Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. М. Загороднюк, О плотности многочленов в некоторых пространствах $L^2(M)$, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 63–79

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10411>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 13:46:16

О плотности многочленов в некоторых пространствах $L^2(M)$

С. М. Загороднюк

В данной работе мы изучаем вопрос плотности многочленов в некоторых пространствах $L^2(M)$. Рассматриваются два варианта меры M и многочленов: 1) $(N \times N)$ матричнозначная неотрицательная борелевская мера на $\mathbb{R}$ и векторнозначные многочлены $p(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x))$, где $p_j(x)$ являются комплексными многочленами, $N \in \mathbb{N}$; 2) скалярная неотрицательная борелевская мера в полосе $\Pi = \{(x, \varphi) : x \in \mathbb{R}, \varphi \in [-\pi, \pi)\}$, и степенно-тригонометрические многочлены: $p(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m,n} x^m e^{in\varphi}$, $\alpha_{m,n} \in \mathbb{C}$, где лишь конечное число $\alpha_{m,n}$ отлично от нуля. Мы показываем, что многочлены плотны в $L^2(M)$ тогда и только тогда, когда M является каноническим решением соответствующей проблемы моментов. Подчеркнем, что при этом не предполагается дополнительных ограничений на меры, кроме существования моментов. Используя известные описания канонических решений, мы получаем условия плотности многочленов в $L^2(M)$. Попутно установлена модель для коммутирующих самосопряженных и унитарных операторов с конечнократным спектром.

Библиография: 17 названий.

DOI: 10.4213/mzm10411

1. Введение. В данной работе мы изучим вопрос плотности многочленов в некоторых пространствах $L^2(M)$. Два варианта меры M и многочленов будут рассмотрены:

(А) $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значная мера M на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ и векторнозначные многочлены

$$p(x) = (p_0(x), p_1(x), \dots, p_{N-1}(x)),$$

где $p_j(x)$ являются комплексными многочленами, $0 \leq j \leq N-1$, $N \in \mathbb{N}$;

(В) скалярная неотрицательная борелевская мера σ в полосе

$$\Pi = \{(x, \varphi) : x \in \mathbb{R}, \varphi \in [-\pi, \pi)\}$$

и степенно-тригонометрические многочлены

$$p(x, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_{m,n} x^m e^{in\varphi}, \quad \alpha_{m,n} \in \mathbb{C}, \quad (1.1)$$

где лишь конечное число коэффициентов $\alpha_{m,n}$ отлично от нуля.

Вопрос плотности (скалярных или векторных) многочленов в пространстве $L^2(\mathbb{C}, \mu)$ квадратично интегрируемых функций относительно скалярной неотрицательной борелевской меры μ в комплексной плоскости имеет обширную библиографию (см. обзор в [1; pp. 75–79, 84, 87–88], [2]–[5]). Относительно рациональных аппроксимаций аналитических функций следует сослаться на книгу [6]. Случай $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной меры на единичной окружности тесно связан с теорией многомерных случайных процессов и является классическим (см. вышеупомянутый обзор). Случай $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной меры на замкнутых жордановых кривых изучался в [7], [8], где были получены некоторые обобщения классических результатов. Не так давно была установлена связь между некоторыми L^2 пространствами скалярных комплексных функций на радиальных лучах в комплексной плоскости и $L^2(M)$ из (А) [9]. Эта связь, например, позволяет свести вопрос о плотности многочленов в $L^2(\mathbb{C}, \mu)$, где μ имеет носитель на радиальных лучах, к вопросу плотности векторных многочленов в $L^2(M)$. Последний вопрос будет проанализирован в настоящей работе.

Случай (А) тесно связан с матричной проблемой моментов Гамбургера, которая состоит в нахождении непрерывной слева неубывающей матричнозначной функции $M(x) = (m_{k,l}(x))_{k,l=0}^{N-1}$ на $\mathbb{R}$, $M(-\infty) = 0$, такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} x^n dM(x) = S_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.2)$$

где $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ является заданной последовательностью эрмитовых комплексных матриц размера $(N \times N)$, $N \in \mathbb{N}$. В скалярном случае ($N = 1$) хорошо известно, что многочлены плотны в $L^2(M)$ на вещественной оси в том и только том случае, когда M является каноническим решением соответствующей проблемы моментов [4]. В случае произвольного N и при условии, что матричная проблема моментов Гамбургера является вполне неопределенной, плотность многочленов эквивалентна тому, что M является каноническим решением проблемы моментов (1.2) (т.е. соответствует постоянной унитарной матрице в параметризации неванлинновского типа для решений (1.2)) [10].

С другой стороны, случай (В) связан с проблемой моментов Девинатца (или степенно-тригонометрической проблемой моментов): найти неотрицательную борелевскую меру μ в полосе Π такую, что

$$\int_{\Pi} x^m e^{in\varphi} d\mu = s_{m,n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.3)$$

где $\{s_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$ является заданной последовательностью комплексных чисел, см. [11].

В обоих случаях, мы покажем, что полиномы плотны в $L^2(M)$ тогда и только тогда, когда M является каноническим решением соответствующей проблемы моментов, не предполагая дополнительных условий (определения канонических решений будут приведены ниже). С этой целью мы получим модель для конечного набора коммутирующих самосопряженных и унитарных операторов со спектром конечной кратности (точные определения будут даны ниже). Последняя модель является обобщением канонической модели для самосопряженного оператора с конечнократным спектром [12]. Используя известные описания канонических решений, мы получим условия плотности многочленов в $L^2(M)$.

Как обычно, посредством $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ мы обозначаем множества вещественных чисел, комплексных чисел, натуральных чисел, целых чисел и целых неотрицательных чисел, соответственно; $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : (1/2i)(z - \bar{z}) \geq 0\}$. Через $\mathbb{C}_{n \times n}$ обозначаем множество всех матриц размера $(n \times n)$ с комплексными элементами; $\mathbb{C}_n := \mathbb{C}_{1 \times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Под $\mathbb{C}_{n \times n}^{\geq}$ мы понимаем множество всех неотрицательных эрмитовых матриц из $\mathbb{C}_{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$. Посредством $\mathbb{P}$ обозначается множество всех комплексных многочленов. Под $\mathbb{P}^N$ понимается множество векторнозначных многочленов: $p(z) = (p_0(z), p_1(z), \dots, p_{N-1}(z))$, $p_j \in \mathbb{P}$, $0 \leq j \leq N-1$; $N \in \mathbb{N}$. Для подмножества S комплексной плоскости через $\mathfrak{B}(S)$ обозначаем множество всех борелевских подмножеств множества S . Всюду в данной работе все гильбертовы пространства предполагаются сепарабельными. Посредством $(\cdot, \cdot)_H$ и $\|\cdot\|_H$ мы обозначаем скалярное произведение и норму в гильбертовом пространстве H , соответственно. Индексы могут опускаться в очевидных случаях. Для множества M из H под $\overline{M}$ мы понимаем замыкание M по норме $\|\cdot\|_H$. Для $\{x_k\}_{k \in S}$, $x_k \in H$, под $\text{Lin}\{x_k\}_{k \in S}$ подразумеваем множество линейных комбинаций векторов $\{x_k\}_{k \in S}$ и $\text{span}\{x_k\}_{k \in S} = \overline{\text{Lin}\{x_k\}_{k \in S}}$. Здесь S – любой набор индексов. Единичный оператор в H обозначается через $E = E_H$. Для произвольного линейного оператора A в H операторы A^* , $\overline{A}$, A^{-1} обозначают сопряженный оператор, его замыкание и его обратный (если они существуют). Под $D(A)$ и $R(A)$ понимается область определения и область значений оператора A . Мы обозначаем посредством $R_z(A)$ резольвенту оператора A , где z принадлежит резольвентному множеству A . Если A ограничен, то норма A обозначается через $\|A\|$. Если A симметричен, то мы обозначаем

