Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Карташова, Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 80–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10409>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:10:59

Коммутативные унарные алгебры с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций

А. В. Карташова

Описан класс всех коммутативных унарных алгебр с произвольным числом операций, решетка конгруэнций которых линейно упорядочена.

Библиография: 13 названий.

DOI: 10.4213/mzm10409

1. Введение. *Унарной алгеброй* называется алгебра, сигнатура которой состоит из унарных символов. Любую унарную алгебру, очевидно, можно рассматривать как автомат без выхода. Поэтому унарные алгебры привлекали внимание многих исследователей. Значительное место в этих исследованиях занимают решетки конгруэнций унарных алгебр, которые несут важную информацию о свойствах самих алгебр. Интерес к решеткам конгруэнций унарных алгебр объясняется также тем фактом, что решетка конгруэнций произвольной универсальной алгебры совпадает с решеткой конгруэнций подходящей унарной алгебры с тем же основным множеством.

Исследования достаточно глубоко продвинуты для случая решеток конгруэнций унаров, т.е. алгебр с одной унарной операцией. В [1] описаны унары, решетка конгруэнций которых либо полумодулярна сверху, либо атомарна. В [2] и [3] найдены условия, при которых решетка конгруэнций унара является решеткой с дополнениями, дистрибутивной, модулярной, цепью, либо стоуновой решеткой.

Решетки конгруэнций унарных алгебр, сигнатура которых содержит более одной операции, изучены мало. Такие решетки рассматривались рядом авторов (см., например, [4]–[6]). Однако, к настоящему времени для них получено значительно меньше результатов, имеющих окончательный характер.

Напомним, что частично упорядоченное множество $\langle M, \leq \rangle$ называется *линейно упорядоченным* (или *цепью*), если любые два элемента $a, b \in M$ сравнимы между собой (т.е. $a \leq b$ или $b \leq a$).

В данной работе охарактеризованы коммутативные унарные алгебры с произвольным числом операций, решетка конгруэнций которых линейно упорядочена (теорема 1). При этом для алгебр с конечным числом операций получено, на наш взгляд, более наглядное описание (теорема 2). Установлено также, что линейно упорядоченная решетка конгруэнций коммутативной унарной алгебры с конечным числом операций изоморфна решетке конгруэнций некоторого унара той же мощности (следствие 1 из теоремы 2). Показано, что условие конечности сигнатуры

в теореме 2 и в следствии из нее существенно. Результаты работы анонсированы в [7].

2. Основные определения и вспомогательные результаты. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – произвольная унарная алгебра. Через Ω^* обозначается свободный моноид слов с порождающим множеством Ω относительно композиции. Единицей в Ω^* служит пустое слово $\emptyset$.

В дальнейшем $\mathbb{N}$ всюду означает множество положительных целых чисел и $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Результат $w(a)$ применения слова $w \in \Omega^*$ к элементу $a \in A$ определяется индукцией по длине слова w (см. [8; с. 142]). Отсюда, если $w = w_1 w_2$, то $w(a) = w_1(w_2(a))$, где $w, w_1, w_2 \in \Omega^*$ и $a \in A$.

По определению также полагаем $f^0(a) = \emptyset a = a$, $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$ для произвольных $f \in \Omega$, $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

Для любого слова $u \in \Omega^*$ определим отображение $\delta_u: A \rightarrow A$ равенством

$$\delta_u(a) = u(a) \quad (2.1)$$

для любого $a \in A$.

Множество $\{\delta_u \mid u \in \Omega^*\}$ образует полугруппу $S(\mathfrak{A})$ относительно композиции. Эта полугруппа называется *характеристической полугруппой унарной алгебры* $\mathfrak{A}$ (см. [9]).

Для любого элемента a произвольной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ через (a) обозначается подалгебра, порожденная элементом a .

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной*, если $f(g(a)) = g(f(a))$ для всех $f, g \in \Omega$ и $a \in A$.

Очевидно, что для любой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ бинарное отношение

$$\eta = \{(a, b) \in A \times A \mid (a) \cap (b) \neq \emptyset\}$$

является конгруэнцией этой алгебры.

Классы этой конгруэнции называются *компонентами связности* алгебры $\mathfrak{A}$. Легко проверить, что каждая компонента связности будет подалгеброй этой алгебры.

Коммутативная унарная алгебра называется *связной*, если она имеет ровно одну компоненту связности.

Унарная алгебра называется *сильно связной*, если она порождается любым своим элементом.

Очевидно, что если связная алгебра $\mathfrak{A}$ содержит сильно связную подалгебру, то эта подалгебра является наименьшей по включению. Будем называть ее *ядром* алгебры $\mathfrak{A}$.

Элемент a алгебры $\mathfrak{A}$ будем называть *циклическим*, если он содержится в ядре некоторой ее компоненты связности, и *ациклическим*, в противном случае.

Элемент e унарной алгебры $\mathfrak{A}$ называется *петлей*, если подалгебра (e) одноэлементна.

Пусть $\mathfrak{B} = \langle B, \Omega \rangle$ – подалгебра унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$. Тогда *конгруэнцией Рисса* $R(\mathfrak{B})$ называется (см., например, [10; с. 35]) конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$, определенная по правилу

$$aR(\mathfrak{B})b \iff (a = b) \vee \{a, b\} \subseteq B$$

для любых $a, b \in A$.

Если $\mathfrak{B} = (a)$ для некоторого элемента $a \in A$, то конгруэнцию $R(\mathfrak{B})$ будем обозначать через $R(a)$.

