Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Лисинь Мао, О некоторых классах, ортогональных к плоским и FP -инъективным функторам, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 93–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10410>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 13:27:37

О некоторых классах, ортогональных к плоским и FP -инъективным функторам

Лисинь Мао

Мы развиваем некую относительную алгебру в категории функторов из конечно представимых модулей в абелевы группы. Более точно, мы вводим понятия $\mathfrak{F}$ -инъективных, $\mathfrak{F}$ -проективных и $\mathfrak{F}$ -плоских функторов, которые появляются, когда мы изучаем накрытия и оболочки функторов. В статье исследуются связи между этими функторами и приводятся некоторые приложения.

Библиография: 18 названий.

DOI: 10.4213/mzm10410

1. Введение. На всем протяжении настоящей статьи R – ассоциативное кольцо с единицей и все модули унитарны. Модуль характеров $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ R -модуля M обозначается через M^+ . Для данных R -модулей M и N мы используем сокращение $(M, N) := \text{Hom}_R(M, N)$. Символами $\text{mod-}R$ и $R\text{-mod}$ обозначаются категории конечно представимых правых и левых R -модулей соответственно, а символом Ab – категория абелевых групп. Категория контравариантных аддитивных функторов $(\text{mod-}R)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ обозначается через $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$, а категория ковариантных функторов $\text{mod-}R \rightarrow \text{Ab}$ – через $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Если F и G – объекты из $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ или $(\text{mod-}R, \text{Ab})$, то множество морфизмов $[F, G]$ состоит из естественных преобразований из F в G .

Хорошо известно, что обе категории функторов $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ и $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ являются локально конечно представимыми категориями Гротендика. На них обратили пристальное внимание в 1960-х годах. Особенно важную роль они играют в исследованиях по теории моделей модулей и теории представлений артиновых алгебр (см., например, [1]–[12]). Согласно [12; следствие 7.4, с. 97] правило $M \rightarrow (\cdot, M)$ определяет вполне строгий точный слева функтор из категории $\text{Mod-}R$ правых R -модулей в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$. Аналогично, имеется вполне строгий точный справа функтор из категории $R\text{-Mod}$ левых R -модулей в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$, задаваемый правилом $M \rightarrow \cdot \otimes M$.

Несмотря на то, что, вообще говоря, не у всякого R -модуля есть плоская оболочка [13], любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ имеет плоскую оболочку, обладающую свойством единственности отображения [11]. В настоящей статье мы получаем

Работа выполнена при поддержке фондов NSFC (грант № 11071111, 11171149), NSF of Jiangsu Province of China (грант № BK2011068), Jiangsu 333 Project, Jiangsu Six Major Talents Peak Project.

двойственный результат, согласно которому любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ имеет FP -инъективное накрытие, обладающее свойством единственности отображения (теорема 2.3). Поэтому естественно изучать коядра плоских оболочек в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ и ядра FP -инъективных накрытий в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. С этой целью мы вводим понятия $\mathfrak{F}$ -инъективных, $\mathfrak{F}$ -проективных и $\mathfrak{F}$ -плоских функторов, которые являются Ext-ортогональными или Тог-ортогональными классами к FP -инъективным или плоским функторам. Эти функторы тесно связаны с FP -инъективными (пред)накрытиями в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ или плоскими (пред)оболочками в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$. Например, функтор F из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен, если и только если F – ядро FP -инъективного преднакрытия $E \rightarrow L$ с инъективным E ; F $\mathfrak{F}$ -инъективен и $[G, F] = 0$ для любого FP -инъективного функтора G из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$, если и только если F является ядром FP -инъективного накрытия, обладающего свойством единственности отображения (утверждение 3.3). Пользуясь этими результатами, мы получаем теорему разложения для $\mathfrak{F}$ -инъективных функторов (теорема 3.4). У $\mathfrak{F}$ -проективных функторов имеются двойственные свойства. Мы также проясняем связи между $\mathfrak{F}$ -инъективными, $\mathfrak{F}$ -проективными, $\mathfrak{F}$ -плоскими и другими функторами. Наконец, мы описываем некоторые важные кольца в терминах $\mathfrak{F}$ -инъективных, $\mathfrak{F}$ -проективных и $\mathfrak{F}$ -плоских функторов. Например, мы доказываем следующие утверждения: R – регулярное кольцо фон Неймана, если и только если любой $\mathfrak{F}$ -инъективный функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ (FP -)инъективен, если и только если любой $\mathfrak{F}$ -плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ плоский, если и только если любой $\mathfrak{F}$ -проективный функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ проективен (теорема 5.1); R – наследственное слева регулярное кольцо фон Неймана, если и только если любой фактор $\mathfrak{F}$ -инъективного функтора из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен, если и только если любой подфунктор $\mathfrak{F}$ -проективного функтора из $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -проективен (теорема 5.2).

Напомним некоторые известные понятия и факты, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{A}$ – категория и $\mathcal{B}$ – некоторый класс ее объектов. Следуя [14], [15], мы называем морфизм $\phi: B \rightarrow A$ из $\mathcal{A}$ $\mathcal{B}$ -преднакрытием объекта A , если $B \in \mathcal{B}$ и для любого морфизма $f: B' \rightarrow A$ с $B' \in \mathcal{B}$ найдется морфизм $g: B' \rightarrow B$ такой, что $\phi g = f$; $\mathcal{B}$ -преднакрытие $\phi: B \rightarrow A$ называется $\mathcal{B}$ -накрытием объекта A , если любой эндоморфизм $g: B \rightarrow B$ такой, что $\phi g = \phi$, является изоморфизмом. Говорят, что $\mathcal{B}$ -накрытие $\phi: B \rightarrow A$ обладает свойством единственности отображения [16], если для любого морфизма $f: B' \rightarrow A$ с $B' \in \mathcal{B}$ существует единственный морфизм $g: B' \rightarrow B$ такой, что $\phi g = f$. Имеются двойственные определения $\mathcal{B}$ -предоболочки и $\mathcal{B}$ -оболочки (обладающей свойством единственности отображения). $\mathcal{B}$ -накрытия ($\mathcal{B}$ -оболочки) единственны с точностью до изоморфизма, но необязательно существуют.