$$\Delta_A(z) := (A - zE_H)D(A), \quad z \in \mathbb{C},$$

$$N_\lambda = N_\lambda(A) = H \ominus \Delta_A(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

Посредством $P_{H_1}^H = P_{H_1}$ обозначается оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_1 из H . Мы обозначаем

$$D_{r,l} = \mathbb{R}^r \times [-\pi, \pi)^l$$

$$= \{(x_1, x_2, \dots, x_r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l),$$

$$x_j \in \mathbb{R}, \varphi_k \in [-\pi, \pi), 1 \leq j \leq r, 1 \leq k \leq l\}, \quad r, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Элементы $u \in D_{r,l}$ кратко обозначаем так:

$$u = (x, \varphi), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_r), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l).$$

Здесь понимается, что $D_{r,0} = \mathbb{R}^r$, $D_{0,l} = [-\pi, \pi)^l$.

Пусть $M(\delta) = (m_{i,j}(\delta))_{i,j=0}^{N-1}$ является $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной мерой на $\mathfrak{B}(D_{r,l})$ и

$$\tau = \tau_M(\delta) := \sum_{k=0}^{N-1} m_{k,k}(\delta), \quad M'_\tau = (m'_{k,l})_{k,l=0}^{N-1} = \left(\frac{dm_{k,l}}{d\tau_M} \right)_{k,l=0}^{N-1}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Мы обозначаем посредством $L^2(M)$ множество (классов эквивалентности) векторнозначных функций $f: D_{r,l} \rightarrow \mathbb{C}_N$, $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$, таких, что (см., например, [13], [14])

$$\|f\|_{L^2(M)}^2 := \int_{D_{r,l}} f(u) \Psi(u) f^*(u) d\tau_M < \infty.$$

Множество $L^2(M)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f, g)_{L^2(M)} := \int_{D_{r,l}} f(u) \Psi(u) g^*(u) d\tau_M, \quad f, g \in L^2(M).$$

Положим

$$\begin{aligned} W_n f(x, \varphi) &= e^{i\varphi_n} f(x, \varphi), & f &\in L^2(M), & 1 \leq n \leq l, \\ X_m f(x, \varphi) &= x_m f(x, \varphi), \\ f(x, \varphi) &\in L^2(M) : x_m f(x, \varphi) \in L^2(M), & 1 \leq m \leq r. \end{aligned}$$

Операторы W_n являются унитарными. Стандартным образом [15] проверяется, что операторы X_m являются самосопряженными.

2. Множество коммутирующих самосопряженных и унитарных операторов со спектром конечной кратности. Хорошо известно, что самосопряженный оператор с конечнократным спектром в гильбертовом пространстве H имеет каноническую модель как оператор умножения на независимую переменную в $L^2(M)$. Здесь M является $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной мерой на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, а N – кратность спектра A [12]. Для нашего изучения плотности многочленов, упомянутого во введении, нам понадобится обобщение этого результата на случай произвольного конечного числа коммутирующих самосопряженных и унитарных операторов. Более того, нам будет нужен результат несколько более общий даже в классическом случае. Наш метод доказательства несколько отличается от классического (мы не используем лемму из [12; с. 287]).

Рассмотрим множество

$$\mathcal{A} = (S_1, S_2, \dots, S_r, U_1, U_2, \dots, U_l), \quad r, l \in \mathbb{Z}_+, \quad r + l \neq 0, \quad (2.1)$$

где S_j являются самосопряженными операторами, U_k – унитарные операторы в гильбертовом пространстве H , $1 \leq j \leq r$, $1 \leq k \leq l$. В случае $r = 0$ операторы S_j отсутствуют. Аналогично, при $l = 0$ имеются лишь операторы S_j . Множество $\mathcal{A}$ называется *SU-множеством порядка (r, l)* . Множество $\mathcal{A}$ называется *коммутирующим*, если операторы S_j, U_k попарно коммутируют. Это означает, что

$$U_k U_m = U_m U_k, \quad 1 \leq k, m \leq l, \quad (2.2)$$

$$U_k S_j \subset S_j U_k, \quad 1 \leq j \leq r, \quad 1 \leq k \leq l, \quad (2.3)$$

и спектральные меры операторов S_j попарно коммутируют [15]. В таком случае существует спектральная мера $E(\delta)$, $\delta \in \mathfrak{B}(D_{r,l})$, такая, что [15]

$$S_j = \int_{D_{r,l}} x_j dE, \quad 1 \leq j \leq r, \quad (2.4)$$

$$U_k = \int_{D_{r,l}} e^{i\varphi_k} dE, \quad 1 \leq k \leq l. \quad (2.5)$$

Мы будем называть E *спектральной мерой коммутирующего SU-множества $\mathcal{A}$ порядка (r, l)* . Будем говорить, что коммутирующее SU-множество $\mathcal{A}$ порядка (r, l) имеет спектр кратности d , если

1) существуют вектора $h_0, h_1, \dots, h_{d-1}$ в H такие, что

$$h_i \in D(S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}}), \quad m_1, m_2, \dots, m_{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq i \leq d-1, \quad (2.6)$$

$$\text{span}\{U_1^{n_1} U_2^{n_2} \dots U_1^{n_1} S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}} h_i, \\ m_1, m_2, \dots, m_{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}_+, n_1, n_2, \dots, n_1 \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq d-1\} = H; \quad (2.7)$$

2) (*минимальность*) Для произвольного $\tilde{d} \in \mathbb{Z}_+ : \tilde{d} < d$, и произвольных $\tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_{d-1}$ в H по крайней мере одно из условий (2.6), (2.7) с $\tilde{d}$ вместо d и $\tilde{h}_i$ вместо h_i , не выполнено.