Из определения конгруэнции Рисса непосредственно вытекает

ЛЕММА 1. Пусть $\mathfrak{A}$ – коммутативная унарная алгебра, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ – ее подалгебры, для которых $R(\mathfrak{B}) \subseteq R(\mathfrak{C})$. Тогда, если $|\mathfrak{B}| \neq 1$ либо $\mathfrak{A}$ – связная алгебра, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $|\mathfrak{B}| \neq 1$ и $a, b \in \mathfrak{B}$, $a \neq b$. Тогда $(a, b) \in R(\mathfrak{B})$, откуда $(a, b) \in R(\mathfrak{C})$, поскольку $R(\mathfrak{B}) \subseteq R(\mathfrak{C})$. Следовательно, $a, b \in \mathfrak{C}$ и, значит, $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.

Допустим теперь, что $\mathfrak{A}$ – связная алгебра и $|\mathfrak{B}| = 1$. Тогда $\mathfrak{B}$ является наименьшей по включению среди всех подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$. Поэтому $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Лемма доказана.

Далее через $\text{Sub } \mathfrak{A}$ и $\text{Con } \mathfrak{A}$ обозначаются соответственно решетка подалгебр и решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$.

Объединение двух непересекающихся коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ обозначим через $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$.

ЛЕММА 2. Если решетка конгруэнций коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A}$ является цепью, то алгебра $\mathfrak{A}$ либо связна, либо имеет ровно две компоненты связности, при этом, по крайней мере, одна из них одноэлементна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_3$ – три различные компоненты связности алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда по лемме 1 конгруэнции Рисса $R(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)$ и $R(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_3)$ не сравнимы, что противоречит условию.

Пусть теперь алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из двух неоднородных компонент связности $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$. Тогда в силу леммы 1 не сравнимы конгруэнции $R(\mathfrak{A}_1)$ и $R(\mathfrak{A}_2)$, что также противоречит условию. Лемма доказана.

Далее для любого простого числа p через $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, как обычно, обозначается группа типа p^∞ , а через $\mathbb{Z}_{p^k}$ – циклическая группа порядка p^k ($k \in \mathbb{N}_0$). Следуя [6], каждую из таких групп будем называть *коциклической*.

Сильно связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *коциклической*, если ее характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{A})$ является коциклической группой. Описание коциклических унарных алгебр приведено в работе [6].

ЛЕММА 3. Решетка конгруэнций произвольной сильно связной коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ линейно упорядочена тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}$ является коциклической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 1 [9] характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{A})$ коммутативной сильно связной алгебры $\mathfrak{A}$ является абелевой группой и $\text{Con } \mathfrak{A} \cong \text{Sub } S(\mathfrak{A})$. Отсюда из следствия 78.3 в [11] вытекает, что решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ линейно упорядочена тогда и только тогда, когда $S(\mathfrak{A})$ – коциклическая группа. Лемма доказана.

Будем говорить, что алгебра $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega' \rangle$ получена из алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ *присоединением петли* e , если выполнены следующие условия:

- 1) $A = A' \setminus \{e\}$, $\Omega \subseteq \Omega'$;
- 2) алгебра $\mathfrak{A}$ является подалгеброй редукта $\langle A', \Omega \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}'$;
- 3) $(\forall f \in \Omega')(f(e) = e)$;
- 4) $(\forall f \in \Omega' \setminus \Omega)(f(A) = \{e\})$.

Заметим, что при $\Omega = \Omega'$ алгебра $\mathfrak{A}'$ получается из $\mathfrak{A}$ присоединением петли в качестве новой связной компоненты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A}' = \langle A', \Omega' \rangle$ получена из сильно связной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ присоединением некоторой петли e . Тогда решетка $\text{Con } \mathfrak{A}'$ конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}'$ изоморфна решетке, полученной из решетки $\text{Con } \mathfrak{A}$ присоединением наибольшего элемента внешним образом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L = \text{Con } \mathfrak{A}' \setminus \{1_{A'}\}$, где $1_{A'} = A' \times A'$ – наибольшая конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}'$. Покажем, что L – подрешетка решетки $\text{Con } \mathfrak{A}'$.

Для этого проверим сначала, что для произвольной конгруэнции $\theta \in L$ класс $[e]_\theta$ конгруэнции θ с порождающим элементом e одноэлементен. Действительно, допустим, что $x \in [e]_\theta$ и $x \neq e$, т.е. $x \in A$. Поскольку $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – сильно связная алгебра, то для произвольного элемента $y \in A$ имеем $y = u(x)$ для некоторого $u \in \Omega^*$. Так как $x\theta e$, то $u(x)\theta u(e)$, т.е. $y\theta e$, откуда $y \in [e]_\theta$. Это означает, что $[e]_\theta = A'$, что противоречит неравенству $\theta \neq 1_{A'}$. Следовательно, $[e]_\theta = \{e\}$, где θ – произвольная конгруэнция из L .

Далее, опираясь на теорему 6 из [8; с. 69], получаем, что из равенств $[e]_\theta = \{e\}$ и $[e]_{\theta_1} = \{e\}$ следуют равенства $[e]_{\theta \vee \theta_1} = \{e\}$ и $[e]_{\theta \wedge \theta_1} = \{e\}$ для любых двух конгруэнций θ, θ_1 алгебры $\mathfrak{A}'$. Это означает, что L – подрешетка решетки $\text{Con } \mathfrak{A}'$, причем решетка $\text{Con } \mathfrak{A}'$ получается из L присоединением внешним образом наибольшего элемента.

Убедимся, что $\text{Con } \mathfrak{A} \cong L$. С этой целью для любой конгруэнции $\rho \in \text{Con } \mathfrak{A}$ определим на множестве A' бинарное отношение $\varphi(\rho)$, полагая

$$(a, b) \in \varphi(\rho) \iff a\rho b \vee \{a, b\} = \{e\}$$

для любых элементов $a, b \in A'$.

