Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. К. Гарсиа, О структуре конуса нормальных неограниченных вполне положительных отображений, *Матем. заметки*, 1999, том 65, выпуск 2, 194–205

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm1041>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 12:21:20

УДК 517.98

О СТРУКТУРЕ КОНУСА НОРМАЛЬНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ВПОЛНЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Хулио С. Гарсиа

В статье предлагается конструктивная характеристика неограниченных вполне положительных отображений, которые А. М. Чеботарев использовал ранее в теории квантовых динамических полугрупп. Доказано, что такие конусы порождаются положительным самосопряженным “весовым” оператором $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$: для любого вполне положительного нормального ограниченного отображения $\Phi(\cdot) \in CPn_*(\mathcal{F})$ существует вполне положительное нормальное ограниченное отображение $R \in CPn(\mathcal{H})$ такое, что $\Phi(\cdot) = \Lambda R(\cdot) \Lambda$. Данный класс содержит отображения, являющиеся незамыкаемыми полуторалиейными формами.

Библиография: 12 названий.

1. Введение. В работе изучается структура специального класса конусов неограниченных вполне положительных отображений, обозначенных через $CPn_*(\mathcal{F})$, которые были введены А. М. Чеботаревым [1], [2]. Элементами таких конусов являются вполне положительные операторные коэффициенты формальных инфинитезимальных генераторов широкого класса квантовых динамических полугрупп. Данные исследования были начаты в работе [3].

Пусть $\mathcal{H}$ – сепарабельное гильбертово пространство, называемое *исходным*, снабженное скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$. Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ – алгебра всех ограниченных линейных операторов на $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{F}$ – топологическое векторное пространство, плотно и непрерывно вложенное в $\mathcal{H}$.

Данная работа состоит из четырех пунктов. В п. 2, где $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ считается гильбертовым пространством, в теореме 1 и следствии 1 дана конструктивная характеристика конуса $CPn_*(\mathcal{F})$, аналогичная теореме Крауза. В п. 3 пространство $\mathcal{F}$ отождествляется с проективным пределом гильбертовых пространств, а характеристика соответствующего конуса $CPn_*(\mathcal{F})$ содержится в теореме 2 и следствии 2. В п. 4 рассмотрены некоторые примеры и приведены комментарии к ним.

Напомним определения конусов $CPn(\mathcal{H})$ и $CPn_*(\mathcal{F})$ и приведем их основные свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. $CPn(\mathcal{H})$ есть конус всех вполне положительных нормальных линейных отображений (супероператоров) $R: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (см. [4], [5]).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда CONACYT (Мексика), грант № 0233P-E9506.

Пусть $R \in CPn(\mathcal{H})$. Это отображение определено всюду на банаховой алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Можно доказать, что нормальность отображения R влечет его замкнутость, так что R является ограниченным.

Теорема Крауза [6, теорема 3.3, с. 217] дает конструктивную характеристику конуса $CPn(\mathcal{H})$, исчерпывающую все возможные примеры отображений из $CPn(\mathcal{H})$. А именно, $R \in CPn(\mathcal{H})$ тогда и только тогда, когда существует последовательность операторов $\{A_k\}$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такая, что $\sum_k A_k^* A_k$ сильно сходится к некоторому ограниченному оператору и

$$R(X) = \sum_k A_k^* X A_k, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Интерес к теории неограниченных вполне положительных отображений основывается на том, что они являются коэффициентами линдбладовской формы инфинитезимальных генераторов для широкого класса квантовых динамических полугрупп. Предположив, что $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, в качестве примера можно привести формальный генератор

$$\mathcal{L}(B) = \Phi(B) - \frac{1}{2}(\Phi(I)B + B\Phi(I)) + i[H, B],$$

где $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi(B) = -\frac{1}{2}\partial_x B \partial_x$ и $H = 0$. Этот генератор можно рассматривать как квантовое расширение лапласиана в $\mathbb{R}$, при этом соответствующее ему марковское эволюционное уравнение (*master equation*) является квантовым расширением уравнения теплопроводности. Отображение $\Phi(\cdot)$ представляет собой естественный пример вполне положительного неограниченного отображения.

Введем на $CPn(\mathcal{H})$ семейство псевдометрик

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \{\Theta_{\mathbb{A}, \mathbb{B}} : \mathbb{A} \subset \mathcal{F}, \mathbb{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})\},$$

индексированное парами $(\mathbb{A}, \mathbb{B})$, где $\mathbb{A}$ – абсолютно выпуклое компактное множество в $\mathcal{F}$, $\mathbb{B}$ – абсолютно выпуклое компактное множество относительно ультраслабой топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и

$$\Theta_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{\substack{\varphi, \psi \in \mathbb{A} \\ X \in \mathbb{B}}} |\langle \varphi, \Phi_1(X)\psi \rangle - \langle \varphi, \Phi_2(X)\psi \rangle|, \quad (1)$$

где $\Phi_1, \Phi_2 \in CPn(\mathcal{H})$. Отметим, что семейство псевдометрик (1) зависит от пространства $\mathcal{F}$.