В случае $\mathbf{r} = 0$, условие (2.6) не нужно. Условие (2.7) в случаях $\mathbf{r} = 0, \mathbf{l} = 0$, не имеет U_k либо S_j , соответственно.

Положим

$$\vec{e}_i = (\delta_{0,i}, \delta_{1,i}, \dots, \delta_{N-1,i}), \quad 0 \leq i \leq N-1.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{A}$ является некоторым коммутирующим SU -множеством порядка $(\mathbf{r}, \mathbf{l})$ в гильбертовом пространстве H , имеющим спектр кратности d . Пусть $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$, $N \geq d$, являются элементами H такими, что

$$x_i \in D(S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}}), \quad m_1, m_2, \dots, m_{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq i \leq N-1, \quad (2.8)$$

$$\text{span}\{U_1^{n_1} U_2^{n_2} \dots U_1^{n_1} S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}} x_i, \\ m_1, m_2, \dots, m_{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}_+, n_1, n_2, \dots, n_1 \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq N-1\} = H. \quad (2.9)$$

Положим

$$M(\delta) = ((E(\delta)x_i, x_j)_H)_{i,j=0}^{N-1}, \quad \delta \in \mathfrak{B}(D_{\mathbf{r}, \mathbf{l}}), \quad (2.10)$$

где E является спектральной мерой $\mathcal{A}$. Тогда существует унитарное отображение V , которое отображает $L^2(M)$ на H , такое, что

$$V^{-1} S_j V = X_j, \quad 1 \leq j \leq \mathbf{r}, \quad (2.11)$$

$$V^{-1} U_k V = W_k, \quad 1 \leq k \leq \mathbf{l}. \quad (2.12)$$

Кроме того, выполнено следующее соотношение:

$$V \vec{e}_s = x_s, \quad 0 \leq s \leq N-1. \quad (2.13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $\mathbf{r} = 0$ соотношения (2.8), (2.11) следует убрать, и в (2.9) операторы S_j исчезают. В случае $\mathbf{l} = 0$ соотношение (2.12) нужно удалить, и в (2.9) операторы U_k исчезают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\chi_\delta(u)$ – характеристическая функция некоторого множества $\delta \in \mathfrak{B}(D_{\mathbf{r}, \mathbf{l}})$. В пространстве $L^2(M)$ рассмотрим следующее множество:

$$L := \text{Lin}\{\chi_\delta(u) \vec{e}_s, \delta \in \mathfrak{B}(D_{\mathbf{r}, \mathbf{l}}), 0 \leq s \leq N-1\}. \quad (2.14)$$

Выберем произвольные две функции

$$f(u) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \alpha_j(\delta) \chi_\delta(u) \vec{e}_j, \quad \alpha_j(\delta) \in \mathbb{C}, \quad (2.15)$$

$$g(u) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\delta' \in J_s} \beta_s(\delta') \chi_{\delta'}(u) \vec{e}_s, \quad \beta_s(\delta') \in \mathbb{C}, \quad (2.16)$$

где I_j , J_s являются некоторыми конечными подмножествами $\mathfrak{B}(D_{\mathbf{r},1})$. Мы можем записать

$$\begin{aligned} (f(u), g(u))_{L^2(M)} &= \sum_{j,s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \sum_{\delta' \in J_s} \alpha_j(\delta) \overline{\beta_s(\delta')} \int_{D_{\mathbf{r},1}} \chi_{\delta \cap \delta'}(u) \vec{e}_j M'_\tau(u) \vec{e}_s^* d\tau_M \\ &= \sum_{j,s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \sum_{\delta' \in J_s} \alpha_j(\delta) \overline{\beta_s(\delta')} m_{j,s}(\delta \cap \delta'). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Полагаем

$$x_f = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \alpha_j(\delta) E(\delta) x_j, \quad x_g = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\delta' \in J_s} \beta_s(\delta') E(\delta') x_s. \quad (2.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (x_f, x_g)_H &= \sum_{j,s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \sum_{\delta' \in J_s} \alpha_j(\delta) \overline{\beta_s(\delta')} (E(\delta) x_r, E(\delta') x_s)_H \\ &= \sum_{j,s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j} \sum_{\delta' \in J_s} \alpha_j(\delta) \overline{\beta_s(\delta')} m_{j,s}(\delta \cap \delta'). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Сравнивая соотношения (2.17) и (2.19) получаем

$$(f, g)_{L^2(M)} = (x_f, x_g)_H. \quad (2.20)$$

Теперь предположим, что f и g принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности в $L^2(M)$: $\|f - g\|_{L^2(M)} = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x_f - x_g\|_H^2 &= \left\| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{\delta \in I_j} \alpha_j(\delta) E(\delta) - \sum_{\delta \in J_j} \beta_j(\delta) E(\delta) \right) x_j \right\|_H^2 \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j \cup J_j} c_j(\delta) E(\delta) x_j \right\|_H^2, \end{aligned}$$

где

$$c_j(\delta) = \begin{cases} \alpha_j(\delta), & \delta \in I_j \setminus J_j, \\ -\beta_j(\delta), & \delta \in J_j \setminus I_j, \\ \alpha_j(\delta) - \beta_j(\delta), & \delta \in I_j \cap J_j. \end{cases} \quad (2.21)$$

Положим

$$w(u) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_j \cup J_j} c_j(\delta) \chi_\delta(u) \vec{e}_j. \quad (2.22)$$

Применяя соотношение (2.20) с $f = g = w$, получаем

$$\begin{aligned} \|x_f - x_g\|_H^2 &= \|x_w\|_H^2 = \|w\|_{L^2(M)}^2 \\ &= \left\| \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{\delta \in I_j} \alpha_j(\delta) \chi_\delta(u) - \sum_{\delta \in J_j} \beta_j(\delta) \chi_\delta(u) \right) \vec{e}_j \right\|_{L^2(M)}^2 = \|f - g\|_{L^2(M)}^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, отображение $V: Vf = x_f$, корректно определено на L , и $R(V) \subseteq H$. Кроме того, соотношение (2.20) показывает, что V является изометрическим отображением. Поскольку простые функции плотны в $L^2(M)$ [13; теорема 3.11], то $\bar{L} = L^2(M)$. По непрерывности продолжаем V на все $L^2(M)$. Предположим, что $R(V) \neq H$. Тогда существует $0 \neq h \in H$ такой, что

$$(E(\delta)x_s, h)_H = 0, \quad \delta \in \mathfrak{B}(D_{\mathbf{r},1}), \quad 0 \leq s \leq N-1.$$