Очевидно, что $\varphi(\rho)$ – отношение эквивалентности на множестве A' . Кроме того, отношение $\varphi(\rho)$ стабильно относительно любой операции $f \in \Omega'$, так как $\rho \in \text{Con } \mathfrak{A}$ и $f(A) = \{e\}$ при $f \in \Omega' \setminus \Omega$. Легко видеть, что $\varphi(\rho) \neq 1_{A'}$, поскольку $[e]_{\varphi(\rho)} = \{e\}$. Следовательно, $\varphi(\rho) \in L$.

Непосредственная проверка показывает, что

$$\rho_1 \leq \rho_2 \iff \varphi(\rho_1) \leq \varphi(\rho_2)$$

для любых конгруэнций ρ_1, ρ_2 алгебры $\mathfrak{A}$.

Осталось проверить, что отображение $\varphi: \text{Con } \mathfrak{A} \rightarrow L$ сюръективно. Для произвольной конгруэнции $\theta' \in L$ положим $\theta = \theta' \cap (A \times A)$. Очевидно, что $\theta \in \text{Con } \mathfrak{A}$. Проверим, что $\theta' = \varphi(\theta)$. Действительно, если $(a, b) \in \varphi(\theta)$, то в силу определения φ либо $(a, b) \in \theta$, либо $a = b = e$, откуда $(a, b) \in \theta'$, т.е. $\varphi(\theta) \subseteq \theta'$. Обратно, пусть $(a, b) \in \theta'$. В силу равенства $[e]_{\theta'} = \{e\}$ это означает, что $(a, b) \in A \times A$ или $a = b = e$, т.е. $(a, b) \in \varphi(\theta)$. Следовательно, $\theta' = \varphi(\theta)$.

Таким образом, отображение $\varphi: \text{Con } \mathfrak{A} \rightarrow L$ является изоморфизмом решеток. Предложение доказано.

Очевидно, для любой коммутативной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ бинарное отношение

$$\zeta = \{(a, b) \in A \times A \mid (a) = (b)\} \quad (2.2)$$

на множестве A является конгруэнцией этой алгебры.

Класс конгруэнции ζ с порождающим элементом $a \in A$ называется *слоем* этого элемента и обозначается через L_a ([12]). Для любого элемента a алгебры $\mathfrak{A}$ положим $\Omega_a = \{f \in \Omega \mid f(a) \in L_a\}$.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – связная коммутативная унарная алгебра с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций, а элементы $c \in A$ и $w \in \Omega^*$ такие, что слой L_c одноэлементен и элемент $w(c)$ ацикличесок. Тогда для любого $x \in A$ справедлива импликация

$$w(x) = w(c) \implies x = c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в силу коммутативности алгебры $\mathfrak{A}$ отображение δ_w , заданное в (2.1), является эндоморфизмом этой алгебры. Из соотношений $x \neq c$ и $w(x) = w(c)$ для любого элемента $x \in A$ следует, что

$$(x, c) \in \ker \delta_w, \quad (2.3)$$

где $\ker \delta_w$ – ядро эндоморфизма δ_w .

Так как элемент $w(c)$ является ациклическим, то $w(c) \notin (a)$ для некоторого элемента $a \in A$. Поэтому $w(c) \neq w(a)$, откуда ввиду равенства $w(x) = w(c)$ следует $w(x) \neq w(a)$. Таким образом,

$$(c, a) \notin \ker \delta_w, \quad (x, a) \notin \ker \delta_w. \quad (2.4)$$

С другой стороны, из условия в силу леммы 1 вытекает, что решетка $\text{Sub } \mathfrak{A}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$ также является цепью. Следовательно, используя соотношение $w(c) \notin (a)$, получаем $(a) \subset (w(c))$, откуда, поскольку $w(c) = w(x)$, имеем также $(a) \subset (w(x))$ и, значит,

$$a \in (c) \cap (x). \quad (2.5)$$

Далее, так как $x \neq c$ и $|L_c| = 1$, то $(x) \neq (c)$, откуда по условию $c \notin (x)$ или $x \notin (c)$. Для определенности будем считать, что $x \notin (c)$. Тогда $(c, x) \notin R(c)$ и, кроме того, $(a, c) \in R(c)$ согласно (2.5). Отсюда, используя (2.3) и (2.4), заключаем, что конгруэнции $R(c)$ и $\ker \delta_w$ не сравнимы, что противоречит условию. Следовательно, $x = c$. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – связная коммутативная унарная алгебра с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций. Если элемент $a \in A$ такой, что $u(a)$ ацикличесок для некоторого $u \in \Omega^*$, то для любых элементов $v \in \Omega^*$ и $b \in A$ из равенства $u(a) = v(a)$ вытекает импликация

$$|L_{u(b)}| = 1 \Rightarrow u(b) = v(b).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что условие следствия выполнено, причем имеем $|L_{u(b)}| = 1$. Согласно лемме 1 возможны случаи $(a) \subseteq (b)$ либо $(b) \subseteq (a)$. Если $b \in (a)$, то равенство $u(b) = v(b)$ очевидным образом следует из равенств $u(a) = v(a)$ ввиду коммутативности алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $a \in (b)$. Тогда $a = w(b)$ для некоторого слова $w \in \Omega^*$. Полагая $c = u(b)$, получаем

$$w(c) = wu(b) = uw(b) = u(a), \quad (2.6)$$

откуда в силу условия элемент $w(c)$ является ациклическим.

Далее, используя (2.6) и равенство $u(a) = v(a)$, получаем

$$w(c) = u(a) = v(a) = vw(b) = wv(b).$$

Отсюда, поскольку элемент $w(c)$ является ациклическим и $|L_c| = 1$, по лемме 4 имеем $v(b) = c$ и, значит, $v(b) = u(b)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ имеет неодноэлементное ядро $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{A}$. Тогда решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ не является цепью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим бинарное отношение μ на множестве A следующим образом:

$$x\mu y \iff (\exists u \in \Omega^*)(u(x) = u(y))$$

для любых $x, y \in A$.