Последовательность функторов $F \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\nu} H$ из $(\mathcal{C}, \text{Ab})$ с существенно малой аддитивной категорией $\mathcal{C}$ называется *точной*, если для любого $A \in \mathcal{C}$ соответствующая последовательность абелевых групп $F(A) \xrightarrow{\mu_A} G(A) \xrightarrow{\nu_A} H(A)$ точна.

Функтор X из $(\mathcal{C}, \text{Ab})$ с существенно малой аддитивной категорией $\mathcal{C}$ называется *конечно представимым*, если $[X, -]$ коммутирует с переходом к прямому пределу или, что эквивалентно, найдется точная последовательность $(A, \cdot) \rightarrow (B, \cdot) \rightarrow X \rightarrow 0$ с A и B из $\mathcal{C}$.

Функтор F из $(\mathcal{C}, \text{Ab})$ с существенно малой аддитивной категорией $\mathcal{C}$ называется *FP-инъективным*, если $\text{Ext}^1[X, F] = 0$ для любого конечно представимого функтора $X \in (\mathcal{C}, \text{Ab})$. Согласно [5; лемма 1.4], функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ *FP-инъективен*, если и только если он изоморфен функтору $\cdot \otimes M$ из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ с некоторым левым R -модулем M . Более того, в [7; 1.2] инъективные объекты из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ характеризуются как функторы, изоморфные функторам вида $\cdot \otimes M$ с чисто инъективным левым R -модулем M ; здесь M называется *чисто инъективным* [13; с. 112], если для любой чисто точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ левых R -модулей последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(C, M) \rightarrow \text{Hom}(B, M) \rightarrow \text{Hom}(A, M) \rightarrow 0$$

точна.

Функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ называется *представимым*, если он изоморфен функтору вида $(\cdot, N)$, где N – конечно представимый правый R -модуль. Из леммы Йонеды (Yoneda) следует, что функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ представим, если и только если он является конечно порожденным проективным объектом в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$. Таким образом, функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ проективен, если и только если он изоморфен прямому слагаемому в прямой сумме представимых функторов, т.е. изоморфен функтору вида $(\cdot, N)$ с чисто проективным правым R -модулем N ; здесь N называется *чисто проективным* [13; с. 178], если для любой чисто точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ правых R -модулей последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(N, A) \rightarrow \text{Hom}(N, B) \rightarrow \text{Hom}(N, C) \rightarrow 0$$

точна.

Для данных $F \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ и $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ имеется *тензорное произведение* $F \otimes G \in \text{Ab}$, определяемое так, что функтор $F \otimes \cdot : (\text{mod-}R, \text{Ab}) \rightarrow \text{Ab}$ становится сопряженным слева к $(F(\cdot), \cdot) : \text{Ab} \rightarrow (\text{mod-}R, \text{Ab})$, где $(F(\cdot), \cdot)(C)(D) = (F(D), C)$ для $C \in \text{Ab}$ и $D \in \text{mod-}R$. Соответственно, мы можем также определить функтор $\cdot \otimes G : (\text{mod-}R)^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$ как сопряженный слева к функтору $(G(\cdot), \cdot) : \text{Ab} \rightarrow ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$. Тензорное произведение функторов обладает обычными свойствами, например, $F \otimes (X, \cdot) \cong F(X)$ и $(\cdot, X) \otimes G \cong G(X)$ для $X \in \text{mod-}R$. Стандартным образом мы можем определить левые производные функторы $\text{Tor}_n[F, \cdot]$ и $\text{Tor}_n[\cdot, G]$.

Функтор $F \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ называется *плоским*, если $F \otimes \cdot$ является точным функтором или, что эквивалентно, $\text{Tor}_1[F, G] = 0$ для любого (конечно представимого) функтора $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$. Аналогично, мы можем определить плоский функтор в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Согласно [6; теорема 1.4] функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является плоским, если и только если он изоморфен функтору $(\cdot, M)$ с некоторым правым R -модулем M .

Необъясненные понятия и обозначения можно найти в [12], [13], [15], [17], [18].

2. Плоские и FP-инъективные функторы. Мы начинаем со следующей леммы. Напомним, что кольцо R называется *когерентным справа*, если его любой конечно порожденный правый идеал конечно представим.

ЛЕММА 2.1. *Для кольца R и $n \geq 0$ справедливы следующие утверждения:*

(1) имеем

$$(\mathrm{Tor}_n[A, B], C) \cong \mathrm{Ext}^n[A, (B(\cdot), C)] \cong \mathrm{Ext}^n[B, (A(\cdot), C)]$$

для любых $A \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $B \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ и любой инъективной абелевой группы C ;

(2) $\mathrm{Tor}_n[(B(\cdot), C), A] \cong (\mathrm{Ext}^n[A, B], C)$ для любых конечно представимых функторов $A \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$, $B \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ и любой инъективной абелевой группы C ;

(3) если R когерентно справа, то $\mathrm{Tor}_n[A, (B(\cdot), C)] \cong (\mathrm{Ext}^n[A, B], C)$ для любых конечно представимых функторов $A \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $B \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ и любой инъективной абелевой группы C .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Прежде всего, для любых $A \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$, $B \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ и любой инъективной абелевой группы C по определению имеются изоморфизмы

$$(A \otimes B, C) \cong [A, (B(\cdot), C)] \cong [B, (A(\cdot), C)].$$

Пусть теперь $\mathbf{A} \cdot: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ – сокращенная проективная резольвента для A . Применяя $\cdot \otimes B$, получаем комплекс

$$\mathbf{A} \cdot \otimes B: \cdots \rightarrow P_1 \otimes B \rightarrow P_0 \otimes B \rightarrow 0.$$

Согласно [18; упражнение 6.4, с. 170], поскольку функтор $(\cdot, C)$ точен, имеем

$$\begin{aligned} (\mathrm{Tor}_n[A, B], C) &= (H_n(\mathbf{A} \cdot \otimes B), C) \cong H^n((\mathbf{A} \cdot \otimes B), C) \\ &\cong H^n([\mathbf{A} \cdot, (B(\cdot), C)]) = \mathrm{Ext}^n[A, (B(\cdot), C)]. \end{aligned}$$

Аналогично мы можем показать, что $(\mathrm{Tor}_n[A, B], C) \cong \mathrm{Ext}^n[B, (A(\cdot), C)]$, воспользовавшись проективной резольвентой для B .