Значит мы можем записать

$$\begin{aligned} & (U_1^{n_1} U_2^{n_2} \dots U_1^{n_1} S_1^{m_1} S_2^{m_2} \dots S_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}} x_s, h)_H \\ &= \int_{D_{\mathbf{r},1}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{\mathbf{r}}^{m_{\mathbf{r}}} e^{in_1 \varphi_1} e^{in_2 \varphi_2} \dots e^{in_1 \varphi_1} d(Ex_s, h)_H = 0, \\ & m_1, m_2, \dots, m_{\mathbf{r}} \in \mathbb{Z}_+, \quad n_1, n_2, \dots, n_1 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Используя (2.9), получаем $h = 0$. Это противоречие показывает, что $R(V) = H$. Таким образом, V является унитарным отображением пространства $L^2(M)$ на H . Заметим, что выполнено соотношение (2.13). Полагаем

$$\begin{aligned} L_i^2(M) = \left\{ f(u) = (f_0(u), f_1(u), \dots, f_{N-1}(u)) \in L^2(M) : \right. \\ \left. \int_{D_{\mathbf{r},1}} |f_s(u)|^2 dm_{s,s} < \infty, \quad 0 \leq s \leq N-1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь, как обычно, мы подразумеваем, что $L_i^2(M)$ состоит из классов эквивалентности из $L^2(M)$, которые имеют по крайней мере одного представителя f с квадратично интегрируемыми компонентами. Заметим, что простые функции принадлежат $L_i^2(M)$ и значит $L_i^2(M)$ является плотным в $L^2(M)$. Проверим, что

$$Vf = \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} f_s(u) dEx_s, \quad f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in L_i^2(M). \quad (2.24)$$

Выберем произвольную функцию $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in L_i^2(M)$. Пусть

$$f_s^k(u) = \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) \chi_{\delta}(u), \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

где $I_{s,k}$ – конечное подмножество $\mathfrak{B}(D_{\mathbf{r},1})$, $\alpha_{s,k}(\delta)$ являются простыми функциями такими, что

$$\int_{D_{\mathbf{r},1}} |f_s(u) - f_s^k(u)|^2 dm_{s,s} \leq \frac{1}{k^2}, \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.26)$$

Тогда

$$\left\| f(u) - \sum_{s=0}^{N-1} f_s^k(u) \vec{e}_s \right\|_{L^2(M)} \leq \frac{N}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.27)$$

Положим

$$f^k(u) = \sum_{s=0}^{N-1} f_s^k(u) \vec{e}_s = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) \chi_{\delta}(u) \vec{e}_s, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\|f - f^k\|_{L^2(M)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Значит

$$\|Vf - Vf^k\|_H \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

Заметим, что

$$Vf^k(u) = \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) E(\delta) x_s, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.30)$$

Мы можем записать

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} f_s(u) dEx_s - \sum_{s=0}^{N-1} \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) E(\delta) x_s \right\|_H \\ &= \left\| \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} \left(f_s(u) - \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) \chi_\delta(u) \right) dEx_s \right\|_H \\ &\leq \sum_{s=0}^{N-1} \left\| \int_{D_{\mathbf{r},1}} \left(f_s(u) - \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) \chi_\delta(u) \right) dEx_s \right\|_H \\ &= \sum_{s=0}^{N-1} \left\{ \int_{D_{\mathbf{r},1}} \left| f_s(u) - \sum_{\delta \in I_{s,k}} \alpha_{s,k}(\delta) \chi_\delta(u) \right|^2 d(Ex_s, x_s)_H \right\}^{1/2} \leq \frac{N}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Пользуясь единственностью предела, заключаем, что соотношение (2.24) выполнено.

В случае $\mathbf{r} = 0$ нижеследующие рассуждения до соотношений (2.35), (2.36) излишни и в последних соотношениях можно выбирать $f \in L_i^2(M)$.

Положим

$$\begin{aligned} L_{i;2}^2(M) = & \left\{ f(x, \varphi) = (f_0(x, \varphi), f_1(x, \varphi), \dots, f_{N-1}(x, \varphi)) \in L^2(M) : \right. \\ & \int_{D_{\mathbf{r},1}} |f_s(x, \varphi)|^2 dm_{s,s} < \infty, \int_{D_{\mathbf{r},1}} |x_k f_s(x, \varphi)|^2 dm_{s,s} < \infty, \\ & \left. 1 \leq k \leq \mathbf{r}, 0 \leq s \leq N-1 \right\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Конечно, $L_{i;2}^2(M) \subseteq L_i^2(M)$ и $L_{i;2}^2(M) \subseteq D(X_k)$, $1 \leq k \leq \mathbf{r}$. Кроме того, выполнено

$$X_m L_{i;2}^2(M) \subseteq L_i^2(M), \quad 1 \leq m \leq \mathbf{r}. \quad (2.32)$$

Заметим, что функции

$$\chi_{\delta \cap \delta_k}(x, \varphi) \vec{e}_s, \quad \delta \in \mathfrak{B}(D_{\mathbf{r},1}), \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad (2.33)$$

$$\delta_k = \{(x, \varphi) \in D_{\mathbf{r},1} : |x_m| \leq k, 1 \leq m \leq \mathbf{r}\}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.34)$$

принадлежат $L_{i;2}^2(M)$. Значит, $L_{i;2}^2(M)$ плотно в $L^2(M)$.

Выберем произвольную функцию $f \in L_{i;2}^2(M)$. Используя соотношение (2.24), можем записать

$$Vf = \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} f_s(x, \varphi) dEx_s, \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned}
VX_m f &= \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} x_m f_s(x, \varphi) dEx_s = \sum_{s=0}^{N-1} S_m \int_{D_{\mathbf{r},1}} f_s(x, \varphi) dEx_s = S_m V f, \\
VW_n f &= \sum_{s=0}^{N-1} \int_{D_{\mathbf{r},1}} e^{i\varphi_n} f_s(x, \varphi) dEx_s = \sum_{s=0}^{N-1} U_n \int_{D_{\mathbf{r},1}} f_s(x, \varphi) dEx_s = U_n V f, \quad (2.36)
\end{aligned}$$

где $1 \leq m \leq \mathbf{r}$, $1 \leq n \leq \mathbf{l}$. По непрерывности из последнего соотношения получаем, что соотношение (2.12) выполнено. В случае $\mathbf{r} = 0$ этим завершается доказательство. В противном случае мы можем записать

$$X_m f = V^{-1} S_m V f, \quad f \in L_{i,2}^2(M), \quad 1 \leq m \leq \mathbf{r}. \quad (2.37)$$

Проверим, что

$$L_{i,2}^2(M) \subseteq (X_m \pm iE_{L^2(M)})L_{i,2}^2(M). \quad (2.38)$$

Выберем произвольную функцию $f = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}) \in L_{i,2}^2(M)$. Заметим, что

$$g_{\pm}(x, \varphi) := \frac{1}{x_m \pm i} (f_0(x, \varphi), f_1(x, \varphi), \dots, f_{N-1}(x, \varphi)) \in L_{i,2}^2(M). \quad (2.39)$$

Значит, $(X_m \pm iE_{L^2(M)})g_{\pm}(x, \varphi) = f$. Таким образом, соотношение (2.38) выполнено. Это соотношение означает, что операторы X_m и $V^{-1}S_m V$, суженные на $L_{i,2}^2(M)$, являются в существенном самосопряженными. Следовательно, они имеют единственное самосопряженное расширение. Поскольку операторы X_m и $V^{-1}S_m V$ являются самосопряженными расширениями, мы заключаем, что соотношение (2.11) выполнено.