Непосредственная проверка показывает, что μ – конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$. Кроме того, если $x \neq y$ и $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{B}$, то $(x, y) \notin \mu$ в силу леммы 9 из [12]. Отсюда $R(\mathfrak{B}) \not\subseteq \mu$, поскольку $|\mathfrak{B}| > 1$.

Убедимся, что $\mu \not\subseteq R(\mathfrak{B})$. Зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{B}$. Тогда в силу связности алгебры $\mathfrak{A}$ найдется элемент $w \in \Omega^*$, для которого $w(a) \in \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ – сильно связная алгебра, то $w(a) = v(w^2(a)) = w(vw(a))$ для подходящего $v \in \Omega^*$. Поэтому $(a, vw(a)) \in \mu$ по определению конгруэнции μ . При этом $(a, vw(a)) \notin R(\mathfrak{B})$, поскольку $a \notin \mathfrak{B}$. Следовательно, $\mu \not\subseteq R(\mathfrak{B})$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – связная коммутативная унарная алгебра с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций. При этом алгебра $\mathfrak{A}$ не является сильно связной и содержит такой элемент a , что слой L_a неодноэлементен. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ получается из алгебры $\langle L_a, \Omega_a \rangle$ присоединением некоторой петли e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что по лемме 4 из [13] алгебра $\langle L_a, \Omega_a \rangle$ является сильно связной подалгеброй редукта $\langle A, \Omega_a \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$. Если допустить, что $\Omega \setminus \Omega_a = \emptyset$, то слой L_a – сильно связная подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$. Следовательно, L_a – ядро алгебры $\mathfrak{A}$, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ является связной. Это противоречит условию в силу леммы 5. Поэтому $\Omega \setminus \Omega_a \neq \emptyset$.

Зафиксируем произвольную операцию $f \in \Omega \setminus \Omega_a$. Допустим, что элемент $f(a)$ является ациклическим. Тогда $f(a) \notin B$ для некоторой подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B, \Omega \rangle$ алгебры $\mathfrak{A}$. Отсюда $B \subseteq (f(a))$ ввиду леммы 1. Это означает, что для любого элемента $b \in B$ справедливы соотношения $b \in (f(a))$ и $f(a) \notin (b)$, откуда

$$(f(a), b) \in R(f(a)), \quad (f(a), b) \notin \zeta, \quad (2.7)$$

где ζ – конгруэнция алгебры $\mathfrak{A}$, определенная по правилу (2.2).

Кроме того, так как слой L_a неодноэлементен, то для некоторого слова $v \in \Omega^*$ имеем

$$a \neq v(a), \quad a\zeta v(a). \quad (2.8)$$

С другой стороны, так как $f \notin \Omega_a$, то $f(a) \notin L_a$. Следовательно, $a \notin (f(a))$ и, значит, $(a, v(a)) \notin R(f(a))$. Теперь из (2.7) и (2.8) получаем, что конгруэнции ζ и $R(f(a))$ не сравнимы, что противоречит условию. Следовательно, $f(a)$ – циклический элемент.

Обозначим элемент $f(a)$ через e . По лемме 5 подалгебра $(f(a))$ одноэлементна, т.е. элемент e является петлей. Поскольку f – произвольная операция из $\Omega \setminus \Omega_a$, то $(a) = L_a \cup \{e\}$.

Заметим далее, что приведенные выше рассуждения для элемента a сохраняют силу, если вместо него взять любой другой элемент $x \in A$, удовлетворяющий условию $|L_x| > 1$, т.е.

$$|L_x| > 1 \implies (x) = L_x \cup \{e\} \quad (2.9)$$

для любого $x \in A$.

Теперь докажем, что $A = (a)$. Предположим, что $A \neq (a)$. Тогда найдется элемент $x \in A \setminus (a)$, откуда $a \in (x)$, по лемме 1. Следовательно, $a = u(x)$ для подходящего элемента $u \in \Omega^*$.

В силу (2.8) существует слово $w \in \Omega^*$ такое, что

$$a = wv(a). \quad (2.10)$$

Кроме того, имеем $a \in (x)$, $a \neq e$ и $a \notin L_x$, поскольку $x \notin (a)$. Следовательно, $(x) \neq L_x \cup \{e\}$. Ввиду (2.9) это означает, что $|L_x| = 1$. Поэтому $x = wv(x)$ в силу (2.10) и следствия из леммы 4. Отсюда вытекает, что $x\zeta v(x)$ и, значит, $x = v(x)$, поскольку $|L_x| = 1$. Следовательно, $u(x) = uv(x) = vu(x)$, т.е. $a = v(a)$, что противоречит выбору элемента $v(a)$. Таким образом, $A = (a) = L_a \cup \{e\}$.

Осталось заметить, что $f(A) = e$ для любой операции $f \in \Omega \setminus \Omega_a$, поскольку $A = (a)$ и $f(a) = e$. Предложение доказано.

ЛЕММА 6. *Если связная коммутативная унарная алгебра не имеет ядра, то решетка ее конгруэнций не является цепью.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, не имеющая ядра, для которой решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ – цепь. Пусть f – произвольная нетождественная сигнатурная операция этой алгебры и $m \in \mathbb{N}$. Очевидно, что бинарное отношение

$$\theta_{f,m} = \{(a, b) \in A \times A \mid (\exists k, s \in \mathbb{N})(f^k(a) = f^s(b) \ \& \ k \equiv s \pmod{m})\} \quad (2.11)$$

на множестве A является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$.

Покажем теперь, что конгруэнции $\theta_{f,2}$ и $\theta_{f,3}$ не сравнимы. Зафиксируем произвольный элемент $a \in A$, для которого $f(a) \neq a$ и убедимся, что $(f^2(a), a) \notin \theta_{f,3}$.