(2) Пусть $A \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ – конечно представим, т.е. в $(\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ найдется точная последовательность $(X, \cdot) \rightarrow (Y, \cdot) \rightarrow A \rightarrow 0$ с конечно представимыми правыми R -модулями X и Y . Для любого $B \in (\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ получается точная последовательность

$$0 \rightarrow [A, B] \rightarrow [(Y, \cdot), B] \rightarrow [(X, \cdot), B].$$

Используя лемму Йонеды, мы приходим к точной последовательности

$$0 \rightarrow [A, B] \rightarrow B(Y) \rightarrow B(X).$$

Поэтому для любой инъективной абелевой группы C имеется точная последовательность

$$(B(X), C) \rightarrow (B(Y), C) \rightarrow ([A, B], C) \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы получаем следующую коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} (B(\cdot), C) \otimes (X, \cdot) & \longrightarrow & (B(\cdot), C) \otimes (Y, \cdot) & \longrightarrow & (B(\cdot), C) \otimes A & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \\ (B(X), C) & \longrightarrow & (B(Y), C) & \longrightarrow & ([A, B], C) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

По лемме о пяти гомоморфизмах (Five Lemma) получаем $(B(\cdot), C) \otimes A \cong ([A, B], C)$.

Согласно [5; п. 1.2] существует сокращенная проективная резольвента для A :

$$\mathbf{A}_\bullet: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$$

с конечно порожденными P_i . Применяя $(B(\cdot), C) \otimes \cdot$, мы получаем комплекс

$$(B(\cdot), C) \otimes \mathbf{A}_\bullet: \cdots \rightarrow (B(\cdot), C) \otimes P_1 \rightarrow (B(\cdot), C) \otimes P_0 \rightarrow 0.$$

Поскольку функтор $(\cdot, C)$ точен, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_n[(B(\cdot), C), A] &= H_n((B(\cdot), C) \otimes \mathbf{A}_\bullet) \cong H_n([\mathbf{A}_\bullet, B], C)) \\ &\cong (H^n([\mathbf{A}_\bullet, B]), C) = (\mathrm{Ext}^n[A, B], C). \end{aligned}$$

(3) Поскольку A конечно представим, в $((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ найдется точная последовательность $(\cdot, X) \rightarrow (\cdot, Y) \rightarrow A \rightarrow 0$ с конечно представимыми правыми R -модулями X и Y .

Для любого $B \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ и инъективной абелевой группы C имеется следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc} (\cdot, X) \otimes (B(\cdot), C) & \longrightarrow & (\cdot, Y) \otimes (B(\cdot), C) & \longrightarrow & A \otimes (B(\cdot), C) & \longrightarrow & 0 \\ \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \downarrow & & \\ (B(X), C) & \longrightarrow & (B(Y), C) & \longrightarrow & ([A, B], C) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Поэтому по лемме о пяти гомоморфизмах $A \otimes (B(\cdot), C) \cong ([A, B], C)$.

Поскольку кольцо R когерентно справа, подкатегория конечно представимых функторов в $((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ является абелевой категорией (см. [1]). Поэтому A допускает сокращенную проективную резольвенту: $\mathbf{A}_\bullet: \cdots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0$ с конечно порожденными P_i . Применяя $\cdot \otimes (B(\cdot), C)$, получаем комплекс

$$\mathbf{A}_\bullet \otimes (B(\cdot), C): \cdots \rightarrow P_1 \otimes (B(\cdot), C) \rightarrow P_0 \otimes (B(\cdot), C) \rightarrow 0.$$

Поэтому из точности функтора $(\cdot, C)$ следует, что

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_n[A, (B(\cdot), C)] &= H_n(\mathbf{A}_\bullet \otimes (B(\cdot), C)) \cong H_n([\mathbf{A}_\bullet, B], C)) \\ &\cong (H^n([\mathbf{A}_\bullet, B]), C) = (\mathrm{Ext}^n[A, B], C). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим аддитивный функтор F из аддитивной категории $\mathcal{C}$ в Ab . Обозначим через F^+ аддитивный функтор из $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ в Ab , определенный как $F^+(M) = (F(M))^+$ для любых $M \in \mathcal{C}$.

Если в лемме 2.1 положить $C = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, то получается

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Для кольца R справедливы следующие утверждения:

- (1) функтор $F \in ((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$ (соответственно $(\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$) является плоским, если и только если F^+ (FP -)инъективен в $(\mathrm{mod}\text{-}R, \mathrm{Ab})$ (соответственно $((\mathrm{mod}\text{-}R)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ab})$);

- (2) функтор $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ FP -инъективен, если и только если G^+ плоский в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$;
- (3) пусть R когерентно справа; тогда функтор $G \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ FP -инъективен, если и только если G^+ плоский в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$.

Известно, что любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ имеет плоскую оболочку, обладающую свойством единственности отображения (см. [11; утверждение 2.4]). Следующая теорема двойственна к этому результату.

ТЕОРЕМА 2.3. *Любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ имеет FP -инъективное накрытие, обладающее свойством единственности отображения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$. Определим $\varphi: \cdot \otimes F(R_R) \rightarrow F$ формулой

$$\varphi_M(x \otimes t) = F(\xi_M(x))(t) \in F(M)$$

для любых $M \in \text{mod-}R$, $x \in M$ и $t \in F(R_R)$, где $\xi_M: M \rightarrow (R, M)$ – стандартный естественный изоморфизм. Пусть $A \in R\text{-Mod}$ и $\delta_A: A \rightarrow R \otimes A$ – стандартный естественный изоморфизм. Тогда отображение $[\cdot \otimes A, \cdot \otimes F(R_R)] \xrightarrow{\varphi_*} [\cdot \otimes A, F]$ имеет обратное, определенное как $\tau \rightarrow \cdot \otimes \tau_R \delta_A$ для любого $\tau \in [\cdot \otimes A, F]$. Таким образом, φ – FP -инъективное накрытие, обладающее свойством единственности отображения.