3. Плотность многочленов: случай (A). Пусть $M = (m_{k,l})_{k,l=0}^{N-1}$ является $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной мерой на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, такой, что

$$\int_{\mathbb{R}} x^n dm_{k,l} \quad \text{существуют,} \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad 0 \leq k, l \leq N-1. \quad (3.1)$$

В этом пункте будем использовать одинаковые обозначения для матричнозначных мер $M(\delta)$ на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ и их функций распределения $M(x)$, $x \in \mathbb{R}$ [14]. Полагаем

$$S_n := \int_{\mathbb{R}} x^n dM, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.2)$$

и рассмотрим матричную проблему моментов Гамбургера с моментами $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$. Положим

$$\Gamma_n = (S_{k+l})_{k,l=0}^n, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad \Gamma = (S_{k+l})_{k,l=0}^{\infty} = (\Gamma_{n,m})_{n,m=0}^{\infty}, \quad \Gamma_{n,m} \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

Поскольку данная проблема моментов имеет решение, то

$$\Gamma_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Существует гильбертово пространство H и последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ в H такие, что $\text{span}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = H$ и [16]

$$(x_n, x_m)_H = \Gamma_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.4)$$

Пусть A – линейный оператор с $D(A) = \text{Lin}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, определяемый равенствами

$$Ax_k = x_{k+N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

В [16] было показано, что A корректно заданный симметрический оператор в H . Обозначим посредством $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\bar{A})$ множество всех аналитических в $\mathbb{C}_+$ операторнозначных функций $F(\lambda)$, значениями которых являются линейные сжатия, отображающие $N_i(\bar{A})$ в $N_{-i}(\bar{A})$ ($\|F(\lambda)\| \leq 1$). В [16; Theorem 4] было доказано, что все решения проблемы моментов имеют следующий вид:

$$\mathbf{M}(x) = (\mathbf{m}_{k,j}(x))_{k,j=0}^{N-1}, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{m}_{k,j}$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - \lambda} d\mathbf{m}_{k,j}(x) = ((A_{F(\lambda)} - \lambda E_H)^{-1} x_k, x_j)_H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.6)$$

где $A_{F(\lambda)}$ является квазисамосопряженным расширением $\bar{A}$, определяемым посредством $F(\lambda) \in \mathbf{F}(\bar{A})$.

С другой стороны, произвольной операторнозначной функции $F(\lambda) \in \mathbf{F}(\bar{A})$ отвечает согласно соотношения (3.6) некоторое решение матричной проблемы моментов Гамбургера. Соответствие между всеми операторнозначными функциями $F(\lambda) \in \mathbf{F}(\bar{A})$ и всеми решениями проблемы моментов, устанавливаемое соотношением (3.6), взаимно однозначно.

Соотношение (3.6) может быть записано в следующем виде:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - \lambda} d\mathbf{m}_{k,j}(x) = (\mathbf{R}_\lambda(\bar{A}) x_k, x_j)_H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.7)$$

где $\mathbf{R}_\lambda(\bar{A})$ является обобщенной резольвентой оператора $\bar{A}$. Соответствие между всеми обобщенными резольвентами и всеми решениями проблемы моментов взаимно однозначно.

Из соотношения (3.7) следует, что [16; Theorem 2]

$$\mathbf{M}(t) = (\mathbf{m}_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}, \quad \mathbf{m}_{k,j}(t) = (\mathbf{E}_t x_k, x_j)_H, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

где $\mathbf{E}_t$ является спектральной функцией $\bar{A}$. Последнее означает, что $\mathbf{E}_t = P_{\hat{H}}^{\hat{H}} \hat{E}_t$, где $\hat{E}_t$ является ортогональным разложением единицы самосопряженного оператора $\hat{A} \supseteq A$ в гильбертовом пространстве $\hat{H} \supseteq H$. Соответствие между всеми непрерывными слева спектральными функциями и всеми решениями проблемы моментов также взаимно однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Решение $\mathbf{M}(t) = (\mathbf{m}_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}$ матричной проблемы моментов Гамбургера (1.2) называется *каноническим*, если согласно соотношения (3.8) оно соответствует ортогональной спектральной функции оператора $\bar{A}$, т.е. спектральной функции, порожденной самосопряженным расширением $\hat{A} \supseteq \bar{A}$ в H .

Из этого определения видно, что *каноническое решение существует в том и только том случае, когда дефектные числа оператора A равны*. Заметим, что $\mathbf{M}(t) = (\mathbf{m}_{k,j}(t))_{k,j=0}^{N-1}$ является каноническим решением матричной проблемы моментов Гамбургера (1.2) тогда и только тогда, когда оно отвечает ортогональной

резольвенте оператора $\bar{A}$, т.е. обычной резольвенте некоторого самосопряженного расширения $\hat{A} \supseteq \bar{A}$ в H , в соотношении (3.7). Предположим теперь, что дефектные числа оператора A равны. Из формулы Штрауса для обобщенных резольвент [17; теорема 7] легко следует, что ортогональным резольвентам $\bar{A}$ отвечают $F(\lambda) \equiv C$, C – унитарный оператор, отображающий $N_i(\bar{A})$ на $N_{-i}(\bar{A})$. Следовательно, каноническим решениям проблемы моментов отвечают в соотношении (3.6) функции $F(\lambda) \equiv C$, где C – унитарный оператор, отображающий $N_i(\bar{A})$ на $N_{-i}(\bar{A})$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M = (m_{k,l})_{k,l=0}^{N-1}$ является $\mathbb{C}_{N \times N}^{\geq}$ -значной мерой на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, $N \in \mathbb{N}$, такой, что выполняется соотношение (3.1). Пусть $L_0^2(M)$ – замыкание в $L^2(M)$ множества всех векторнозначных многочленов $p \in \mathbb{P}^N$. Рассмотрим матричную проблему моментов Гамбургера с моментами $\{S_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, определенную посредством (3.2). Рассмотрим гильбертово пространство H и последовательность $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ в H такие, что $\text{span}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+} = H$, и выполнено соотношение (3.4). Через A обозначим линейный оператор с $D(A) = \text{Lin}\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+}$, определяемый равенствами

$$Ax_k = x_{k+N}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Следующие условия являются эквивалентными:

- (i) $L_0^2(M) = L^2(M)$;
- (ii) M является каноническим решением соответствующей матричной проблемы моментов Гамбургера;
- (iii) $M(x) = (m_{k,j}(x))_{k,j=0}^{N-1}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - \lambda} dm_{k,j}(x) = ((A_U - \lambda E_H)^{-1} x_k, x_j)_H, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.9)$$

где A_U – квазисамосопряженное расширение оператора $\bar{A}$, определяемое унитарным оператором U , отображающим $N_i(\bar{A})$ на $N_{-i}(\bar{A})$. Последнее эквивалентно тому, что A_U является самосопряженным расширением оператора A в H .