Действительно, если предположить, что $(f^2(a), a) \in \theta_{f,3}$, то в силу (2.11) для некоторых $k, s \in \mathbb{N}$, $k \equiv s \pmod{3}$, справедливо равенство $f^{k+2}(a) = f^s(a)$. Кроме того, $|L_a| = 1$ в силу предложения 2, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ не имеет ядра и решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ – цепь. Следовательно, $f^{|k+2-s|}(a) = a$ по лемме 4.

Если при этом $|k - s + 2| \geq 1$, то $(a, f(a)) \in \zeta$ согласно (2.2), что противоречит условию $|L_a| = 1$. Это означает, что $k - s + 2 = 0$, откуда $k \not\equiv s \pmod{3}$. Таким образом, $(f^2(a), a) \notin \theta_{f,3}$. Аналогичными рассуждениями можно проверить, что $(f^3(a), a) \notin \theta_{f,2}$. Из (2.11) непосредственно вытекает, что $(f^2(a), a) \in \theta_{f,2}$ и $(f^3(a), a) \in \theta_{f,3}$. Поэтому конгруэнции $\theta_{f,2}$ и $\theta_{f,3}$ не сравнимы, т.е. решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ цепью не является. Лемма доказана.

3. Основные результаты. Через $\mathcal{K}_1$ в дальнейшем будем обозначать класс всех коциклических коммутативных унарных алгебр, а через $\mathcal{K}_2$ – класс всех унарных алгебр, каждая из которых получается из некоторой коциклической алгебры присоединением петли.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – унарная алгебра, $f \in \Omega$ и $B \subseteq A$. Тогда через $f^{-1}(B)$, как обычно, будем обозначать множество $\{x \in A \mid f(x) \in B\}$.

Для любых элементов $x, y \in A$ положим по определению

$$x \leq y \iff (y) \subseteq (x). \quad (3.1)$$

Очевидно, что отношение $\leq$ является отношением частичного порядка, когда оно антисимметрично. Это, в свою очередь, равносильно тому, что все слои алгебры $\mathfrak{A}$ одноэлементны.

Через $\mathcal{K}_3$ обозначим класс коммутативных унарных алгебр $\langle A, \Omega \rangle$, каждая из которых удовлетворяет следующим четырем условиям:

- 1) алгебра $\langle A, \Omega \rangle$ имеет одноэлементное ядро e ;
- 2) бинарное отношение $\leq$, заданное в (3.1), является отношением линейного порядка на множестве A ;
- 3) для любой нетождественной операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f \rangle$ связан.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – коммутативная унарная алгебра. Тогда решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ конгруэнций этой алгебры является цепью в том и только в том случае, когда $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Если $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$, то решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ – цепь в силу леммы 3. Если $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_2$, то $\text{Con } \mathfrak{A}$ является цепью в силу леммы 3 и предложения 1.

Допустим теперь, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_3$, но решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ не является цепью. Тогда найдутся две несравнимые конгруэнции $\theta, \rho \in \text{Con } \mathfrak{A}$. Это, в свою очередь, означает, что

$$(a, b) \in \theta, \quad (a, b) \notin \rho, \quad (c, d) \in \rho, \quad (c, d) \notin \theta \quad (3.2)$$

для некоторых элементов $a, b, c, d \in A$.

Так как отношение $\leq$, заданное по правилу (3.1), является отношением линейного порядка, то можно считать для определенности, что $a \leq b$ и $c \leq d$.

Докажем, что для любого элемента $x \in A$ справедлива импликация

$$x \in (a) \implies x\theta e. \quad (3.3)$$

Для этого сначала установим, что $a\theta e$. Действительно, из $a \leq b$ имеем $b = u(a)$ для некоторого $u \in \Omega^*$. При этом слово u не может быть пустым, поскольку $(a, b) \notin \rho$. Далее из $a\theta u(a)$ в силу транзитивности отношения θ получаем

$$a\theta u^n(a) \quad (3.4)$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Запишем элемент $u(a)$ в виде $u(a) = f_1 f_2 \cdots f_k(a)$, где $f_1, f_2, \dots, f_k \in \Omega$. Поскольку редукт $\langle A, f_1 \rangle$ связан и e – петля алгебры $\mathfrak{A}$, то $f_1^n(a) = e$ для некоторого числа $n \in \mathbb{N}_0$. Отсюда, используя условие коммутативности алгебры, получим $u^n(a) = e$ и, значит, $a\theta e$ ввиду (3.4).

Приступим теперь к доказательству импликации (3.3). Пусть $x \in (a)$. Тогда $x = v(a)$, где $v \in \Omega^*$. Из $a\theta e$ очевидным образом следует $v(a)\theta v(e)$, откуда $x\theta e$, поскольку $v(e) = e$.

Аналогично рассуждая получаем, что для любого $y \in A$ справедлива импликация

$$y \in (c) \implies y\theta e. \quad (3.5)$$

Элементы a и c также сравнимы относительно отношения $\leq$. Если $a \leq c$, то $a \leq c \leq d$ и, значит, $c, d \in (a)$. Поэтому $c\theta e$, $d\theta e$ в силу (3.3). Следовательно, $c\theta d$, что противоречит (3.2). В случае $c \leq a$ имеем $a, b \in (c)$, откуда, используя (3.5), получаем $a\theta b$, что снова противоречит (3.2).

Необходимость. Пусть решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ является цепью. Если при этом $\mathfrak{A}$ – сильно связная алгебра, то $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$ в силу леммы 3.

Пусть $\mathfrak{A}$ – связная алгебра, которая не является сильно связной и $\mathfrak{A} \notin \mathcal{K}_2$. Покажем, что в этом случае $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_3$. В силу лемм 5 и 6 алгебра $\mathfrak{A}$ имеет одноэлементное ядро. Обозначим ядро алгебры $\mathfrak{A}$ через $\{e\}$.