3. $\mathfrak{F}$ -инъективные, $\mathfrak{F}$ -проективные и $\mathfrak{F}$ -плоские функторы. Чтобы описать структуру FP -инъективных накрытий в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ или плоских оболочек в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$, мы вводим несколько функторов, ортогональных к FP -инъективным или плоским функторам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для данного кольца R функтор $F \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ называется $\mathfrak{F}$ -инъективным, если $\text{Ext}^1[H, F] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$.

Функтор $Q \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ называется $\mathfrak{F}$ -проективным, если $\text{Ext}^1[Q, T] = 0$ для любого плоского функтора $T \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$.

Функтор $G \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ называется $\mathfrak{F}$ -плоским, если $\text{Tor}_1[G, H] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Ясно, что класс $\mathfrak{F}$ -инъективных функторов из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ замкнут относительно взятия прямых произведений, выделения прямых слагаемых и расширений. Класс $\mathfrak{F}$ -проективных функторов из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ замкнут относительно взятия прямых сумм, выделения прямых слагаемых и расширений. Класс $\mathfrak{F}$ -плоских функторов из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ замкнут относительно перехода к прямым пределам, выделения прямых слагаемых и расширений.

Теперь мы переходим к свойствам $\mathfrak{F}$ -инъективных, $\mathfrak{F}$ -проективных и $\mathfrak{F}$ -плоских функторов. Как мы увидим, эти функторы тесно связаны с ядром FP -инъективного (пред)накрытия в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ или коядром плоской (пред)оболочки в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. *Пусть $F \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$. Тогда*

- (1) F $\mathfrak{F}$ -инъективен, если и только если F является ядром FP -инъективного преднакрытия $E \rightarrow L$ в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ с инъективным E ;
- (2) F $\mathfrak{F}$ -инъективен и $[G, F] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$, если и только если F является ядром FP -инъективного накрытия, обладающего свойством единственности отображения в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Если F $\mathfrak{F}$ -инъективен, то найдется точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ с инъективным E . Для любого FP -инъективного функтора G она индуцирует точную последовательность

$$[G, E] \rightarrow [G, L] \rightarrow \text{Ext}^1[G, F] = 0.$$

Итак, $E \rightarrow L$ – FP -инъективное преднакрытие в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$.

Наоборот, если F – ядро FP -инъективного преднакрытия $f: E \rightarrow L$ с инъективным E , то имеется точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow E/F \rightarrow 0$.

Для любого FP -инъективного функтора G из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ получаем точную последовательность

$$[G, E] \rightarrow [G, E/F] \rightarrow \text{Ext}^1[G, F] \rightarrow 0.$$

Поскольку $[G, E] \rightarrow [G, L] \rightarrow 0$ точна, легко проверить, что последовательность $[G, E] \rightarrow [G, E/F] \rightarrow 0$ также точна. Поэтому $\text{Ext}^1[G, F] = 0$ и F $\mathfrak{F}$ -инъективен.

(2) Если F $\mathfrak{F}$ -инъективен и $[G, F] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$, то существует точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$ с инъективным E .

Для любого FP -инъективного функтора G , мы получаем индуцированную точную последовательность

$$0 = [G, F] \rightarrow [G, E] \rightarrow [G, L] \rightarrow \text{Ext}^1[G, F] = 0.$$

Поэтому $[G, E] \cong [G, L]$, откуда следует, что $E \rightarrow L$ – FP -инъективное накрытие, обладающее свойством единственности отображения в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$.

Наоборот, предположим, что F – ядро FP -инъективного накрытия $f: E \rightarrow L$, обладающего свойством единственности отображения в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Для любого FP -инъективного функтора G точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L$ индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow [G, F] \rightarrow [G, E] \rightarrow [G, L].$$

Поэтому $[G, F] = 0$, так как $[G, E] \rightarrow [G, L]$ взаимно однозначно. Кроме того, F $\mathfrak{F}$ -инъективен согласно [15; утверждение 1.2.2].

ТЕОРЕМА 3.4. *Функтор $F \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен, если и только если $F = X \oplus H$, где X – инъективный функтор, а H – $\mathfrak{F}$ -инъективный функтор такой, что $[G, H] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие “ $\Leftarrow$ ” очевидно.

“ $\Rightarrow$ ” Пусть F – $\mathfrak{F}$ -инъективный функтор. Согласно доказательству утверждения 3.3 (1) найдется точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow E \rightarrow L \rightarrow 0$, где E инъективен и $E \rightarrow L$ – FP -инъективное преднакрытие. Пусть $Q \rightarrow L$ – FP -инъективное

накрытие, обладающее свойством единственности отображения в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Тогда $Q \rightarrow L$ эпиморфно. Поэтому имеется следующая коммутативная диаграмма с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \phi & & \downarrow \gamma & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \sigma & & \downarrow \beta & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & L \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Заметим, что K $\mathfrak{F}$ -инъективен и $[G, K] = 0$ для любого FP -инъективного функтора G вследствие утверждения 3.3 (2). Поскольку $\beta\gamma = 1$, $E = \ker(\beta) \oplus \text{im}(\gamma)$. Поэтому $\ker(\beta)$ инъективен. Согласно лемме о змее (Snake Lemma) $\ker(\sigma) \cong \ker(\beta)$ и поэтому тоже инъективен. Из вышеприведенной диаграммы ясно, что $\sigma\phi = 1$. Поэтому $F = \ker(\sigma) \oplus H$ с $H \cong K$, как и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Если кольцо R когерентно справа и Q – конечно представимый функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ такой, что $\text{Ext}^1[Q, T] = 0$ для любого представимого функтора $T \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$, то Q $\mathfrak{F}$ -проективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ имеется точная последовательность