- (iv) для каждого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует линейный ограниченный оператор D_λ в H такой, что

$$(D_\lambda x_{Nk+r}, x_{Nl+s})_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{k+l}}{x - \lambda} dm_{r,s}, \quad 0 \leq r, s \leq N-1, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+, \quad (3.10)$$

который является обратимым и

$$D_\lambda^{-1} + \lambda E_H \equiv A_U, \quad (3.11)$$

где A_U – самосопряженное расширение A в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Повторяя рассуждения из [16; с. 276–278] построим самосопряженное расширение $\hat{A}$ оператора A , которое действует в пространстве $H \oplus (L^2(M) \ominus L_0^2(M)) = H$, и

$$m_{k,j}(t) = (\hat{E}_t x_k, x_j)_H, \quad (3.12)$$

где $\hat{E}_t$ является непрерывным слева разложением единицы оператора $\hat{A}$. Таким образом, M является каноническим решением проблемы моментов.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $M = (m_{k,j})_{k,j=0}^{N-1}$ имеет вид (3.12), где $\widehat{E}_t$ – непрерывное слева разложение единицы самосопряженного оператора $\widehat{A} \supseteq A$ в H . Поскольку $\widehat{A}x_n = Ax_n = x_{n+N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, применяя индукцию, получаем

$$\widehat{A}^r x_s = x_{rN+s}, \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.13)$$

Значит,

$$\text{span}\{A^r x_s, 0 \leq s \leq N-1; r \in \mathbb{Z}_+\} = H. \quad (3.14)$$

Следовательно, оператор $\widehat{A}$ имеет спектр кратности $d \leq N$. Согласно теореме 1 существует унитарное отображение W , которое отображает $L^2(M)$ на H такое, что

$$W^{-1}\widehat{A}W = X, \quad (3.15)$$

$$W\vec{e}_s = x_s, \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad (3.16)$$

где X – оператор умножения на независимую переменную в $L^2(M)$. Проверим, что

$$Wx^k\vec{e}_s = x_{kN+s}, \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.17)$$

Зафиксируем произвольное s : $0 \leq s \leq N-1$. Применим индукцию. При $k=0$ соотношение (3.17) выполнено. Предположим, что оно выполнено для $k=r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$Wx^{r+1}\vec{e}_s = WXW^{-1}Wx^r\vec{e}_s = \widetilde{A}x_{rN+s} = x_{(r+1)N+s}.$$

Значит соотношение (3.17) выполнено. Повторяя рассуждения в [16; с. 276–277], строим унитарное отображение V , которое отображает $L_0^2(M)$ на H , и такое, что

$$Vx^k\vec{e}_s = x_{kN+s}, \quad 0 \leq s \leq N-1, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.18)$$

Из (3.17), (3.18) заключаем, что $Wf = Vf$, $f \in L_0^2(M)$. Значит, $WL_0^2(M) = H$, и $L_0^2(M) = W^{-1}H = L^2(M)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Это было установлено перед формулировкой теоремы.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть $M = (m_{k,j})_{k,j=0}^{N-1}$ имеет вид (3.12), где $\widehat{E}_t$ – непрерывное слева разложение единицы самосопряженного оператора $\widehat{A} \supseteq A$ в H . Тогда

$$\begin{aligned} & (R_\lambda(\widehat{A})x_{Nk+r}, x_{Nl+s})_H \\ &= (R_\lambda(\widehat{A})\widehat{A}^k x_r, \widehat{A}^l x_s)_H = (\widehat{A}^{k+l} R_\lambda(\widehat{A})x_r, x_s)_H = \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{k+l}}{t-\lambda} d(\widehat{E}x_r, x_s)_H \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{t^{k+l}}{t-\lambda} dm_{r,s}, \quad 0 \leq r, s \leq N-1, \quad k, l \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Значит, для $D_\lambda := R_\lambda(\widehat{A})$ выполнено условие (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $E_{U,t}$ – непрерывное слева ортогональное разложение единицы оператора A_U . Заметим, что D_λ является резольвентой самосопряженного оператора $A_U \supseteq A$ в H . Используя (3.10), можем записать

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-\lambda} d(E_{U,t}x_r, x_s)_H &= (R_\lambda(A_U)x_r, x_s)_H = (D_\lambda x_r, x_s)_H \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x-\lambda} dm_{r,s}, \quad 0 \leq r, s \leq N-1. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Значит, $M = ((E_{U,t}x_r, x_s)_H)_{r,s=0}^{N-1}$. Таким образом, M является каноническим решением проблемы моментов.

4. Плотность многочленов: случай (В). Пусть σ – неотрицательная мера на $\mathfrak{B}(\Pi)$ такая, что

$$\int_{\Pi} x^m d\sigma < \infty, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.1)$$

Положим

$$s_{m,n} := \int_{\Pi} x^m e^{in\varphi} d\sigma, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (4.2)$$

и рассмотрим проблему моментов Девинатца с моментами $\{s_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$. Поскольку эта проблема моментов имеет решение, то для произвольных комплексных чисел $\alpha_{m,n}$ (где лишь конечное число из них отличны от нуля) выполнено [11]

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} \sum_{n,l=-\infty}^{\infty} \alpha_{m,n} \overline{\alpha_{k,l}} s_{m+k,n-l} \geq 0. \quad (4.3)$$

Существует гильбертово пространство H и последовательность $\{x_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$ в H такие, что $\text{span}\{x_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}} = H$ и [11]

$$(x_{m,n}, x_{k,l})_H = s_{m+k,n-l}, \quad m, k \in \mathbb{Z}_+, \quad n, l \in \mathbb{Z}. \quad (4.4)$$

Пусть A_0, B_0 – линейные операторы, и J_0 – антилинейный оператор с $D(A_0) = D(B_0) = D(J_0) = \text{Lin}\{x_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$, определяемые равенствами

$$A_0 x_{m,n} = x_{m+1,n}, \quad B_0 x_{m,n} = x_{m,n+1}, \quad J_0 x_{m,n} = x_{m,-n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

В [11] было показано, что эти операторы корректно заданы, A_0 является симметрическим, а B_0 изометричен. Операторы $A = \overline{A_0}$ и $B = \overline{B_0}$ являются коммутирующими замкнутыми симметрическим и унитарным операторами соответственно. Оператор J_0 продолжается по непрерывности до оператора сопряжения J в H .