Покажем теперь, что отношение $\leq$, определенное условием (3.1), является частичным порядком. Как уже отмечалось выше, для этого достаточно заметить, что все слои алгебры $\mathfrak{A}$ одноэлементны. Действительно, если в $\mathfrak{A}$ существует хотя бы один неоднородный слой, то в силу предложения 2 получаем $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_2$, что противоречит допущению. Теперь из леммы 1 следует, что отношение $\leq$ является отношением линейного порядка.

Пусть Ω' – множество всех нетождественных сигнатурных операций алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $\Omega' \neq \emptyset$, поскольку $\mathfrak{A}$ – связная алгебра, которая не является сильно связной. Предположим, что для некоторой операции $f \in \Omega'$ редукт $\langle A, f \rangle$ не является связным. Тогда найдется такой элемент $c \in A$, что

$$f^n(c) \neq e \quad (3.6)$$

для любого $n \in \mathbb{N}_0$.

Зададим бинарное отношение ν на множестве A по правилу

$$x\nu y \iff (\exists n, m \in \mathbb{N}_0)(f^n(x) = f^m(y))$$

для любых $x, y \in A$.

Очевидно, что $\nu \in \text{Con } \mathfrak{A}$ и $c\nu f(c)$. Кроме того, $(e, f(c)) \notin \nu$ ввиду (3.6).

Покажем, что $f(c) \neq c$ в силу следствия из леммы 4. Так как все слои алгебры $\mathfrak{A}$ одноэлементны, то согласно предложению 2 из равенства $f(c) = c$ следовало бы равенство $f(x) = x$ для любого $x \neq e$. Это означало бы, что f – тождественная операция, поскольку $f(e) = e$. Следовательно, $f(c) \neq c$, откуда $c \notin (f(c))$, так как $|L_c| = 1$. Поэтому $(c, f(c)) \notin R(f(c))$.

С другой стороны, очевидно, $(e, f(c)) \in R(f(c))$ и, значит, конгруэнции ν и $R(f(c))$ не сравнимы, что противоречит линейной упорядоченности решетки $\text{Con } \mathfrak{A}$. Это означает, что редукт $\langle A, f \rangle$ связан. Таким образом, $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_3$.

Пусть, наконец, алгебра $\mathfrak{A}$ не является связной. Тогда согласно лемме 2 имеем $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_2$ – одноэлементная алгебра. Убедимся, что в этом случае алгебра $\mathfrak{A}_1$ является коциклической. Для этого заметим сначала, что решетка $\text{Con } \mathfrak{A}_1$ конгруэнций этой алгебры изоморфно вкладывается в решетку $\text{Con } \mathfrak{A}$. Это означает, что решетка $\text{Con } \mathfrak{A}_1$ также является цепью. Если при этом $\mathfrak{A}_1$ – сильно связная алгебра, то она является коциклической в силу леммы 3. В этом случае $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_2$.

Допустим, что связная алгебра $\mathfrak{A}_1$ не является сильно связной. Тогда по лемме 5 и лемме 6 она имеет одноэлементное ядро. Пусть $\{e\}$ – ядро алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 + (e)$. Неодноэлементные подалгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_3$ не сравнимы по включению. Поэтому, согласно лемме 1 конгруэнции Рисса $R(\mathfrak{A}_1)$ и $R(\mathfrak{A}_3)$ также не сравнимы, что противоречит линейной упорядоченности решетки $\text{Con } \mathfrak{A}$. Следовательно, алгебра $\mathfrak{A}_1$ является сильно связной. Теорема доказана.

В дальнейшем однопорожжденный унар (т.е. алгебра с одной унарной операцией) с операцией f , порождающим элементом a и определяющим соотношением $f^n(a) = f^{n+m}(a)$, где $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$, обозначается через C_m^n и через C_m^∞ – объединение возрастающей, по включению, последовательности унаров $C_m^0 \subseteq C_m^1 \subseteq C_m^2 \subseteq \dots$. Унар C_m^0 называется *циклом длины m* .

Через $\mathcal{L}_1$ в дальнейшем будем обозначать класс всех коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, для каждой из которых существуют операция $f \in \Omega$ и некоторое простое число p такие, что редукт $\langle A, f \rangle$ является циклом длины p^k , где $k \in \mathbb{N}_0$.

ЛЕММА 7. *Коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций является коциклической тогда и только тогда, когда она принадлежит классу $\mathcal{L}_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если редукт $\langle A, f \rangle$, $f \in \Omega$, алгебры $\mathfrak{A}$ является циклом длины p^k , где p – простое число, $k \in \mathbb{N}_0$, то $\mathfrak{A}$ – сильно связная алгебра. Следовательно, ввиду теоремы 1 из [9] ее характеристическая полугруппа $S(\mathfrak{A})$ является абелевой группой, и $|S(\mathfrak{A})| = |A|$, откуда $|S(\mathfrak{A})| = p^k$. С другой стороны, в силу условия порядок элемента δ_f группы $S(\mathfrak{A})$ также равен p^k . Это означает, что $S(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, т.е. $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1$.

Обратно, пусть $\mathfrak{A}$ – коциклическая алгебра. Из определения характеристической полугруппы $S(\mathfrak{A})$ вытекает, что совокупность элементов вида δ_g , где $g \in \Omega$, является системой порождающих для $S(\mathfrak{A})$. Так как $|\Omega| < \infty$, то $S(\mathfrak{A})$ не изоморфна $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ни для какого простого числа p . Следовательно, $S(\mathfrak{A}) \cong \mathbb{Z}_{p^k}$, где p – простое число, $k \in \mathbb{N}_0$ и, значит, найдется операция $f \in \Omega$, для которой порядок элемента δ_f равен p^k . Это, в свою очередь, означает, что редукт $\langle A, f \rangle$ является циклом длины p^k , откуда $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8. *Пусть связная коммутативная унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \{f_1, \dots, f_k\} \rangle$ ($k \in \mathbb{N}$) конечной сигнатуры имеет ядро $\mathfrak{B}$, и для любой сигнатурной операции f_i редукт $\langle A, f_i \rangle$ этой алгебры является связным. Тогда всякая конечнопорожденная подалгебра этой алгебры содержит лишь конечное число ациклических элементов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно доказать лемму для произвольной однопорожденной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

