[0]}\langle f \leftarrow b_{[1]}1_{[1]}, c_{[1]1}x \rangle \langle g, c_{[1]2}x \rangle \\
& \stackrel{(1.2)}{=} \sum ab_{[0]}c_{[0][0]}\langle f \leftarrow b_{[1]}, c_{[0]1}x \rangle \langle g, c_{[1]}x \rangle \\
& = (\underline{a \# f}) \cdot [(\underline{b \# g}) \cdot c].
\end{aligned}$$

Теперь проверим, что A является правым $\underline{A \# H^{* \text{rat}}}$ -модулем. Для $a, b, c \in A$ и $f, g \in H^{* \text{rat}}$ имеем

$$\begin{aligned}
& c \cdot [(\underline{a \# f})(\underline{b \# g})] \\
& \stackrel{(3.1)}{=} \sum c \cdot [\underline{ab_{[0]} \# (f \leftarrow b_{[1]})g}] \\
& \stackrel{(3.3)}{=} \sum c_{[0]}(a_{[0]}b_{[0][0]})\langle (f \leftarrow b_{[1]})g, S^{-1}(c_{[1]}a_{[1]}b_{[0][1]}x) \rangle \\
& \stackrel{(1.2)}{=} \sum c_{[0]}(a_{[0]}1_{[0]}b_{[0]})\langle (f \leftarrow b_{[1]2})g, S^{-1}(c_{[1]}a_{[1]}1_{[1]}b_{[1]1}x) \rangle \\
& \stackrel{(1.3)}{=} \sum c_{[0]}(a_{[0]}b_{[0]})\langle (f \leftarrow b_{[1]2})g, S^{-1}(c_{[1]}a_{[1]}b_{[1]1}x) \rangle \\
& = \sum c_{[0]}(a_{[0]}b_{[0]})\langle g, S^{-1}(c_{[1]1}a_{[1]1}b_{[1]11}x) \rangle \langle f, b_{[1]2}S^{-1}(c_{[1]2}a_{[1]2}b_{[1]12}x) \rangle \\
& = \sum (1_{[0]}c_{[0]}a_{[0]})b_{[0]}\langle f, S^{-1}(c_{[1]2}a_{[1]2}x) \rangle \langle g, S^{-1}(1_{[1]}c_{[1]1}a_{[1]1}b_{[1]}x) \rangle \\
& = [c \cdot (\underline{a \# f})] \cdot (\underline{b \# g}).
\end{aligned}$$

Наконец, легко проверить, что A является одновременно $\underline{A \# H^{* \text{rat}}}$ - $A^{\text{co} H}$ -бимодулем и $A^{\text{co} H}$ - $\underline{A \# H^{* \text{rat}}}$ -бимодулем. Покажем, что

$$(cb) \cdot (\underline{a \# f}) = c \cdot (b \cdot (\underline{a \# f}))$$

для всех $c \in A^{\text{co} H}$, $b \in A$ и $f \in H^{* \text{rat}}$. Действительно,

$$\begin{aligned}
(cb) \cdot (\underline{a \# f}) & \stackrel{(3.3)}{=} \sum (cb)_{[0]}a_{[0]}\langle f, S^{-1}((cb)_{[1]}a_{[1]}) \rangle \\
& \stackrel{(1.4)}{=} c \cdot (b \cdot (\underline{a \# f})).
\end{aligned}$$

Рассмотрим отображения, определенные правилами

$$\begin{aligned}
\vartheta: \underline{A \# H^{* \text{rat}}} & \rightarrow \text{End}_k(A_{A^{\text{co} H}}), & \vartheta(\underline{a \# f})(b) &= (\underline{a \# f}) \cdot b \\
\theta: \underline{A \# H^{* \text{rat}}} & \rightarrow \text{End}_k(A^{\text{co} H} A)^{\text{op}}, & \theta(\underline{a \# f})(b) &= b \cdot (\underline{a \# f})
\end{aligned}$$

для всех $a, b \in A$ и $f \in H^{* \text{rat}}$.