$$(\cdot, A) \xrightarrow{(\cdot, f)} (\cdot, B) \rightarrow Q \rightarrow 0$$

с конечно представимыми правыми R -модулями A и B . Поскольку R когерентно справа, модуль $K = \ker(f)$ конечно представим. Таким образом мы получаем проективную резольвенту для Q

$$0 \rightarrow (\cdot, K) \rightarrow (\cdot, A) \xrightarrow{(\cdot, f)} (\cdot, B) \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Согласно [6; теорема 1.3], для любого плоского функтора $G \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ имеем $G = \varinjlim T_i$ с представимыми T_i . Рассмотрим комплекс

$$0 \rightarrow [(\cdot, B), \varinjlim T_i] \rightarrow [(\cdot, A), \varinjlim T_i] \rightarrow [(\cdot, K), \varinjlim T_i] \rightarrow 0,$$

изоморфный комплексу

$$0 \rightarrow \varinjlim [(\cdot, B), T_i] \rightarrow \varinjlim [(\cdot, A), T_i] \rightarrow \varinjlim [(\cdot, K), T_i] \rightarrow 0.$$

Поскольку $\varinjlim$ коммутует с переходом к гомологиям, имеем

$$\text{Ext}^1[Q, G] = \text{Ext}^1[Q, \varinjlim T_i] \cong \varinjlim \text{Ext}^1[Q, T_i] = 0.$$

Итак, Q $\mathfrak{F}$ -проективен.

Доказательство следующего результата двойственно к доказательствам утверждения 3.3 и теоремы 3.4.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Для функтора Q из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ справедливы следующие утверждения:

- (1) Q $\mathfrak{F}$ -проективен, если и только если Q – коядро плоской предоболочки $A \rightarrow B$ в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ с проективным B ;
- (2) Q $\mathfrak{F}$ -проективен и $[Q, G] = 0$ для любого плоского функтора $G \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$, если и только если Q – коядро плоской оболочки, обладающей свойством единственности отображения в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$;
- (3) Q $\mathfrak{F}$ -проективен, если и только если $Q = U \oplus V$, где U – проективный функтор, а V – $\mathfrak{F}$ -проективный функтор такой, что $[V, G] = 0$ для любого плоского функтора G из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. Для функтора $A \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ следующие утверждения эквивалентны:

- (1) A $\mathfrak{F}$ -плоский;
- (2) $\text{Tor}_1[A, H] = 0$ для любого инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$;
- (3) $A^+ \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие (1) $\Rightarrow$ (2) тривиально.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть $\cdot \otimes M$ – FP -инъективный функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Согласно [13; утверждение 5.3.9] существует чисто точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ левых R -модулей с чисто инъективным N , которая индуцирует точную последовательность в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$

$$0 \rightarrow \cdot \otimes M \rightarrow \cdot \otimes N \rightarrow \cdot \otimes L \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы получаем расщепленную точную последовательность

$$0 \rightarrow (\cdot \otimes L)^+ \rightarrow (\cdot \otimes N)^+ \rightarrow (\cdot \otimes M)^+ \rightarrow 0.$$

Согласно (2) и лемме 2.1 (1) имеем

$$\text{Ext}^1[A, (\cdot \otimes N)^+] \cong (\text{Tor}_1[A, \cdot \otimes N])^+ = 0.$$

Итак, $\text{Ext}^1[A, (\cdot \otimes M)^+] = 0$, и поэтому

$$(\text{Tor}_1[A, \cdot \otimes M])^+ \cong \text{Ext}^1[A, (\cdot \otimes M)^+] = 0.$$

Следовательно, $\text{Tor}_1[A, \cdot \otimes M] = 0$, т.е. A $\mathfrak{F}$ -плоский.

Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (3) становится очевидной, если в лемме 2.1 (1) положить B FP -инъективным, $C = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ и $n = 1$.

ТЕОРЕМА 3.8. Для кольца R справедливы следующие утверждения:

- (1) коядро плоской предоболочки в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ – $\mathfrak{F}$ -плоский модуль;
- (2) конечно представимый $\mathfrak{F}$ -плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является коядром плоской предоболочки $Q \rightarrow P$ с проективным P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $f: K \rightarrow F$ – плоская предоболочка в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ такая, что $L = \text{soker}(f)$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{im}(f) \xrightarrow{i} F \rightarrow L \rightarrow 0.$$

Ясно, что $i: \text{im}(f) \rightarrow F$ – плоская предоболочка.

Для любого FP -инъективного функтора $G \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ функтор G^+ плоский в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ согласно следствию 2.2 (2). Таким образом, мы получаем точную последовательность

$$[F, G^+] \rightarrow [\text{im}(f), G^+] \rightarrow 0,$$

которая дает точность для

$$(F \otimes G)^+ \rightarrow (\text{im}(f) \otimes G)^+ \rightarrow 0.$$

Поэтому последовательность $0 \rightarrow \text{im}(f) \otimes G \rightarrow F \otimes G$ точна. Итак, из точности

$$0 \rightarrow \text{Tor}_1[L, G] \rightarrow \text{im}(f) \otimes G \rightarrow F \otimes G$$

следует, что $\text{Tor}_1[L, G] = 0$, т.е. L $\mathfrak{F}$ -плоский.

(2) Пусть F – конечно представимый $\mathfrak{F}$ -плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$, т.е. в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ существует точная последовательность $(\cdot, A) \rightarrow (\cdot, B) \rightarrow F \rightarrow 0$ с конечно представимыми правыми R -модулями A и B . Поэтому мы получаем две точные последовательности $(\cdot, A) \rightarrow K \rightarrow 0$ и $0 \rightarrow K \rightarrow (\cdot, B) \rightarrow F \rightarrow 0$.