Пусть $a \in A$. Покажем, что множество $(a) \setminus \mathfrak{B}$ конечно. Для этого убедимся сначала, что для любого номера $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ найдется число $l_i \in \mathbb{N}_0$ такое, что $f^{l_i}(a) \in \mathfrak{B}$. Действительно, поскольку редукт $\langle A, f_i \rangle$ связан, то зафиксировав произвольный элемент $b \in \mathfrak{B}$, заметим, что $f^{l_i}(a) = f^{m_i}(b)$ для некоторых $l_i, m_i \in \mathbb{N}$. Отсюда $f^{l_i}(a) \in \mathfrak{B}$ в силу определения ядра алгебры. Следовательно, в силу коммутативности алгебры $\mathfrak{A}$ каждый ациклический элемент c подалгебры (a) допускает представление в виде $c = f_1^{s_1} f_2^{s_2} \dots f_k^{s_k}(a)$, где число $s_i \in \{0, 1, \dots, l_i - 1\}$ для всякого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ и, значит, $|(a) \setminus \mathfrak{B}| \leq l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_k$. Лемма доказана.

Через $\mathcal{L}_2$ будем обозначать класс коммутативных унарных алгебр, каждая из которых получается присоединением петли к некоторой алгебре класса $\mathcal{L}_1$.

Через $\mathcal{L}_3$ в дальнейшем обозначается класс всех таких коммутативных унарных алгебр $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ с петлей e , что для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f \rangle$ является унаром вида C_1^α , где $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, и для любой другой операции $g \in \Omega$ либо $g(A) = \{e\}$, либо справедливо тождество вида

$$(\forall x)(g(x) = f^s(x)),$$

где $s \in \mathbb{N}_0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ – коммутативная унарная алгебра с конечным числом операций. Тогда решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ конгруэнций этой алгебры является цепью в том и только в том случае, если $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$. Если при этом $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, то $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ в силу леммы 7. Поэтому решетка конгруэнций алгебры $\mathfrak{A}$ линейно упорядочена по теореме 1.

Пусть теперь $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_3$. Тогда один из редуктов $\langle A, f \rangle$, $f \in \Omega$, алгебры $\mathfrak{A}$ является унаром вида C_1^α , где $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Решетка конгруэнций каждого из таких унаров линейно упорядочена ([3; теорема 1]). Следовательно, решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ также является цепью, так как она вложима в решетку конгруэнций редукта $\langle A, f \rangle$.

Необходимость. Пусть решетка $\text{Con } \mathfrak{A}$ является цепью. Тогда $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ по теореме 1. Если $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, то в силу леммы 7 получаем $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, поскольку Ω – конечное множество.

Пусть $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_3$. Проверим, что $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_3$. По определению класса $\mathcal{K}_3$ алгебра $\mathfrak{A}$ имеет петлю e . Убедимся, что для некоторой операции $f \in \Omega$ редукт $\langle A, f \rangle$ является унаром вида C_1^α , где $\alpha \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. С этой целью зафиксируем произвольный элемент $a \in \mathfrak{A} \setminus \{e\}$.

В силу леммы 8 подалгебра $\langle a \rangle$ конечна. Так как отношение $\leq$, заданное на множестве A по правилу (3.1), является отношением линейного порядка, то в конечном множестве $\langle a \rangle \setminus \{e\}$ существует наибольший элемент c .

Проверим, что c является наибольшим элементом относительно отношения $\leq$ на множестве $A \setminus \{e\}$. Пусть $b \in A \setminus \{e\}$ и $b \notin \langle a \rangle$. Тогда $a \not\leq b$ ввиду (3.1) и, значит, $b \leq a$, так как $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_3$. Отсюда $b \leq c$ в силу транзитивности отношения $\leq$.

Теперь убедимся в том, что существует операция $f \in \Omega$ такая, что для любого $x \in A$ выполнено условие

$$f(x) = e \iff x \in \{c, e\}. \quad (3.7)$$

Импликация

$$x \in \{c, e\} \implies f(x) = e$$

справедлива для любой нетождественной операции $f \in \Omega$ в силу выбора элемента c .

Докажем обратную импликацию. Пусть $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_k\}$. Предположим, что для любой операции f_i ($i = 1, \dots, k$) найдется элемент $x_i \in \mathfrak{A}$ такой, что

$$f_i(x_i) = e \text{ \& } x_i \notin \{c, e\}. \quad (3.8)$$

Поскольку отношение, определенное в (3.1), является отношением линейного порядка, то элементы $x_1, x_2, \dots, x_k$ сравнимы между собой относительно этого отношения. Для определенности будем считать, что

$$x_k \leq x_{k-1} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1.$$

Тогда $x_1 \in (x_k) \cap (x_{k-1}) \cap \dots \cap (x_2)$ ввиду (3.1). Покажем, что $f_i(x_1) = e$ для любого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Действительно, поскольку $x_1 \in (x_i)$, то $x_1 = v_i(x_i)$ для некоторого слова $v_i \in \Omega^*$, откуда, учитывая (3.8), получаем

$$f_i(x_1) = f_i(v_i(x_i)) = v_i(f_i(x_i)) = v_i(e) = e.$$

Это означает, что $(x_1) = \{x_1, e\}$. С другой стороны, $x_1 \leq c$, откуда $c \in (x_1)$ ввиду (3.1). Поскольку $c \neq e$, то $c = x_1$, что противоречит в силу (3.8) выбору элемента x_1 . Таким образом, для некоторой операции $f \in \Omega$ справедливо (3.7). Кроме того, по лемме 4 получаем $|f^{-1}(\{a\})| \leq 1$ для любого элемента $a \in A \setminus \{e\}$. Следовательно, редукт $\langle A, f \rangle$ является унарном вида C_1^α , где $\alpha \in \mathbb{N} \cup \infty$.