Напомним, что предкомпактные множества в ультраслабой топологии в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ являются ограниченными по норме [5]. Семейство $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ индуцирует в $CPn(\mathcal{H})$ структуру равномерного топологического пространства. Следовательно, существует пополнение [7, теорема VI.28, с. 196].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. $CPn_*(\mathcal{F})$ представляет собой пополнение $CPn(\mathcal{H})$ относительно псевдометрики (1).

В дальнейшем для псевдометрики в $CPn_*(\mathcal{F})$ мы используем те же обозначения, что и в (1).

Из конструкции пополнений равномерных топологических пространств [7, теорема VI.28, с. 196] следует, что $CPn_*(\mathcal{F})$ является конусом всех отображений $\Phi: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ таких, что существует сеть $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ ($\mathcal{I}$ – упорядоченное множество) в $CPn(\mathcal{H})$, сходящаяся к Φ в следующем смысле: для всякого $\mathcal{F}$ -компактного подмножества $\mathbb{A} \subset \mathcal{F}$ и всех ограниченных по норме подмножеств $\mathbb{B} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\Theta_{\mathbb{A}, \mathbb{B}}(\Phi_\alpha, \Phi) \rightarrow 0. \quad (2)$$

В случае $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ очевидно, что $CPn_*(\mathcal{H}) = CPn(\mathcal{H})$. Если пространство $\mathcal{F}$ метризуемо, то следующие свойства являются необходимыми условиями того, что объект $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$.

Алгебраические свойства:

- а) $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ – полуторалинейное отображение относительно векторных переменных (находящихся в $[\cdot, \cdot]$) и линейным отображением относительно операторной переменной (находящейся в $(\cdot)$);
- б) $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ – *вполне положительное* отображение, т.е.

$$\sum_{i,j=1}^n \Phi(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] \geq 0 \quad \text{для } n \in \mathbb{N}, \quad \psi_i \in \mathcal{F}, \quad X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Свойства непрерывности:

- в) при фиксированном $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ отображение $\Phi(X)[\cdot, \cdot]$ непрерывно в $\mathcal{F}$;
- г) при фиксированном $\psi \in \mathcal{F}$ отображение $\Phi(\cdot)[\psi, \psi]$ является *нормальным* линейным функционалом на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е.

$$X = \sup_n X_n \implies \sup_n \Phi(X_n)[\psi, \psi] = \Phi(X)[\psi, \psi]$$

для любой возрастающей ограниченной по норме последовательности $\{X_n\}$ положительных элементов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

В действительности алгебраические свойства а) и б) являются следствием поточечной сходимости элементов $CPn(\mathcal{H})$, а свойства непрерывности в) и г) следуют из равномерной сходимости на компактных множествах.

Если $R \in CPn(\mathcal{H})$, то оно отображает положительные операторы в положительные. Так как для любого ограниченного самосопряженного оператора X справедливо неравенство $X \leq \|X\|I$, то

$$\|R(X)\| \leq \|X\| \cdot \|R(I)\|. \quad (3)$$

Аналогичное неравенство имеет место для элементов $CPn_*(\mathcal{F})$, как следствие алгебраических свойств а) и б):

$$|\Phi(X)[\psi, \psi]| \leq \|X\| \cdot |\Phi(I)[\psi, \psi]|, \quad (4)$$

где оператор X ограничен и самосопряжен, а $\psi \in \mathcal{F}$. В дальнейшем будем предполагать считать пространство $\mathcal{F}$ метризуемым.

Естественно предположить, что свойства а)–г) являются также достаточными условиями того, что элемент $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$. Докажем это предположение в случаях, когда $\mathcal{F}$ представляет собой гильбертово пространство (п. 2) и проективный предел гильбертовых пространств (п. 3). В последнем случае примерами могут служить $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$ и

$\mathcal{F}$ – пространство Шварца быстро убывающих гладких функций. Известно [8], что пространство Шварца является проективным пределом пространств $\{\mathcal{H}_k\}_{k \geq 0}$, где $\mathcal{H}_k$ – область определения $N^{k/2}$, а N – так называемый гамильтониан гармонического осциллятора

$$N = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right). \quad (5)$$

Более общие реализации пространства $\mathcal{F}$, а также другие примеры будут рассмотрены в последующих работах.

Обозначения и предположения. В настоящей работе мы рассматриваем комплексные сепарабельные гильбертовы пространства, полуторалинейные формы предполагаем антилинейными по левому и линейными по правому аргументам; для полуторалинейной формы a используем запись $a[\varphi, \psi]$ и для соответствующей квадратичной формы – $a[\psi] = a[\psi, \psi]$ [9]. Через $\mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ обозначаем пространство совместно непрерывных полуторалинейных форм на $\mathcal{F}$.

В этих обозначениях, поскольку свойства а)–г) являются необходимыми условиями, мы утверждаем, что множество $CPn_*(\mathcal{F})$ содержится в множестве всех вполне положительных нормальных в смысле б) и г) линейных отображений $\Phi: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{B}_*(\mathcal{F})$.