Справедливо следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В принятых выше обозначениях ϑ и θ являются гомоморфизмами алгебр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть λ – ненулевой левый интеграл. Тогда в принятых выше обозначениях определен Морита-контекст $(\underline{A \# H^{* \text{rat}}}, A^{\text{co} H}, \tau, \mu)$, где отображения определены правилами

$$\begin{aligned}
\tau: A \otimes_{A^{\text{co} H}} A & \rightarrow \underline{A \# H^{* \text{rat}}}, & \tau(a \otimes b) &= \sum \underline{ab_{[0]} \# (\lambda \leftarrow b_{[1]})}, \\
\mu: A \otimes_{\underline{A \# H^{* \text{rat}}}} A & \rightarrow A^{\text{co} H}, & \mu(a \otimes b) &= \sum a_{[0]}b_{[0]}\langle \lambda, a_{[1]}b_{[1]} \rangle
\end{aligned}$$

для всех $a, b \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Отображение τ является гомоморфизмом $A \# H^{*\text{rat}}$ -бимодулей; кроме того, это отображение $A^{\text{co}H}$ -линейно. Проверим, что τ является гомоморфизмом левых $A \# H^{*\text{rat}}$ -модулей. Действительно,

$$\begin{aligned} (c \# f)\tau(a \otimes b) &\stackrel{(3.1), (1.2), (1.3)}{=} \sum ca_{[0]}b_{[0]} \# ((f \leftarrow a_{[1]})\lambda \leftarrow b_{[1]}) \\ &= \sum ca_{[0]}b_{[0]} \# \langle f, a_{[1]} \rangle (\lambda \leftarrow b_{[1]}) \\ &= \tau((c \# f) \cdot a \otimes b) \end{aligned}$$

для всех $a, b, c \in A$ и $f \in H^{*\text{rat}}$.

Теперь покажем, что τ является гомоморфизмом правых $A \# H^{*\text{rat}}$ -модулей:

$$\begin{aligned} \tau(a \otimes b \cdot (c \# f)) &\stackrel{(3.3), (1.2), (1.3)}{=} \sum ab_{[0]}c_{[0]} \# \lambda \leftarrow b_{[1]1}c_{[1]1} \langle f \leftarrow S^{-1}(b_{[1]2}c_{[1]2}), x \rangle \\ &= \sum ab_{[0]}c_{[0]} \# [\lambda(f \leftarrow S^{-1}(b_{[1]2}c_{[1]2}))] \leftarrow b_{[1]1}c_{[1]1} \\ &= \sum ab_{[0]}c_{[0]} \# (\lambda \leftarrow b_{[1]1}c_{[1]1})f \\ &= \tau(a \otimes b)(c \# f). \end{aligned}$$

Наконец, для $c \in A^{\text{co}H}$ имеем

$$\tau(ac, b) = \sum acb_{[0]} \# (\lambda \leftarrow b_{[1]}) = \sum a(cb)_{[0]} \# (\lambda \leftarrow (cb)_{[1]}) = \tau(a, cb).$$

(2) Отображение μ является гомоморфизмом $A^{\text{co}H}$ -бимодулей, и это отображение $A \# H^{*\text{rat}}$ -линейно. Легко проверить, что μ является гомоморфизмом $A^{\text{co}H}$ -бимодулей: для этого достаточно показать, что μ $A \# H^{*\text{rat}}$ -линейно. Для $a, b, c \in A$ и $f \in H^{*\text{rat}}$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(a \cdot (c \# f) \otimes b) &\stackrel{(3.3), (1.2), (1.3)}{=} \sum 1_{[0]}a_{[0]}c_{[0]}b_{[0]} \langle \lambda, 1_{[1]}a_{[1]1}c_{[1]1}b_{[1]1} \rangle \langle f \leftarrow S^{-1}(a_{[1]2}c_{[1]2}), x \rangle \\ &= \sum a_{[0]}c_{[0]}b_{[0]} \langle \lambda, a_{[1]1}c_{[1]1}b_{[1]1} \rangle \langle f, b_{[1]2}x \rangle \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \sum a_{[0]}c_{[0]}b_{[0]} \# \langle \lambda, a_{[1]1}c_{[1]1}b_{[0]1} \rangle \langle f, b_{[1]1}x \rangle \\ &= \mu(a \otimes (c \# f) \cdot b). \end{aligned}$$

(3) Нетрудно проверить, что τ и μ удовлетворяют условию ассоциативности. Это завершает доказательство предложения 3.4.

Аналогично, предположим, что A является $A \# H^{*\text{rat}}$ - $A^{\text{co}H}$ -бимодулем, содержащим группоподобный элемент ζ , но его структура левого $A \# H^{*\text{rat}}$ -модуля определяется как

$$(a \# f) \cdot b = ab_{[0]} \langle f, b_{[1]}\zeta^{-1} \rangle$$

для всех $f \in H^{*\text{rat}}$.