Пусть теперь $g \in \Omega$, g – нетождественная операция, и $g(A) \neq \{e\}$. Так как отношение $\leq$, заданное в (3.1), антисимметрично, все слои алгебры $\mathfrak{A}$ одноэлементны. Отсюда, поскольку $a \neq e$, получаем $g(a) \neq a$ в силу следствия из леммы 4 и, значит, $(g(a)) \neq (a)$.

Отсюда, используя условие $\langle A, f \rangle \cong C_1^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, получаем $g(a) = f^s(a)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Снова используя следствие из леммы 4, имеем $g(x) = f^s(x)$ при любом $x \in A$. Таким образом, $\mathfrak{A} \in \mathcal{L}_3$. Теорема доказана.

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Произвольная цепь H изоморфна решетке конгруэнций некоторой коммутативной унарной алгебры конечной сигнатуры тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке конгруэнций некоторого унара.*

Обозначим через $\mathcal{N}'$ цепь, которая получается из упорядоченного относительно обычного порядка множества $\mathbb{N}$ целых положительных чисел добавлением внешним образом наибольшего элемента.

Используя следствие 1 и результаты работ [1] и [3], получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Произвольная цепь H изоморфна решетке конгруэнций некоторой коммутативной унарной алгебры конечной сигнатуры тогда и только тогда, когда H либо конечна, либо изоморфна цепи $\mathcal{N}'$.*

Следующий пример показывает, что для алгебр бесконечной сигнатуры теорема 2 и следствия из нее не верны.

ПРИМЕР. Пусть $\mathbb{R}^+$ обозначает в дальнейшем множество положительных вещественных чисел и $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Для любых чисел $\alpha \in \mathbb{R}^+$ и $x \in \mathbb{R}_0^+$ положим

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x - \alpha, & \text{если } x \geq \alpha, \\ 0, & \text{если } 0 \leq x < \alpha. \end{cases} \quad (3.9)$$

Непосредственная проверка показывает, что $\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}_0^+, \{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}^+\} \rangle$ – коммутативная унарная алгебра. В силу (3.9) элемент $0 \in \mathfrak{R}$ является петлей этой алгебры. Далее, для любых $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ при $a > b$ имеем $b = f_{a-b}(a) \in (a)$ и $a \notin (b)$ и, значит, отношение $\leq$, определенное в (3.1), является линейным порядком на множестве $\mathbb{R}_0^+$. Заметим также, что для любых $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}_0^+$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $b - n\alpha < \alpha$, откуда $f_\alpha^n(b) = 0$. Это означает, что редукт $\langle \mathbb{R}_0^+, f_\alpha \rangle$ алгебры $\mathfrak{R}$ связан. Таким образом, алгебра $\mathfrak{R}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Поэтому решетка $\text{Con } \mathfrak{R}$ ее конгруэнций линейно упорядочена.

Однако, эта алгебра континуальна, откуда $\mathfrak{R} \notin \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 \cup \mathcal{L}_3$. Осталось заметить, что $|\text{Sub } \mathfrak{R}| > |\mathbb{N}|$, так как алгебра $\mathfrak{R}$ имеет континуум однопорожжденных подалгебр. Следовательно, $|\text{Con } \mathfrak{R}| > |\mathbb{N}|$ по лемме 1.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные советы по доработке текста статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] J. Berman, “On the congruence lattices of unary algebras”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1972), 34–38.
- [2] Д. П. Егорова, Л. А. Скорняков, “О структуре конгруэнций унарной алгебры”, *Упорядоченные множества и решетки*, 4, Межвуз. науч. сб., Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 1977, 28–40.
- [3] Д. П. Егорова, “Структура конгруэнций унарной алгебры”, *Упорядоченные множества и решетки*, 5, Межвуз. науч. сб., Изд-во Саратовск. ун-та, Саратов, 1978, 11–44.
- [4] G. Grätzer, E. T. Schmidt, “Characterizations of congruence lattices of abstract algebras”, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **24** (1963), 34–59.
- [5] J. Johnson, R. L. Seifert, *A Survey of Multi-Unary Algebras*, Mimeographed seminar notes, University of California, Berkeley, CA, 1967.
- [6] Z. Ésik, B. Imreh, “Subdirectly irreducible commutative automata”, *Acta Cybernet.*, **5**:3 (1981), 251–260.
- [7] А. В. Карташова, “О коммутативных унарных алгебрах с линейно упорядоченной решеткой конгруэнций”, *Алгебра и математическая логика*, Казанский (Приволжский) федеральный ун-т, Казань, 2011, 104–106.
- [8] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М., 1970.
- [9] Z. Ésik, B. Imreh, “Remarks on finite commutative automata”, *Acta Cybernet.*, **5**:3 (1981), 143–146.
- [10] S. Bogdanović, M. Ćirić, T. Petrović, B. Imreh, M. Steinby, “Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras”, *Fund. Inform.*, **38**:1-2 (1999), 51–60.
- [11] L. Fuchs, *Abelian Groups*, Publ. House of the Hungar. Acad. of Sci., Budapest, 1958.
- [12] В. К. Карташов, “Независимые системы порождающих и свойство Хопфа для унарных алгебр”, *Дискрет. матем.*, **20**:4 (2008), 79–84.
- [13] А. В. Карташова, “О конечных решетках топологий коммутативных унарных алгебр”, *Дискрет. матем.*, **21**:3 (2009), 119–131.

А. В. Карташова

Волгоградский государственный
социально-педагогический университет
E-mail: kartashovaa@yandex.ru

Поступило

18.07.2012

Исправленный вариант

13.12.2012