В случае, когда $\mathcal{F}$ является гильбертовым пространством, мы отождествляем $\mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ с пространством $\mathbb{B}(\mathcal{F})$ ограниченных операторов на $\mathcal{F}$ с помощью равенства

$$a[\varphi, \psi] = \langle \varphi, A\psi \rangle_{\mathcal{F}},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ – скалярное произведение в $\mathcal{F}$, $a \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ и A – элемент $\mathbb{B}(\mathcal{F})$, соответствующий полуторалинейной форме a .

2. Пополнения, порожденные гильбертовыми пространствами. Рассмотрим простейший случай, когда $\mathcal{F}$ представляет собой гильбертово пространство, плотным непрерывным образом вложенное в $\mathcal{H}$. Прежде всего установим одно простое свойство конусов $CPn_*(\mathcal{F})$ для метризуемых топологических векторных пространств $\mathcal{F}$ общего вида.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ – метризуемые векторные пространства, а $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство, $\mathcal{F}_1$ плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{F}_2$, а $\mathcal{F}_2$ плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{H}$. Тогда

$$CPn_*(\mathcal{F}_2) \subseteq CPn_*(\mathcal{F}_1). \quad (6)$$

Отображение вложения является равномерно непрерывным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественнo рассматривать $\mathbb{B}_*(\mathcal{F}_2)$ как подпространство в $\mathbb{B}_*(\mathcal{F}_1)$. Действительно, так как $\mathcal{F}_1$ содержится в $\mathcal{F}_2$, всякая полуторалинейная форма на $\mathcal{F}_2$ является также полуторалинейной формой на $\mathcal{F}_1$. Поскольку топология $\mathcal{F}_1$ сильнее топологии, порожденной $\mathcal{F}_2$, это сужение является непрерывной полуторалинейной формой на $\mathcal{F}_1$. Следовательно, $\mathbb{B}_*(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathbb{B}_*(\mathcal{F}_1)$.

Отметим, что любое компактное множество в $\mathcal{F}_1$ является также компактным множеством в $\mathcal{F}_2$. Отсюда $\mathcal{K}_{\mathcal{F}_1} \subseteq \mathcal{K}_{\mathcal{F}_2}$. Это доказывает, что тождественное отображение

$$i: (CPn(\mathcal{H}), \mathcal{K}_{\mathcal{F}_2}) \rightarrow (CPn(\mathcal{H}), \mathcal{K}_{\mathcal{F}_1})$$

равномерно непрерывно. Далее, существует единственное равномерно непрерывное расширение отображения i , действующее из одного пополнения в другое:

$$\tilde{i}: CPn_*(\mathcal{F}_2) \rightarrow CPn_*(\mathcal{F}_1).$$

Рассмотрим $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F}_2)$. Тогда $\Phi(X) \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F}_2)$ для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Таким образом, $\Phi(X) \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F}_1)$ как сужение на $\mathcal{F}_1$; кроме того, в $CPn(\mathcal{H})$ существует сеть $\{\Phi_\alpha\}_\alpha$, сходящаяся к Φ в топологии, порожденной $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_2}$. В свою очередь, $\Phi_\alpha = i(\Phi_\alpha)$ сходится к $\tilde{i}(\Phi)$ в топологии, порожденной $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_1}$. Следовательно, $[\tilde{i}(\Phi)](X)$ является сужением $\Phi(X)$ на $\mathcal{F}_1$, и включение $\tilde{i}$ следует из плотности $\mathcal{F}_1$ в $\mathcal{F}_2$. Таким образом, получаем (6).

Далее мы не будем использовать обозначение $\tilde{i}$, называя его *отображением вложения*. Частичная упорядоченность по отношению к $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ очевидна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует плотно определенный положительный самосопряженный оператор Λ в $\mathcal{H}$, удовлетворяющий условиям*

$$\mathcal{F} = \text{dom } \Lambda \quad (\text{как множества}), \quad \langle \Lambda \psi, \Lambda \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle_{\mathcal{F}}, \quad (7)$$

а 0 принадлежит резольвентному множеству Λ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пространство $\mathcal{F}$ непрерывно вложено в $\mathcal{H}$, существует положительная константа K такая, что

$$\|u\| \leq K \|u\|_{\mathcal{F}}, \quad u \in \mathcal{F}.$$

Пусть $a[\psi, \varphi] = \langle \psi, \varphi \rangle_{\mathcal{F}}$. Нетрудно показать, что квадратичная форма a плотно определена, положительна и замкнута на области определения $\mathcal{F}$. Согласно первой и второй формулировкам теоремы Като [9, теоремы VI.2.1 и VI.2.23, с. 322, 331] существует плотно определенный положительный замкнутый оператор A такой, что $\text{dom } A$ является плотным подпространством в $\mathcal{F}$, $\text{dom } A^{1/2} = \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} a[\psi, \varphi] &= \langle A^{1/2}\psi, A^{1/2}\varphi \rangle, & \psi, \varphi \in \mathcal{F}, \\ a[\psi, \varphi] &= \langle \psi, A\varphi \rangle, & \varphi \in \text{dom } A, \quad \psi \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Пусть $\Lambda = A^{1/2}$. Нужно доказать, что 0 принадлежит резольвентному множеству. Для этого достаточно показать, что оператор A имеет ограниченный обратный. Для $u \in \text{dom } A$ имеем

$$\|Au\| \cdot \|u\| \geq \langle u, Au \rangle = \|u\|_{\mathcal{F}}^2 \geq K^{-2} \|u\|^2.$$

Отсюда ясно, что $\ker A = 0$ и при $u \neq 0$

$$\|Au\| \geq K^{-2} \|u\|. \quad (8)$$

Так как оператор A самосопряжен, а $\ker A = 0$, то его область значений плотна в $\mathcal{H}$. Докажем, что множество значений $\text{range } A$ замкнуто.