Для любого плоского функтора G из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (\cdot, A) \otimes G^+ & \longrightarrow & K \otimes G^+ \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ [(\cdot, A), G]^+ & \xrightarrow{\gamma} & [K, G]^+ \end{array}$$

По лемме Йонеды имеем

$$(\cdot, A) \otimes G^+ \cong G^+(A) = G(A)^+ \cong [(\cdot, A), G]^+.$$

Заметим, что γ эпиморфно, и поэтому α эпиморфно.

Поскольку G^+ FP -инъективен согласно следствию 2.2 (1), $\text{Tor}_1[F, G^+] = 0$. Поэтому $\beta: K \otimes G^+ \rightarrow (\cdot, B) \otimes G^+$ взаимно однозначно. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} K \otimes G^+ & \xrightarrow{\beta} & (\cdot, B) \otimes G^+ \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \cong \\ [K, G]^+ & \xrightarrow{\theta} & [(\cdot, B), G]^+ \end{array}$$

Поскольку α – изоморфизм, θ взаимно однозначно. Таким образом, $[(\cdot, B), G] \rightarrow [K, G]$ эпиморфно. Итак, $K \rightarrow (\cdot, B)$ – плоская предоболочка.

СЛЕДСТВИЕ 3.9. *Любой $\mathfrak{F}$ -проективный функтор F из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является $\mathfrak{F}$ -плоским. Обратное справедливо, если F конечно представим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это немедленно следует из утверждения 3.6 (1) и теоремы 3.8.

4. Инъективные, проективные и плоские функторы. В этом пункте мы уделяем внимание связям между инъективными (соответственно, проективными, плоскими) и $\mathfrak{F}$ -инъективными (соответственно, $\mathfrak{F}$ -проективными, $\mathfrak{F}$ -плоскими) функторами.

Следствия: инъективный $\Rightarrow \mathfrak{F}$ -инъективный, проективный $\Rightarrow \mathfrak{F}$ -проективный, плоский $\Rightarrow \mathfrak{F}$ -плоский немедленно вытекают из определений; ниже мы описываем условия, при которых эти следствия обратимы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. *Для функтора F из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) F инъективен;
- (2) F $\mathfrak{F}$ -инъективен и FP -инъективен;
- (3) F $\mathfrak{F}$ -инъективен и является фактором FP -инъективного функтора из категории $(\text{mod-}R, \text{Ab})$;
- (4) $\text{Ext}^i[H, F] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ и $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) и (1) $\Rightarrow$ (4) тривиальны.

(3) $\Rightarrow$ (1) Имеется точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow \cdot \otimes N$ с инъективным $\cdot \otimes N$. Согласно (3) существует точная последовательность $\cdot \otimes M \rightarrow F \rightarrow 0$. Композиция $\cdot \otimes M \rightarrow F \rightarrow \cdot \otimes N$ задается формулой $\cdot \otimes f$ для некоторого $f: M \rightarrow N$. Положим $L = \text{coker}(f)$ и рассмотрим следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdot \otimes M & \xrightarrow{f} & \cdot \otimes N & \longrightarrow & \cdot \otimes L & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow & \nearrow & & & & \\
 & & F & & & & \\
 & \nearrow & \searrow & & & & \\
 0 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Поскольку F $\mathfrak{F}$ -инъективен, точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow \cdot \otimes N \rightarrow \cdot \otimes L \rightarrow 0$ расщепляется и поэтому F инъективен.

(4) $\Rightarrow$ (1) Для любого функтора A из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ найдется точная последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow \cdot \otimes M_0 \rightarrow \cdot \otimes M_1.$$

Предположим, что $\cdot \otimes M_0 \rightarrow \cdot \otimes M_1$ задается формулой $\cdot \otimes f$ для некоторого $f: M_0 \rightarrow M_1$. Тогда мы получим точную последовательность в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$

$$0 \rightarrow A \rightarrow \cdot \otimes M_0 \xrightarrow{\cdot \otimes f} \cdot \otimes M_1 \rightarrow \cdot \otimes \text{coker}(f) \rightarrow 0.$$

Следовательно, согласно (4) имеем

$$\text{Ext}^1[A, F] \cong \text{Ext}^3[\cdot \otimes \text{coker}(f), F] = 0.$$

Таким образом, F инъективен.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.2. Для функтора G из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G плоский;
- (2) G $\mathfrak{F}$ -плоский и вкладывается в плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$;
- (3) $\text{Tor}_i[G, H] = 0$ для любого FP -инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ и $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия $(1) \Rightarrow (2)$ и $(1) \Rightarrow (3)$ тривиальны.

$(2) \Rightarrow (1)$ Согласно (2), утверждению 3.7 и следствию 2.2(1) G^+ $\mathfrak{F}$ -инъективен и является фактором FP -инъективного функтора из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Поэтому G^+ инъективен согласно утверждению 4.1. Таким образом, G плоский по следствию 2.2(1).

$(3) \Rightarrow (1)$ Согласно лемме 2.1(1) для любого FP -инъективного функтора $H \in (\text{mod-}R, \text{Ab})$ и $i \geq 1$ имеем

$$\text{Ext}^i[H, G^+] \cong (\text{Tor}_i[G, H])^+ = 0.$$

Таким образом, G^+ инъективен согласно утверждению 4.1. Поэтому G плоский по следствию 2.2(1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.3. Для функтора G из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ следующие утверждения эквивалентны:

- (1) G проективен;
- (2) G $\mathfrak{F}$ -проективен и плоский;
- (3) G $\mathfrak{F}$ -проективен и вкладывается в плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$;
- (4) $\text{Ext}^i[G, T] = 0$ для любого плоского функтора $T \in ((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ и $i \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия $(1) \Rightarrow (2)$ и $(1) \Rightarrow (4)$ тривиальны.

$(2) \Rightarrow (1)$ Найдется точная последовательность $0 \rightarrow F \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 0$ с проективным P . Заметим, что F плоский, поскольку G плоский. Следовательно, $\text{Ext}^1[G, F] = 0$. Таким образом, вышеуказанная последовательность расщепляется, и поэтому G проективен.