Пусть $A - A^{\text{co}H}$ - $A \# H^{*\text{rat}}$ -бимодуль, но структура правого $A \# H^{*\text{rat}}$ -модуля на нем определена как

$$b \cdot (A \# H^{*\text{rat}}) = b_{[0]}a_{[0]} \langle f, S^{-1}(b_{[1]}a_{[1]}) \rangle.$$

Еще один аналог введенного выше Морита-контекста определяется в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть λ – ненулевой левый интеграл. Тогда во введенных выше обозначениях определен Морита-контекст $(\underline{A \# H^{* \text{rat}}}, A^{\text{co } H}, \tau', \mu')$, где отображения определены правилами

$$\begin{aligned} \tau' : A \otimes_{A^{\text{co } H}} A &\rightarrow \underline{A \# H^{* \text{rat}}}, & \tau'(a \otimes b) &= \sum \underline{ab_{[0]} \# (S^{-1}(\lambda) \leftarrow b_{[1]})}, \\ \mu' : A \otimes_{\underline{A \# H^{* \text{rat}}}} A &\rightarrow A^{\text{co } H}, & \mu'(a \otimes b) &= \sum a_{[0]} b_{[0]} \langle \lambda, a_{[1]} b_{[1]} \rangle. \end{aligned}$$

4. Частичные хопфовы расширения Галуа и частичные сплетающие структуры. Напомним некоторые важные понятия из статьи [4] Канепела и Янсена. Пусть H – алгебра Хопфа и A – алгебра. Скажем, что H и A *частично сплетены*, если найдется k -линейное отображение $\psi : H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, удовлетворяющее следующим условиям ($\phi = \psi$):

$$(ab)_\psi \otimes h^\psi = a_\phi b_\psi \otimes h^{\phi\psi}, \quad (4.1)$$

$$a_\psi 1_\phi \otimes (h_1^\psi)^\phi \otimes h_2^\psi = a_{\psi\phi} \otimes h_1^\phi \otimes h_2^\psi, \quad (4.2)$$

$$a_\psi \otimes \varepsilon(h^\psi) = a\varepsilon(h) \quad (4.3)$$

для всех $h \in H$, $a \in A$. Тройка (A, H, ψ) называется *структурой* частичного право-правового сплетения и обозначается через $(A, H)_\psi$. Отображение ψ называется *частичным сплетением*. Для $h \in H$ и $a, b \in A$ мы используем обозначение $\psi(h \otimes a) = a_\psi \otimes h^\psi$.

Имея структуру частичного право-правового сплетения $(A, H)_\psi$, можно определить категорию $\mathcal{M}_A^H(\psi)$ правых $(A, H)_\psi$ -модулей. Объектами категории $\mathcal{M}_A^H(\psi)$ являются правые частичные H -комодули M , являющиеся правыми A -модулями, для кото-

$$\rho^A(m \cdot a) = m_{[0]} \cdot \psi(m_{[1]} \otimes a) := m_{[0]} \cdot a_\psi \otimes m_{[1]}^\psi. \quad (4.4)$$

Морфизмы в $A \in \mathcal{M}_A^H(\psi)$ – гомоморфизмы правых H -комодулей и правых A -модулей.

ЛЕММА 4.1. Отображения $\rho^{H \otimes A} : (H \otimes A) \rightarrow (H \otimes A) \otimes H$, превращающие $H \otimes A$ в частичный правый H -комодуль, находятся во взаимнооднозначном соответствии с отображениями $\psi : H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, удовлетворяющими условиям (4.2), (4.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим отображение $\psi : H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, удовлетворяющее условиям (4.2), (4.3). Пусть отображение