В [11] было показано, что произвольное решение μ проблемы моментов Девинатца имеет следующий вид:

$$\mu(\delta) = ((\mathbf{E} \times F)(\delta)x_{0,0}, x_{0,0})_H, \quad \delta \in \mathfrak{B}(\Pi), \quad (4.5)$$

где F – спектральная мера B , $\mathbf{E}$ – некоторая спектральная мера A , коммутирующая с F . Под $((\mathbf{E} \times F)(\delta)x_{0,0}, x_{0,0})_H$ мы понимаем неотрицательную борелевскую меру на Π , которая получена с помощью лебегова продолжения из следующей неотрицательной меры на прямоугольниках:

$$((\mathbf{E} \times F)(I_x \times I_\varphi)x_{0,0}, x_{0,0})_H := (\mathbf{E}(I_x)F(I_\varphi)x_{0,0}, x_{0,0})_H, \quad (4.6)$$

где $I_x \subset \mathbb{R}$, $I_\varphi \subseteq [-\pi, \pi)$ – произвольные интервалы.

С другой стороны, произвольной спектральной мере $\mathbf{E}$ оператора A , которая коммутирует со спектральной мерой F оператора B , согласно соотношения (4.5) отвечает некоторое решение проблемы моментов Девинатца. Соответствие между спектральными мерами оператора A , которые коммутируют со спектральной мерой оператора B , и решениями проблемы моментов Девинатца взаимно однозначно.

Напомним следующее определение [11].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Решение μ проблемы моментов Девинатца (1.3) называется *каноническим*, если оно порождается соотношением (4.5), где $\mathbf{E}$ является некоторой ортогональной спектральной мерой оператора A , коммутирующей со спектральной мерой оператора B . Ортогональные спектральные меры являются спектральными мерами самосопряженных расширений оператора A в H .

Также нам понадобятся некоторые объекты, введенные в [11], для формулировки описания канонических решений. Положим $V_A := (A + iE_H)(A - iE_H)^{-1}$ и

$$H_1 := \Delta_A(i), \quad H_2 := H \ominus H_1, \quad H_3 := \Delta_A(-i), \quad H_4 := H \ominus H_3. \quad (4.7)$$

Сужение B_{H_2} оператора B на H_2 является унитарным, и потому согласно теореме Годича–Луценко оно имеет представление: $B_{H_2} = KL$, где K и L являются некоторыми операторами сопряжения в H_2 . Положим $U_{2,4} := JK$. Пусть $F_2 = F_2(\delta)$, $\delta \in \mathfrak{B}([-\pi, \pi])$, – спектральная мера оператора B_{H_2} в H_2 , μ – скалярная неотрицательная мера с типом, который совпадает со спектральным типом меры F_2 , N_2 – функция кратности меры F_2 . Тогда существует унитарное отображение W пространства H_2 на прямой интеграл $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mu, N_2}$ такое, что

$$WB_{H_2}W^{-1} = Q_{e^{iy}}, \quad (4.8)$$

где $Q_{e^{iy}} : g(y) \mapsto e^{iy}g(y)$. Обозначим через $\mathbf{D}(B; H_2)$ множество всех унитарных разложимых операторов в $\mathcal{H}$.

В соотношении (4.5) канонические решения отвечают тем спектральным мерам $\mathbf{E}$, которые являются спектральными мерами самосопряженных операторов $\hat{A}$ следующего вида:

$$\hat{A} = iE_H + 2(V_A \oplus U_{2,4}W^{-1}V_2W - E_H)^{-1}, \quad (4.9)$$

где $V_2 \in \mathbf{D}(B; H_2)$. Соответствие между всеми операторами $V_2 \in \mathbf{D}(B; H_2)$ и всеми каноническими решениями взаимно однозначно [11].

ТЕОРЕМА 3. Пусть σ является неотрицательной мерой на $\mathfrak{B}(\Pi)$ такой, что выполнено соотношение (4.1). Пусть $L_0^2(\sigma)$ – замыкание в $L^2(\sigma)$ множества всех степенно-тригонометрических многочленов (1.1). Рассмотрим проблему моментов Девинатца с моментами $\{s_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$, определяемую посредством (4.2). Рассмотрим гильбертово пространство H и последовательность $\{x_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}}$ в H , такие, что $\text{span}\{x_{m,n}\}_{m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}} = H$, и выполнено соотношение (4.4). Следующие условия являются эквивалентными:

- (i) $L_0^2(\sigma) = L^2(\sigma)$;
- (ii) σ является каноническим решением проблемы моментов Девинатца;
- (iii) σ порождается соотношением (4.5), где $\mathbf{E}$ является спектральной функцией $\hat{A}$, имеющей вид (4.9) с некоторым оператором $V_2 \in \mathbf{D}(B; H_2)$.
- (iv) для каждого $\lambda \in \mathbb{C}_+$ существует линейный ограниченный оператор D_λ в H такой, что

$$(D_\lambda x_{m,n}, x_{m',n'})_H = \int_\Pi \frac{x^{m+m'} e^{i(n-n')\varphi}}{x - \lambda} d\sigma, \quad m, m' \in \mathbb{Z}_+, \quad n, n' \in \mathbb{Z}, \quad (4.10)$$

который является обратимым и

$$((E_H + 2iD_i)^k x_{0,n}, x_{0,0})_H = \int_{\Pi} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^k e^{in\varphi} d\sigma, \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad (4.11)$$

$$D_{\lambda}^{-1} + \lambda E_H \equiv \widehat{A}, \quad (4.12)$$

где $\widehat{A}$ имеет вид (4.9) с некоторым оператором $V_2 \in \mathbf{D}(B; H_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Эта импликация была доказана в [11] (см. рассуждения перед списком литературы).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть σ имеет вид (4.5), где $\mathbf{E}$ является спектральной функцией самосопряженного оператора $\widehat{A} \supseteq A$ в H , коммутирующего с B . Поскольку $\widehat{A}x_{m,n} = Ax_{m,n} = x_{m+1,n}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathbb{Z}$, применяя индукцию, получаем

$$\widehat{A}^r x_{m,n} = x_{m+r,n}, \quad m, r \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Значит,

$$\widehat{A}^r B^l x_{0,0} = \widehat{A}^r x_{0,l} = x_{r,l}, \quad r, l \in \mathbb{Z}_+.$$

Мы заключаем, что

$$\text{span}\{\widehat{A}^m B^n x_{0,0}, m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}\} = H. \quad (4.14)$$

Таким образом, $(\widehat{A}, B)$ имеет спектр кратности 1. Согласно теореме 1 найдется унитарное отображение W пространства $L^2(\sigma)$ на H такое, что

$$W^{-1} \widehat{A} W = X, \quad W^{-1} B W = U, \quad (4.15)$$

$$W1 = x_{0,0}, \quad (4.16)$$

где $X: f(x, \varphi) \mapsto xf(x, \varphi)$ и $U: f(x, \varphi) \mapsto e^{i\varphi} f(x, \varphi)$ в $L^2(\sigma)$. Проверим, что

$$Wx^m = x_{m,0}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.17)$$

При $m = 0$ это равенство выполнено. Предположим, что это равенство выполнено для $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$Wx^{r+1} = WXW^{-1}Wx^r = \widehat{A}x_{r,0} = x_{r+1,0},$$