Пусть $\{x_n\}$ – последовательность в $\text{dom } A$, а $y \in \mathcal{H}$ такой, что $Ax_n \rightarrow y$. Согласно (8) $\{x_n\}$ является ограниченной последовательностью в $\mathcal{H}$, из которой можно выделить подпоследовательность $\{y_m\}$, слабо сходящуюся к некоторому $v \in \mathcal{H}$. Для всякого $z \in \text{dom } A$ имеем

$$\langle v, Az \rangle = \lim_m \langle y_m, Az \rangle = \lim_m \langle Ay_m, z \rangle = \langle y, z \rangle.$$

Следовательно, $v \in \text{dom } A^* = \text{dom } A$ и $y = A^*v = Av \in \text{range } A$. Так как $\text{range } A = \mathcal{H}$, то A^{-1} является всюду определенным симметричным, а значит, и ограниченным оператором.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку $\{0\}$ принадлежит резольвентному множеству Λ , из (7) следует, что оператор Λ представляет собой унитарный изоморфизм между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$. Этот факт является ключевым для полной характеристики $CPn_*(\mathcal{F})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть отображение $\lambda: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ определено равенством $\lambda(X) = \Lambda^{-1}X\Lambda$. Из унитарности Λ как отображения из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}$ следует, что λ есть *-унитарный изоморфизм. В частности, λ является обратимым вполне положительным нормальным отображением, сохраняющим норму:

$$\|\lambda(X)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})} = \|X\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Обратное отображение λ^{-1} обладает точно такими же свойствами.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Согласно (8) оператор A^{-1} имеет норму, не превосходящую K^{-2} . Из самосопряженности A следует, что Λ не меньше константы K , умноженной на единичный оператор в $\mathcal{H}$. Вводя в случае необходимости новое скалярное произведение в $\mathcal{F}$, эквивалентное прежнему:

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle = \langle u, v \rangle_{\mathcal{F}} + \langle u, v \rangle,$$

без потери общности можем предположить, что $K = 1$ и $\Lambda \geq I$.

Положим $\Lambda_\varepsilon = \Lambda(1 + \varepsilon\Lambda)^{-1}$ и $x_\varepsilon = (1 + \varepsilon\Lambda)^{-1}x$ для $x \in \mathcal{H}$. Для $u, v, x \in \mathcal{H}$ обозначим через $|u\rangle\langle v|$ оператор единичного ранга в $\mathcal{H}$, так что $|u\rangle\langle v|x = \langle v, x \rangle u$. Для операторов с конечным следом введем обозначение следа tr .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для любого подмножества $\mathbb{A} \subset \mathcal{F}$, являющегося компактным множеством в топологии $\mathcal{F}$, сходимость

$$|\Lambda x_\varepsilon\rangle\langle \Lambda x_\varepsilon| \rightarrow |\Lambda x\rangle\langle \Lambda x|$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ является равномерной относительно нормы $\|\cdot\|_{\text{tr}}$ для каждого $x \in \mathbb{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = \Lambda x$. Тогда $z_\varepsilon = \Lambda x_\varepsilon$ и согласно неравенству треугольника

$$\left\| |z_\varepsilon\rangle\langle z_\varepsilon| - |z\rangle\langle z| \right\|_{\text{tr}} \leq 2\|z_\varepsilon - z\| \cdot \|z\| = 2\|\Lambda x_\varepsilon - \Lambda x\| \cdot \|\Lambda x\|,$$

а это выражение стремится к 0 при $\varepsilon \rightarrow 0$. Данная сходимость равномерна для $x \in \mathbb{A}$, так как $(1 + \varepsilon\Lambda)^{-1}$ возрастает до 1 и Λx принадлежит множеству $\Lambda(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H}$, которое является компактным в силу непрерывности Λ как оператора, действующего из $\mathcal{F}$ в $\mathcal{H}$. Таким образом, $\|(I - (1 + \varepsilon\Lambda)^{-1})u\|$ стремится к 0 равномерно при $\varepsilon \rightarrow 0$ для $u \in \Lambda(\mathbb{A})$ в силу теоремы Дини.

Следующий результат дает полную характеристику конуса $CPn_*(\mathcal{F})$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{G} = \{\lambda \circ R : R \in CPn(\mathcal{H})\}$, а $\mathcal{E}$ – множество всех элементов Φ , удовлетворяющих условиям а)–г). Тогда $\mathcal{G} = CPn_*(\mathcal{F}) = \mathcal{E}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{G} \subset CPn_*(\mathcal{F})$ и $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. Тогда для завершения доказательства достаточно убедиться, что $CPn_*(\mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$.