Эквивалентность $(2) \Leftrightarrow (3)$ следует из утверждения 4.2 и следствия 3.9.

$(4) \Rightarrow (1)$ Согласно [9; с. 356] для любого функтора A из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ найдется точная последовательность в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$

$$0 \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$$

с плоскими F_i . Следовательно, $\text{Ext}^1[G, A] \cong \text{Ext}^3[G, F_2] = 0$ вследствие (4). Таким образом, G проективен.

5. Специальные классы колец. Как приложение вышеприведенных результатов мы даем новые описания некоторых специальных колец в терминах $\mathfrak{F}$ -инъективных, $\mathfrak{F}$ -проективных и $\mathfrak{F}$ -плоских функторов.

Согласно [4; утверждение 4.1] R – регулярное кольцо фон Неймана, если и только если любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является плоским. Таким образом, согласно следствию 2.2(1) и (2) R – регулярное кольцо фон Неймана, если и только если любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ FP -инъективен.

ТЕОРЕМА 5.1. Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:

- (1) R – регулярное кольцо фон Неймана;
- (2) любой $\mathfrak{F}$ -инъективный функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ является (FP) -инъективным;
- (3) любой $\mathfrak{F}$ -проективный функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является проективным;
- (4) любой $\mathfrak{F}$ -плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является плоским;
- (5) любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является $\mathfrak{F}$ -плоским;
- (6) в любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -плоскими B и C A тоже является $\mathfrak{F}$ -плоским;
- (7) в любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -проективными B и C A тоже является $\mathfrak{F}$ -проективным;
- (8) в любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -инъективными A и B C тоже является $\mathfrak{F}$ -инъективным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Поскольку любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ FP -инъективен согласно (1), любой $\mathfrak{F}$ -инъективный функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ инъективен по утверждению 4.1.

(2) $\Rightarrow$ (4) Пусть F – $\mathfrak{F}$ -плоский функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$. Тогда F^+ $\mathfrak{F}$ -инъективен по утверждению 3.7. Поэтому F^+ FP -инъективен вследствие (2). Таким образом, F является плоским согласно следствию 2.2(1).

(4) $\Rightarrow$ (3) Поскольку любой $\mathfrak{F}$ -проективный функтор F из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является $\mathfrak{F}$ -плоским по следствию 3.9, F плоский согласно (4). Таким образом, F проективен по утверждению 4.3.

(3) $\Rightarrow$ (1) Для любого функтора F из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ найдется точная последовательность $0 \rightarrow A \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0$ с плоским G . Пусть $f: A \rightarrow H$ – плоская оболочка, обладающая свойством единственности отображения. Тогда f – мономорфизм. Согласно утверждению 3.6(2) $\text{coker}(f)$ $\mathfrak{F}$ -проективно и поэтому проективно вследствие (3). Таким образом, A плоский. Согласно [9; утверждение 6], F вкладывается в плоский функтор. Поэтому F имеет взаимно однозначную плоскую оболочку $g: F \rightarrow L$, обладающую свойством единственности отображения. Поскольку $\text{coker}(g)$ $\mathfrak{F}$ -проективно и поэтому проективно, F плоский. Таким образом, R регулярное кольцо фон Неймана.

Следствия (1) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) тривиальны.

(6) $\Rightarrow$ (4) Для любого $\mathfrak{F}$ -плоского функтора F из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ найдется точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ с проективным P . Таким образом, K $\mathfrak{F}$ -плоский согласно (6). Для любого FP -инъективного функтора H из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ получаем точную последовательность

$$0 = \text{Tor}_2[P, H] \rightarrow \text{Tor}_2[F, H] \rightarrow \text{Tor}_1[K, H] = 0.$$

Поэтому $\text{Tor}_2[F, H] = 0$. По индукции $\text{Tor}_i[F, H] = 0$ для любого $i \geq 3$. Следовательно, F плоский по утверждению 4.2.

Следствия (2) $\Rightarrow$ (8) и (3) $\Rightarrow$ (7) очевидны.

(7) $\Rightarrow$ (3) Для любого $\mathfrak{F}$ -проективного функтора F из $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ найдется точная последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ с проективным P . Поэтому K $\mathfrak{F}$ -проективен согласно (7). Для любого плоского функтора T из $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ получаем точную последовательность

$$0 = \text{Ext}^1[K, T] \rightarrow \text{Ext}^2[F, T] \rightarrow \text{Ext}^2[P, T] = 0.$$

Следовательно, $\text{Ext}^2[F, T] = 0$. По индукции $\text{Ext}^i[F, T] = 0$ для любого $i \geq 3$. Таким образом, F проективен по утверждению 4.3.

(8) $\Rightarrow$ (6) Из любой точной последовательности $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ в категории $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -плоскими B и C мы получаем точную последовательность в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$

$$0 \rightarrow C^+ \rightarrow B^+ \rightarrow A^+ \rightarrow 0.$$

Поскольку C^+ и B^+ $\mathfrak{F}$ -инъективны по утверждению 3.7, A^+ $\mathfrak{F}$ -инъективен согласно (8). Поэтому A $\mathfrak{F}$ -плоский.

ТЕОРЕМА 5.2. *Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) R – наследственное слева регулярное кольцо фон Неймана;
- (2) любой фактор $\mathfrak{F}$ -инъективного функтора из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен;
- (3) любой подфунктор $\mathfrak{F}$ -проективного функтора из $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть $F \rightarrow G$ – эпиморфизм в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -инъективным F . Тогда согласно (1) $F \cong \cdot \otimes M$ и $G \cong \cdot \otimes N$ для некоторых левых R -модулей. Заметим, что F инъективен по теореме 5.1. Таким образом, M – чисто инъективный левый R -модуль, и поэтому он инъективен. Поскольку R наследственно слева и N – фактор M , N инъективен. Следовательно, G ($\mathfrak{F}$ -)инъективен.

(2) $\Rightarrow$ (1) R – регулярное кольцо фон Неймана согласно (2) и теореме 5.1.