и значит (4.17) выполнено. Докажем, что

$$Wx^m e^{in\varphi} = x_{m,n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.18)$$

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{Z}_+$. При $n = 0$ соотношение (4.18) выполняется. Предположим, что оно выполняется для $n = r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$We^{i(r+1)\varphi} x^m = WUW^{-1}We^{ir\varphi} x^m = Bx_{m,r} = x_{m,r+1}.$$

С другой стороны, предположим, что (4.18) выполнено для $n = -r$, $r \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$We^{i(-r-1)\varphi} x^m = WU^{-1}W^{-1}We^{-ir\varphi} x^m = B^{-1}x_{m,-r} = x_{m,-r-1}.$$

Значит соотношение (4.18) выполнено.

Повторяя рассуждения из начала доказательства теоремы 3.1 в [11], построим унитарное отображение V пространства $L_0^2(\sigma)$ на H такое, что

$$Vx^m e^{in\varphi} = x_{m,n}, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.19)$$

Из (4.18), (4.19) следует, что $Wf = Vf$, $f \in L_0^2(\sigma)$. Значит, $WL_0^2(\sigma) = H$ и $L_0^2(\sigma) = W^{-1}H = L^2(\sigma)$.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii). Было доказано в [11; Theorem 3.2] и обсуждалось перед формулировкой теоремы.

(ii) $\Rightarrow$ (iv). Пусть σ имеет вид (4.5), где $\mathbf{E}$ является спектральной функцией некоторого самосопряженного оператора $\hat{A} \supseteq A$ в H , коммутирующего с B . Согласно рассуждениям перед формулировкой теоремы получаем, что $\hat{A}$ имеет вид (4.9) с некоторым оператором $V_2 \in \mathbf{D}(B; H_2)$. Тогда

$$\begin{aligned} & (R_\lambda(\hat{A})x_{m,n}, x_{m',n'})_H \\ &= (R_\lambda(\hat{A})\hat{A}^m B^n x_{0,0}, \hat{A}^{m'} B^{n'} x_{0,0})_H \\ &= (B^{n-n'} \hat{A}^{m+m'} R_\lambda(\hat{A})x_{0,0}, x_{0,0})_H = \int_{\Pi} \frac{x^{m+m'} e^{i(n-n')\varphi}}{t - \lambda} d(\mathbf{E} \times F)x_{0,0}, x_{0,0})_H \\ &= \int_{\Pi} \frac{x^{m+m'} e^{i(n-n')\varphi}}{t - \lambda} d\sigma, \quad m, m' \in \mathbb{Z}_+, \quad n, n' \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & ((E_H + 2iR_i(\hat{A}))^k x_{0,n}, x_{0,0})_H \\ &= ((E_H + 2iR_i(\hat{A}))^k B^n x_{0,0}, x_{0,0})_H \\ &= \int_{\Pi} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^k e^{in\varphi} d(\mathbf{E} \times F)x_{0,0}, x_{0,0})_H = \int_{\Pi} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^k e^{in\varphi} d\sigma, \quad k, n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Значит, для $D_\lambda := R_\lambda(\hat{A})$ выполнено условие (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (ii). Заметим, что D_λ является резольвентой самосопряженного оператора $\hat{A} \supseteq A$ в H , который коммутирует с B . Пусть $\hat{E}$ – спектральная функция оператора $\hat{A}$. Используя (4.11), можем записать

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^k e^{in\varphi} d((\hat{E} \times F)x_{0,0}, x_{0,0})_H = ((E_H + 2iR_i(\hat{A}))^k B^n x_{0,0}, x_{0,0})_H \\ &= (D_\lambda(E_H + 2iD_i)^k x_{0,n}, x_{0,0})_H = \int_{\Pi} \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^k e^{in\varphi} d\sigma, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.1 [11], легко получаем, что $\sigma = ((\hat{E} \times F)x_{0,0}, x_{0,0})_H$. Следовательно, σ является каноническим решением проблемы моментов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. K. Nikolski, *Operators, Functions and Systems: an Easy Reading*. Vol. 1. *Hardy, Hankel, and Toeplitz*, Math. Surveys Monogr., **92**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

- [2] С. Н. Мергелян, “О полноте систем аналитических функций”, *УМН*, **8:4** (1953), 3–63.
- [3] А. И. Маркушевич, *Теория аналитических функций*. Т. 2. *Дальнейшее построение теории*, Наука, М., 1968.
- [4] Н. И. Ахиезер, *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею*, Физматгиз, М., 1961.
- [5] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.
- [6] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988.
- [7] Л. Клѐц, С. М. Загороднюк, “Приближение в среднем матричнозначными многочленами на спрямляемых кривых”, *Укр. матем. вестн.*, **4:1** (2007), 1–20.
- [8] С. М. Загороднюк, Л. Клѐц, “Некоторые интерполяционные задачи в пространствах L^p , $0 < p < \infty$, на спрямляемых кривых”, *Укр. матем. вестн.*, **5:2** (2008), 258–279.
- [9] F. Marcellán, S. M. Zagorodnyuk, “Density of polynomials in some L^2 spaces on radial rays in the complex plane”, *Linear Algebra Appl.*, **435:1** (2011), 128–146.
- [10] P. Lopez-Rodriguez, “The Nevanlinna parametrization for a matrix moment problem”, *Math. Scand.*, **89:2** (2001), 245–267.
- [11] S. M. Zagorodnyuk, “Devinatz’s moment problem: a description of all solutions”, *J. Operator Theory*, **68:2** (2012), 515–541.
- [12] Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, Т. 1, Вища школа, Харьков, 1977.
- [13] M. Rosenberg, “The square-integrability of matrix-valued functions with respect to a non-negative Hermitian measure”, *Duke Math. J.*, **31:2** (1964), 291–298.
- [14] М. М. Маламуд, С. М. Маламуд, “Спектральная теория операторных мер в гильбертовом пространстве”, *Алгебра и анализ*, **15:3** (2003), 1–77.
- [15] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во Ленинградск. ун-та, Ленинград, 1980.
- [16] S. M. Zagorodnyuk, “A description of all solutions of the matrix Hamburger moment problem in a general case”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **16:3** (2010), 271–288.
- [17] А. В. Штраус, “Обобщенные резольвенты симметрических операторов”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **18:1** (1954), 51–86.

С. М. Загороднюк

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

E-mail: Sergey.M.Zagorodnyuk@univer.kharkov.ua

Поступило

01.08.2012