$$\rho^{H \otimes A} : (H \otimes A) \rightarrow (H \otimes A) \otimes H$$

определено правилом

$$\rho(h \otimes a) = (h_1 \otimes a_\psi) \otimes h_2^\psi$$

для всех $h \in H$ и $a \in A$. Покажем, что $H \otimes A$ – частичный правый H -комодуль. Действительно, для любых $h \in H$ и $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned}
 (\rho \otimes \text{id}_H)\rho(h \otimes a) &= (\rho \otimes \text{id}_H)(h_1 \otimes a_\psi) \otimes h_1^\psi \\
 &= (h_{11} \otimes a_{\psi\phi}) \otimes h_{12}^\phi \otimes h_1^\psi \\
 &= (h_1 \otimes a_{\psi\phi}) \otimes h_{21}^\phi \otimes h_{22}^\psi \\
 &\stackrel{(4.2)}{=} h_1 \otimes a_\psi 1_\phi \otimes h_{21}^{\psi\phi} \otimes h_{22}^\psi \\
 &= (\text{id}_H \otimes \rho(1_{H \otimes A}) \otimes \text{id}_H)(\text{id}_H \otimes \text{id}_A \otimes \Delta)\rho(h \otimes a), \\
 (\text{id}_{H \otimes A} \otimes \varepsilon)\rho(h \otimes a) &= h_1 \otimes a_\psi \otimes \varepsilon(h_2^\psi) \\
 &\stackrel{(4.3)}{=} h_1 \otimes a\varepsilon(h_2) = h \otimes a.
 \end{aligned}$$

Обратно, предположим, что $\rho^{H \otimes A}: (H \otimes A) \rightarrow (H \otimes A) \otimes H$ – частичный правый H -комодуль. Определим отображение $\psi: H \otimes A \rightarrow A \otimes H$ правилом

$$\psi(h \otimes a) := (\varepsilon \otimes \text{id}_{A \otimes H})\rho(h \otimes a)$$

для $h \in H$ и $a \in A$.

Выполнение условий (4.2), (4.3) легко проверяется.

ЛЕММА 4.2. *k -Линейные отображения $\mu^{A \otimes H}: A \otimes H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, удовлетворяющие условиям*

$$\mu(\mu \otimes \text{id}_A) = \mu(\text{id}_{A \otimes H} \otimes m), \quad (4.5)$$

$$\mu(m \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A) = (m \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \mu), \quad (4.6)$$

находятся во взаимнооднозначном соответствии с отображениями $\psi: H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, удовлетворяющими условию (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что отображение $\mu^{A \otimes H}$ удовлетворяет условиям (4.5) и (4.6). Для отображения $\psi: H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, определенного правилом $h \otimes a \rightarrow \mu(1_A \otimes c \otimes a)$, имеем

$$\begin{aligned}
 (m \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \psi)(\psi \otimes \text{id}_A) &= (m \otimes \text{id}_H)(\text{id}_A \otimes \mu)(\text{id}_A \otimes 1_A \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A)(\psi \otimes \text{id}_A) \\
 &\stackrel{(4.6)}{=} \mu(m \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A)(\text{id}_A \otimes 1_A \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A)(\psi \otimes \text{id}_A) \\
 &= \mu(\psi \otimes \text{id}_A) \\
 &= \mu(\mu \otimes \text{id}_A)(1_A \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A \otimes \text{id}_A) \\
 &\stackrel{(4.5)}{=} \mu(\text{id}_A \otimes \text{id}_H \otimes m)(1_A \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A \otimes \text{id}_A) \\
 &= \mu(1_A \otimes \text{id}_H \otimes \text{id}_A)(\text{id}_H \otimes m) \\
 &= \psi(\text{id}_H \otimes m).
 \end{aligned}$$

Обратно, предположим, что отображение ψ удовлетворяет условию (4.1). Определим отображение $\mu^{A \otimes H}: A \otimes H \otimes A \rightarrow A \otimes H$ правилом $\mu(a \otimes h \otimes b) = ab \otimes h$ для всех $a, b \in A$ и $h \in H$. Несложно проверить, что выполнены условия (4.5) и (4.6).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пары отображений $(\rho^{H \otimes A}, \mu^{A \otimes H})$, где отображение $\rho^{H \otimes A}: (H \otimes A) \rightarrow (H \otimes A) \otimes H$ превращает $H \otimes A$ в объект, подобный частичному правому H -комодулю, а $\mu^{A \otimes H}: A \otimes H \otimes A \rightarrow A \otimes H$ — k -линейное отображение, удовлетворяющее условиям (4.5) и (4.6), а также условию

$$\mu(1 \otimes h \otimes a) = (\varepsilon \otimes \text{id}_A \otimes \text{id}_H) \rho(h \otimes a) \quad (4.7)$$

для любых $h \in H$ и $a \in A$, находятся во взаимнооднозначном соответствии с частичными сплетающими структурами (A, H, ψ) .