Пусть $R \in CPn(\mathcal{H})$. Произвольный элемент вида $\lambda \circ R$ является отображением из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ (обозначения см. в п. 1). При любом $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(\lambda \circ R)(X)$ имеет точное выражение в виде полуторалинейной формы:

$$(\lambda \circ R)(X)[\varphi, \psi] = \langle \varphi, \Lambda^{-1} R(X) \Lambda \psi \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \Lambda \varphi, R(X) \Lambda \psi \rangle, \quad \varphi, \psi \in \mathcal{F}. \quad (9)$$

Положим $R_\varepsilon(X) = \Lambda_\varepsilon R(X) \Lambda_\varepsilon$. Заметим, что $R_\varepsilon(\cdot) \in CPn(\mathcal{H})$, так как $\Lambda_\varepsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Необходимо доказать, что $R_\varepsilon \rightarrow \lambda \circ R$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ относительно псевдометрики (2). Действительно, используя (3), (9) и самосопряженность Λ_ε , для $\psi = \varphi \in \mathcal{F}$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle \psi, R_\varepsilon(X) \psi \rangle - (\lambda \circ R)(X)[\psi]| &= |\langle \Lambda \psi_\varepsilon, R(X) \Lambda \psi_\varepsilon \rangle - \langle \Lambda \psi, R(X) \Lambda \psi \rangle| \\ &= |\operatorname{tr}(R(X)[|\Lambda \psi_\varepsilon\rangle\langle \Lambda \psi_\varepsilon| - |\Lambda \psi\rangle\langle \Lambda \psi|])| \\ &\leq \|X\| \cdot \|R(I)\| \cdot \| |\Lambda \psi_\varepsilon\rangle\langle \Lambda \psi_\varepsilon| - |\Lambda \psi\rangle\langle \Lambda \psi| \|_{\operatorname{tr}}. \end{aligned}$$

Это неравенство и предложение 3 показывают, что сходимость равномерна, если X является сужением на ограниченное по норме подмножество $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и ψ принадлежит некоторому компактному подмножеству $\mathcal{F}$. Таким образом, $\lambda \circ R \in CPn_*(\mathcal{F})$.

С другой стороны, пусть $\Phi \in \mathcal{E}$. При каждом $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\Phi(X) \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F}) = \mathbb{B}(\mathcal{F})$ вполне положительно и нормально в смысле условий б), в). Пусть $R = \lambda^{-1} \circ \Phi$. Тогда R представляет собой линейное отображение из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в себя. Вполне положительность и нормальность R следуют из его представления в виде суперпозиции вполне положительного и нормального отображений. Следовательно, $R \in CPn(\mathcal{H})$ и $\Phi = \lambda \circ R \in \mathcal{G}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. 1) Для любого $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$, существует последовательность $\{A_k\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ такая, что $\sum_k A_k^* A_k$ сильно сходится и

$$\Phi(X)[\psi, \varphi] = \sum_k \langle A_k \Lambda \psi, X A_k \Lambda \varphi \rangle, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \psi, \varphi \in \mathcal{H}. \quad (10)$$

2) Свойства а)–г) являются достаточными условиями того, что элемент $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$.

3) Произвольный элемент из $CPn_*(\mathcal{F})$ является последовательностью элементов из $CPn(\mathcal{H})$ в топологии, индуцированной $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \in CPn(\mathcal{H})$ и $\Phi = \lambda \circ R$. Для доказательства утверждения 1) достаточно напомнить, что согласно теореме Крауза существует последовательность $\{A_k\}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такая, что $\sum_k A_k^* A_k$ сильно сходится и

$$R(X) = \sum_k A_k^* X A_k, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Следовательно, согласно (9) имеем

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \langle \Lambda \varphi, R(X) \Lambda \psi \rangle = \sum_k \langle A_k \Lambda \varphi, X A_k \Lambda \psi \rangle.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение 2). Утверждение 3) доказывается на основе теоремы 1. А именно, возьмем $\varepsilon = 1/n$. Тогда $\{R_{1/n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ является требуемой аппроксимирующей последовательностью.

3. Пополнения, порожденные проективными пределами. Предположим, что $\mathcal{F}$ – счетное гильбертово пространство, т.е. полное локально выпуклое векторное пространство с топологией, заданной последовательностью гильбертовых полунорм $\{\|\cdot\|_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Пусть $\mathcal{H}_n$ – пополнение $\mathcal{F}$ относительно полунормы $\|\cdot\|_n$. Известно, что $\mathcal{F}$ является *проективным пределом* последовательности гильбертовых пространств $\mathcal{H}_n$ и, следовательно, представляет собой рефлексивное пространство Фреше [8, утверждение 1.2.1, с. 4], что, в частности, означает его метризуемость.

Предположим, что пространства $\mathcal{H}_n$ образуют убывающую последовательность

$$\mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{H}_n,$$

и

$$\|u\|_{n+1} \leq \|u\|_n, \quad u \in \mathcal{F}. \quad (11)$$

Так как пространство $\mathcal{F}$ плотно в каждом $\mathcal{H}_n$, то $\mathcal{H}_{n+1}$ плотным непрерывным образом вложено в $\mathcal{H}_n$.