Пусть $M \rightarrow N$ – эпиморфизм левых R -модулей с инъективным M . Тогда $\cdot \otimes M \rightarrow \cdot \otimes N$ – эпиморфизм в $(\text{mod-}R, \text{Ab})$. Следовательно, $\cdot \otimes N$ $\mathfrak{F}$ -инъективен согласно (2) и поэтому инъективен по теореме 5.1. Таким образом, N чисто инъективен и, следовательно, инъективен. Итак, R наследственно слева.

(1) $\Rightarrow$ (3) Пусть $A \rightarrow B$ – мономорфизм в $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$ с $\mathfrak{F}$ -проективным B . Поскольку R – регулярное кольцо фон Неймана, имеем $A \cong (\cdot, M)$ и $B \cong (\cdot, N)$ для некоторых левых R -модулей M и N . Заметим, что B проективен по теореме 5.1. Поэтому N чисто проективен. Но N также является плоским и, следовательно, проективным. Поскольку R наследственно слева и M вкладывается в N , M также проективен. Таким образом, A ($\mathfrak{F}$ -)проективен.

(3) $\Rightarrow$ (1) R – регулярное кольцо фон Неймана согласно (3) и теореме 5.1.

Пусть $M \rightarrow N$ – мономорфизм левых R -модулей с проективным N . Тогда отображение $(\cdot, M) \rightarrow (\cdot, N)$ – мономорфизм в $((R\text{-mod})^{\text{op}}, \text{Ab})$. Поскольку $(\cdot, N)$ проективен, $(\cdot, M)$ $\mathfrak{F}$ -проективен согласно (3) и поэтому проективен по теореме 5.1. Таким образом, M чисто проективен и, следовательно, проективен. Итак, R наследственно слева.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. *Для кольца R следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) R – артиново полупростое кольцо;
- (2) любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -инъективен;
- (3) любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -проективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствия $(1) \Rightarrow (2)$ и $(1) \Rightarrow (3)$ тривиальны.

$(2) \Rightarrow (1)$ По теореме 5.1 R – регулярное кольцо фон Неймана, и поэтому любой функтор из $(\text{mod-}R, \text{Ab})$ инъективен. Таким образом, R – артиново полупростое кольцо.

$(3) \Rightarrow (1)$ По теореме 5.1 R – регулярное кольцо фон Неймана, и, следовательно, любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ проективен. Поэтому R – артиново полупростое кольцо.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Хотя любой $\mathfrak{F}$ -проективный функтор F из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ является $\mathfrak{F}$ -плоским, обратное, вообще говоря, неверно. В самом деле, пусть R – регулярное кольцо фон Неймана, не являющееся артиновым полупростым. Тогда любой функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ – $\mathfrak{F}$ -плоский, но не всякий функтор из $((\text{mod-}R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ $\mathfrak{F}$ -проективен согласно следствию 5.3.

Автор хотел бы поблагодарить рецензента за очень полезные замечания и предложения.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Auslander, “Coherent Functors”, *Proceedings of the Conference on Categorical Algebra* (La Jolla, CA, 1965), Springer, New York, 1966, 189–231.
- [2] M. Auslander, *Representation Dimension of Artin Algebras*, Queen Mary Coll. Math. Notes, Queen Mary Coll., London, 1971.
- [3] M. Auslander, I. Reiten, “Stable equivalence of Artin algebras”, *Proceedings of the Conference on Orders, Group Rings and Related Topics* (Columbus, OH, 1972), Lecture Notes in Math., **353**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 8–71.
- [4] H. Brune, “On the global dimension of the functor category $((\text{mod } R)^{\text{op}}, \text{Ab})$ and a theorem of Kulikov”, *J. Pure Appl. Algebra*, **28**:1 (1983), 31–39.
- [5] W. Crawley-Boevey, “Modules of finite length over their endomorphism rings”, *Representations of Algebras and Related Topics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **168**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992, 127–184 pp.
- [6] W. Crawley-Boevey, “Locally finitely presented additive categories”, *Comm. Algebra*, **22**:5 (1994), 1641–1674.
- [7] L. Gruson, C. U. Jensen, “Dimensions cohomologique reliées aux foncteurs $\varinjlim^{(i)}$ ”, *Séminaire d’Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin* (Paris, 1980), Lecture Notes in Math., **867**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 234–294.
- [8] I. Herzog, “The phantom cover of a module”, *Adv. Math.*, **215**:1 (2007), 220–249.
- [9] I. Herzog, “Contravariant functors on the category of finitely presented modules”, *Israel J. Math.*, **167** (2008), 347–410.
- [10] M. Prest, *Model Theory and Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **130**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [11] M. Saorín, A. Del Valle, “Covers and envelopes in functor categories”, *Interactions Between Ring Theory and Representations of Algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **210**, Marcel Dekker, New York, 2000, 321–329 pp.
- [12] B. Stenström, *Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory*, Grundlehren Math. Wiss., **217**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

- [13] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative Homological Algebra*, de Gruyter Exp. Math., **30**, Walter de Gruyter, Berlin, 2000.
- [14] E. E. Enochs, “Injective and flat covers, envelopes and resolvents”, *Israel J. Math.*, **39**:3 (1981), 189–209.
- [15] E. E. Enochs, L. Oyonarte, *Covers, Envelopes and Cotorsion Theories*, Nova Sci. Publ., New York, 2002.
- [16] N. Ding, “On envelopes with the unique mapping property”, *Comm. Algebra*, **24** (1996), 1459–1470.
- [17] R. Göbel, J. Trlifaj, *Approximations and Endomorphism Algebras of Modules*, de Gruyter Exp. Math., **41**, Walter de Gruyter, Berlin, 2006.
- [18] J. J. Rotman, *An Introduction to Homological Algebra*, Pure Appl. Math., **85**, Academic Press, New York, 1979.

Лисинь Мао

Institute of Mathematics, Nanjing Institute of
Technology, Китай
E-mail: maolx2@hotmail.com

Поступило

09.06.2011

Исправленный вариант

03.11.2011