Рассмотрим отображение $T: \underline{1 \otimes H} = 1_{[0]} \otimes H 1_{[1]} \rightarrow A \otimes A$, определенное правилом

$$T(\underline{1 \otimes H}) = \text{can}^{-1}(\underline{1 \otimes H}).$$

Для $h \in H$ положим

$$T(1_{[0]} \otimes h 1_{[1]}) = 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 \otimes (h 1_{[1]})^2.$$

ЛЕММА 4.4. Выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} (LP1) \quad & 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1(h 1_{[1]})^2 = \varepsilon(h) 1_A; \\ (LP2) \quad & a_{[0]}(a_{[1]})^1 \otimes (a_{[1]})^2 = 1_A \otimes a; \\ (LP3) \quad & 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 \otimes (h 1_{[1]})^2_{[0]} \otimes (h 1_{[1]})^2_{[1]} = 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 \otimes (h 1_{[1]})^2 \otimes (h 2 1_{[2]}). \end{aligned}$$

Эта лемма доказывается непосредственной проверкой.

Следующая теорема — основной результат этого раздела.

ТЕОРЕМА 4.5. Пусть A — хопфово частичное расширение H -Галуа алгебры $B = A^{\text{co } H}$. Тогда существует единственное частичное отображение $\psi: H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, сплетающее H с A и такое, что A является объектом категории $\mathcal{M}_A^H$ со структурными отображениями m и ρ^A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $h \in H$ и $a \in A$ положим

$$\begin{aligned} \psi(h \otimes a) &= \text{can}(\text{id} \otimes m)(T(1_{[0]} \otimes h 1_{[1]}) \otimes a) \\ &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1((h 1_{[1]})^2 a)_{[0,0]} \otimes ((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]}. \end{aligned}$$

По определению отображения T имеем

$$\begin{aligned} (ab)_\psi \otimes h^\psi &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1((h 1_{[1]})^2 ab)_{[0]} \otimes ((h 1_{[1]})^2 ab)_{[1]} \\ &\stackrel{(LP2), (1.3)}{=} 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1((h 1_{[1]})^2 a)_{[0]} 1_{[0]}(((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]} 1_{[1]})^1 \\ &\quad \times [(((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]} 1_{[1]})^2 b]_{[0]} \otimes [(((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]} 1_{[1]})^2 b]_{[1]} \\ &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1((h 1_{[1]})^2 a)_{[0]} b_\psi \otimes ((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]}^\psi \\ &= a_\phi b_\psi \otimes h^{\phi\psi}, \end{aligned}$$

откуда вытекает (4.1). Аналогично, для всех $h \in H$ и $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} a_{\psi_1} \otimes \varepsilon(h^{\psi_1}) &= (\text{id} \otimes \varepsilon)[1_{[0]}(h 1_{[1]})^1((h 1_{[1]})^2 a)_{[0]} \otimes ((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]}] \\ &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1(h 1_{[1]})^2 a = a\varepsilon(h), \end{aligned}$$

откуда вытекает (4.3). Кроме того,

$$\begin{aligned}
 a_{\psi\phi} \otimes h_1^\phi \otimes h_2^\psi &= 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 [(h_1 1_{[1]})^2 1_{[0]}(h_2 1_{[1]})^1 [(h_2 1_{[1]})^2] a]_{[0]}]_{[0]} \\
 &\quad \otimes [(h_1 1_{[1]})^2 1_{[0]}(h_2 1_{[1]})^1 [(h_2 1_{[1]})^2] a]_{[0]}]_{[1]} \otimes [(h_2 1_{[1]}) a]_{[1]} \\
 &= 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 (h_1 1_{[1]})_{[0]}^2 1_{[0]}(h_2 1_{[1]})^1 [(h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[0]} \\
 &\quad \otimes (h_1 1_{[1]})_{[1]}^2 1_{[0]}(h_2 1_{[1]})^1 [(h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[1]} \otimes [(h_2 1_{[1]}) a]_{[1]} \\
 &= 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 (h_1 1_{[1]})_{[0]}^2 1_{[0]}[(h_2 1_{[2]})^1 (h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[0]} \\
 &\quad \otimes (h_1 1_{[1]})_{[1]}^2 1_{[1]}[(h_2 1_{[2]})^1 (h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[1]} \otimes [(h_2 1_{[2]}) a]_{[1]} \\
 &\stackrel{(1.3)}{=} 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 [(h_1 1_{[1]})^2 (h_2 1_{[2]})^1 [(h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[0]} \\
 &\quad \otimes [(h_1 1_{[1]})^2 (h_2 1_{[2]})^1 [(h_2 1_{[2]})^2] a]_{[0]}]_{[1]} \otimes [(h_2 1_{[2]}) a]_{[1]} \\
 &\stackrel{(LP3)}{=} 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 [(h_1 1_{[1]})_{[0]}^2 (h_1 1_{[1]})_{[1]}^2]_{[1]}^1 [(h_1 1_{[1]})_{[1]}^2]_{[1]}^2 a]_{[0]}]_{[0]} \\
 &\quad \otimes [(h_1 1_{[1]})_{[0]}^2 (h_1 1_{[1]})_{[1]}^2]_{[1]}^1 [(h_1 1_{[1]})_{[1]}^2]_{[1]}^2 a]_{[0]}]_{[1]} \otimes [(h_1 1_{[1]})_{[1]}^2]_{[1]} a]_{[1]} \\
 &\stackrel{(LP2)}{=} 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[0]}]_{[0]} \otimes ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[0]}]_{[1]} \otimes ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[1]} \\
 &\stackrel{(1.2)}{=} 1_{[0]}(h_1 1_{[1]})^1 ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[0]}]_{[0]} \otimes ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[1]} 1_{[0]} \otimes ((h_1 1_{[1]})^2 a)_{[1]} 2 \\
 &= a_{\psi} 1_{\phi} \otimes (h_1^{\psi})^{\phi} \otimes h_2^{\psi},
 \end{aligned}$$