Примем $\mathcal{H}_0$ в качестве исходного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Согласно предложению 1 существует возрастающая последовательность

$$CPn(\mathcal{H}) \subseteq CPn_*(\mathcal{H}_1) \subseteq CPn_*(\mathcal{H}_2) \subseteq \cdots \subseteq CPn_*(\mathcal{F}). \quad (12)$$

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место представление*

$$CPn_*(\mathcal{F}) = \bigcup_k CPn_*(\mathcal{H}_k). \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (12) объединение множеств $CPn_*(\mathcal{H}_k)$ содержится в $CPn_*(\mathcal{F})$. Для доказательства обратного включения прежде всего отметим, что любой элемент $G \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ представляет собой полуторалинейную форму, так что существуют полунормы $\|\cdot\|_k$ и $\|\cdot\|_m$, а также положительная постоянная M , зависящая от G , такие, что

$$|G[u, v]| \leq M \|u\|_k \cdot \|v\|_m \quad \text{для } u, v \in \mathcal{F}$$

(см. доказательство такого же свойства для совместно непрерывных билинейных форм из [10, гл. 41, с. 420]). Следуя (11), можно предположить, что $k = m$. Следовательно, G имеет единственное совместно непрерывное расширение на $\mathcal{H}_k$, так как $\mathcal{F}$ плотно в $\mathcal{H}_k$. Пусть $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$. Тогда $\Phi(X) \in \mathbb{B}_*(\mathcal{F})$ при каждом $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и существует гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$, в котором $\Phi(X)$ может быть расширено до совместно непрерывной полуторалинейной формы. Обозначим это расширение тоже символом $\Phi(X)$. Индекс k зависит от Φ и в общем случае от X , но мы будем считать, что можно выбрать один и тот же индекс k для всех X , зависящий только от Φ . В самом деле, рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_k$, на которое можно непрерывным образом расширить $\Phi(I)$. Тогда согласно (4) имеем следующие неравенства для произвольного самосопряженного X , всех $\psi \in \mathcal{F}$ и некоторой положительной постоянной M :

$$|\Phi(X)[\psi]| \leq \|X\| \cdot |\Phi(I)[\psi]| \leq \|X\| M \|\psi\|_k^2.$$

Так как любой ограниченный оператор можно представить в виде линейной комбинации самосопряженных, а отображение Φ линейно по операторной переменной, то $\Phi(X) \in \mathbb{B}_*(\mathcal{H}_k)$ для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Другими словами, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_k)$. Таким образом, получено (13).

Из (12) и (13) видно, что множество $CPn_*(\mathcal{F})$ может быть естественным образом снабжено топологией индуктивного предела. Согласно определению данная топология является наиболее сильной в $CPn_*(\mathcal{F})$, что делает непрерывным отображение, осуществляющее вложение $CPn_*(\mathcal{H}_k)$ в $CPn_*(\mathcal{F})$, $k \geq 0$. Согласно предложению 1 топология, индуцированная $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$, также делает непрерывными отображения вложения. Таким образом, эта топология слабее (или равна) топологии индуктивного предела. Естественным образом возникает задача о возможной эквивалентности обеих топологий. Мы отсылаем к работе [11] за определением индуктивного предела в случае общих топологических пространств и его основными свойствами.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1) Для любого $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$ существуют плотно определенный положительный самосопряженный оператор Λ и последовательность $\{A_k\}$ ограниченных операторов в $\mathcal{H}$ такие, что $\sum_k A_k^* A_k$ сильно сходится и выполнено (10).

2) Свойства а)–г) являются достаточными условиями того, что $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$.

3) Любой элемент из $CPn_*(\mathcal{F})$ является пределом последовательности элементов из $CPn(\mathcal{H})$ относительно топологии, индуцированной $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $\mathcal{H}_0$ рассматривается в качестве исходного гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Пусть $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$. По теореме 2 существует индекс k такой, что $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_k)$. Для доказательства применим предложение 2 и следствие 1 к гильбертову пространству $\mathcal{H}_k$. А именно, пусть Λ – плотно определенный положительный самосопряженный оператор, удовлетворяющий условиям (7); $\{A_k\}$ – последовательность в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, а $\{R_{1/k}\}$ – последовательность в $CPn(\mathcal{H})$, описанная в следствии 1. Последовательность $\{R_{1/k}\}$ сходится к Φ в топологии $CPn_*(\mathcal{H}_k)$, но $CPn_*(\mathcal{H}_k)$ непрерывно вложено в $CPn_*(\mathcal{F})$ (см. предложение 1); следовательно, сходимость последовательности $\{R_{1/k}\}$ имеет место и в топологии $CPn_*(\mathcal{F})$. Следствие доказано.

4. Примеры и замечания.

ПРИМЕР 1. Приведем достаточное условие того, что отображение $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть Φ переводит $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ в множество плотно определенных полуторалинейных форм на $\mathcal{H}$. Предположим, что

- 1) $\Phi(I)$ – плотно определенная замкнутая квадратичная форма на $\mathcal{H}$;
- 2) для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет место включение $\text{dom } \Phi(I) \subseteq \text{dom } \Phi(X)$;
- 3) Φ удовлетворяет условиям а), б) и г), а векторные переменные принадлежат $\text{dom } \Phi(I)$.

Тогда $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$ для любого банахова пространства $\mathcal{F}$ такого, что

$$\mathcal{F} \subseteq \text{dom } \Phi(I), \quad \|u\|_{\mathcal{F}}^2 \geq a[u], \quad (14)$$

где

$$a[u] = \|u\|_{\mathcal{H}}^2 + \Phi(I)[u], \quad (15)$$

и $\mathcal{F}$ плотно в $\text{dom } \Phi(I)$ относительно нормы $a[u]^{1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Phi(I)$ замкнуто, то квадратичная форма, определенная на $\text{dom } \Phi(I)$ формулой (15) позволяет рассматривать данное пространство как гильбертово пространство со скалярным произведением $(u, v)_\Phi = (u, v) + (\Phi(I)^{1/2}u, \Phi(I)^{1/2}v)$, которое плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{H}$. Пусть $\mathcal{H}_1 = \text{dom } \Phi(I)$. По предположению Φ удовлетворяет условиям а), б) и г). Осталось доказать условие в).

Как уже отмечалось, условия а) и б) влекут неравенство (4) для самосопряженных элементов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Таким образом, для любого самосопряженного элемента $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $\Phi(X)$ является ограниченной полуторалинейной формой на $\mathcal{H}_1$. Так как произвольный элемент из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ представим в виде линейной комбинации самосопряженных операторов, мы приходим к тому же заключению для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Следовательно, условие в) выполнено. Согласно следствию 1 $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_k)$. Если $\mathcal{F}$ – банахово плотное в $\mathcal{H}_1$ пространство такое, что справедливо (14), то предложение 1 влечет $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$.

Два следующих примера связаны с незамыкаемыми квадратичными формами.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим отображение $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$, для которого $\Phi(I)$ является плотно определенной замкнутой квадратичной формой на $\mathcal{H}$, хотя существует элемент $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что квадратичная форма $\Phi(X)$ незамыкаема, несмотря на справедливость неравенства (4), и следовательно, не имеет операторной реализации.

Напомним, что квадратичная форма является *замыкаемой*, если она имеет замкнутое расширение [9, гл. VI, разд. 1]. Эквивалентным условием замыкаемости является следующее [9, теорема VI.1.17, с. 315]:

$$\psi_n \in \text{dom } a, \quad \psi_n \rightarrow 0 \text{ и } a[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0 \text{ при } n, m \rightarrow \infty \implies a[\psi_n] \rightarrow 0.$$

Пусть $\mathcal{H} = \ell_2$ представляет собой пространство квадратично суммируемых последовательностей комплексных чисел. Пусть N – оператор числа частиц, т.е.

$$\text{dom } N = \{(a_n) \in \mathcal{H} : (na_n) \in \mathcal{H}\}, \quad N((a_n)) = (na_n).$$

Пусть $\mathcal{H}_k = \text{dom } N^{k/2}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, – пространство со скалярным произведением $\langle \varphi, \psi \rangle_k = \langle N^{k/2}\varphi, N^{k/2}\psi \rangle$.

Положим $\mathcal{F} = \bigcap_k \mathcal{H}_k$. Тогда $\mathcal{F}$ является пространством всех элементов из $\{a_n\} \in \mathcal{H}$ таких, что $\{n^k a_n\} \in \mathcal{H}$ для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Известно, что $\mathcal{F}$ плотно в каждом $\mathcal{H}_k$ [12, с. 142, 143]. Положим

$$\Phi(X)[\psi] = \langle N^{3/2}\psi, XN^{3/2}\psi \rangle.$$

Пусть $k = 3$, $\Lambda = N^{3/2}$, $A_1 = I$ и $A_l = 0$ при $l \geq 2$. Для таких операторов Φ имеет структуру, описанную в следствии 1. Это показывает, что $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_3)$ и, следовательно, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$. Более того, $\Phi(I)[\psi] = \|N^{3/2}\psi\|^2$ является замкнутой положительной плотно определенной квадратичной формой с $\text{dom } \Phi(I) = \text{dom } N^{3/2}$. Согласно неравенству Шварца (4) справедливо для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Пусть $\{e_n\}$ – канонический базис в $\mathcal{H}$, т.е. все координаты e_n равны 0 за исключением единичной n -й компоненты.