что доказывает (4.2).

Для любых $a, b \in A$ имеем

$$b_{[0]} \cdot a_{\psi} \otimes b_{[1]}^{\psi} = b_{[0]} b_{[1]}^1 (b_{[1]}^2 a)_{[0]} \otimes (b_{[1]}^2 a)_{[1]} = (ba)_{[0]} \otimes (ba)_{[1]} = \rho^A(ba),$$

откуда $A \in \mathcal{M}_A^H(\psi)$. Проверим единственность частичного сплетающего отображения ψ . Предположим, что существует частичное сплетающее отображение $\phi: H \otimes A \rightarrow A \otimes H$, для которого $A \in \mathcal{M}_A^H(\phi)$. Тогда для любых $h \in H$ и $a \in A$

$$\begin{aligned}
 \psi(h \otimes a) &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 ((h 1_{[1]})^2 a)_{[0]} \otimes ((h 1_{[1]})^2 a)_{[1]} \\
 &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 \rho_{\alpha}^A((h 1_{[1]})^2 a) \\
 &= 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 ((h 1_{[1]})^2)_{[0]} \phi(((h 1_{[1]})^2)_{[1]} \otimes a) \\
 &\stackrel{(LP2)}{=} 1_{[0]}(h 1_{[1]})^1 (h 1_{[1]})^2 \phi(h 1_{[2]}) \otimes a \\
 &= \phi(h \otimes a),
 \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемое утверждение.

Авторы благодарят рецензента за полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R. Exel, “Circle actions on C^* -algebras, partial automorphisms and generalized Pimsner–Voiculescu exact sequences”, *J. Funct. Anal.*, **122**:2 (1994), 361–401.
- [2] M. Dokuchaev, R. Exel, “Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:5 (2005), 1931–1952.

- [3] M. Dokuchaev, M. Ferrero, A. Paques, “Partial actions and Galois theory”, *J. Pure Appl. Algebra*, **208**:1 (2007), 77–87.
- [4] S. Caenepeel, K. Janssen, “Partial (co)actions of Hopf algebras and partial Hopf–Galois theory”, *Comm. Algebra*, **36**:8 (2008), 2923–2946.
- [5] C. Lomp, “Duality for partial group actions”, *Int. Electron. J. Algebra*, **4** (2008), 53–62.
- [6] M. M. S. Alves, E. Batista, *Partial Hopf Actions, Partial Invariants and a Morita Context*, arXiv: math.RA/0901.0959v2.
- [7] M. Beattie, S. Dăscălescu, Ș. Raianu, “Galois extensions for co-Frobenius Hopf algebras”, *J. Algebra*, **198**:1 (1997), 164–183.
- [8] T. Brzeziński, “On modules associated to coalgebra-Galois extensions”, *J. Algebra*, **215**:1 (1999), 290–317.
- [9] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Math. Lecture Note Ser., W. A. Benjamin, New York, 1969.

Ч.З. Ду

School of Mathematical Science, Huaibei Normal
University, Китай
E-mail: dcz006@163.com

Поступило

22.11.2011

Исправленный вариант

17.11.2012

Дж.Ф. Лин

School of Mathematical Science, Huaibei Normal
University, Китай