Пусть $\psi_n = N^{-1/2}e_n = n^{-1/2}e_n$. Тогда $\psi_n \rightarrow 0$ и $N^{3/2}\psi_n = ne_n$. Пусть $x = \{1/n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}$ и $X = |x\rangle\langle x|$. Имеем

$$\langle x, N^{3/2}\psi_n \rangle = \langle x, ne_n \rangle = 1. \quad (16)$$

Для любого $\psi \in \mathcal{F}$

$$\Phi(X)[\psi] = \langle N^{3/2}\psi, |x\rangle\langle x|N^{3/2}\psi \rangle = |\langle x, N^{3/2}\psi \rangle|^2. \quad (17)$$

В частности, используя (16) и (17), получаем

$$\Phi(X)[\psi_n] = |\langle x, N^{3/2}\psi_n \rangle|^2 = 1$$

для всех n . С другой стороны,

$$\Phi(X)[\psi_n - \psi_m] = |\langle x, N^{3/2}(\psi_n - \psi_m) \rangle|^2 = 0.$$

Это показывает, что $\Phi(X)$ является положительной плотно определенной, но незамыкаемой квадратичной формой.

ПРИМЕР 3. Рассмотрим некоторую модификацию примера 2, когда $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$ такой, что $\Phi(I)$ – незамыкаемая квадратичная форма на $\mathcal{H}$. Мы делаем упор на ключевой момент: $\Phi(I)$ *необязательно должна быть замыкаемой квадратичной формой в исходном пространстве, но она обязана быть полуторалинейной формой в некотором гильбертовом пространстве, вложенном в исходное плотным и непрерывным образом.*

Пусть $\mathcal{H}$, $\mathcal{F}$ и $x \in \mathcal{H}$ такие же, что и в примере 2. Пусть $y = x/\|x\|$. Тогда $|y\rangle\langle y|$ является ортогональным проектором. Определим $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ следующим образом:

$$\Phi(X)[u, v] = \langle |y\rangle\langle y|N^{3/2}u, X|y\rangle\langle y|N^{3/2}v \rangle.$$

По-прежнему, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$, так как $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_3)$ с $\Lambda = N^{3/2}$, $A_1 = |y\rangle\langle y|$ и $A_k = 0$ при $k \geq 2$. Далее,

$$\Phi(I)[u] = |\langle y, N^{3/2}u \rangle|^2.$$

Таким образом, квадратичная форма оказывается равной числу, умноженному на незамыкаемую квадратичную форму из примера 2; следовательно, она незамыкаема в $\mathcal{H}$.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим классическую гильбертовскую тройку $\mathcal{S} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{S}'$, где $\mathcal{S}$ – пространство Шварца быстро убывающих гладких функций на $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}$ – пространство квадратично интегрируемых по Лебегу функций, а $\mathcal{S}'$ – пространство обобщенных функций ограниченного роста. Известно, что $\mathcal{F}$ является проективным пределом $\mathcal{H}_k$ – области определения квадратного корня из оператора гармонического осциллятора N , определенного формулой (5) (см. [8, с. 16]). При максимальной области определения в $\mathcal{H}$ N становится положительным самосопряженным оператором.

Согласно теореме 2 и следствию 2 для любого $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$ существует $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такое, что $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}_k)$. Таким образом, можно построить элементы $\Phi \in CPn_*(\mathcal{F})$ такие, что $\Phi(I)$ будет сингулярной квадратичной формой, аналогичной дельта-функции на $\mathbb{R}^2$, т.е. $\Phi(I)[u, v] = \overline{u}(0)v(0)$, где черта означает комплексное сопряжение.

Автор выражает благодарность профессору А.М. Чеботареву и профессору Р. Кесаде за интерес, проявленный к работе, и полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Чеботарев А. М. О достаточных условиях консервативности минимальной динамической полугруппы // Матем. заметки. 1992. Т. 52. № 4. С. 112–127.
- [2] Chebotarev A. M. Minimal solutions in classical and quantum probability // Quantum Probability and Related Topics. VII / ed. L. Accardi. Singapore: World Sci. Publ., 1992. P. 79–91.
- [3] Chebotarev A. M., García J., Quezada R. A priori estimates and existence theorems for the Lindblad equation with unbounded, time-dependent coefficients // Recent Trends in Infinite Dimensional Non-Commutative Analysis. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kokyuroku. V. 1035. Kyoto: Kyoto Univ., 1998. P. 44–65.
- [4] Parthasaraty K. R. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Berlin: Birkhäuser, 1992.
- [5] Bratelli O., Robinson D. W. Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics. I. Berlin: Springer, 1981.
- [6] Kraus K. General state changes in quantum theory // Ann. Physics. 1971. V. 64. P. 311–335.
- [7] Kelley J. L. General Topology. Grad. Texts in Math. New York: Springer, 1955.
- [8] Obata N. White Noise Calculus and Fock Space. Lecture Notes in Math. V. 1577. Berlin–Heidelberg: Springer, 1994.
- [9] Kato T. Perturbation Theory of Linear Operators. New York: Springer, 1966.
- [10] Treves F. Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels. New York–San Francisco–London: Acad. Press, 1967.
- [11] Joshi K. D. Introduction to General Topology. New York–Chichester–Brisbane–Ontario–Singapore: Wiley, 1983.
- [12] Reed M., Barry S. Methods of Modern Mathematical Physics. V. 1. Functional Analysis. New York–London–Toronto–Sidney–San Francisco: Acad. Press, 1980.

UAM-Iztapalapa, Depto. de Matemáticas, México
E-mail: jcgcc@xanum.uam.mx

Поступило
30.12.97