Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Никитин, Сравнение двух определений классов Бессова на бесконечномерных пространствах, *Матем. заметки*, 2014, том 95, выпуск 1, 150–153

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10412>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 16:26:05

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Сравнение двух определений классов Бесова на бесконечномерных пространствах

Е. В. Никитин

В данной работе сравниваются два способа определения дробных классов Соболева, в том числе аналогов пространств Бесова, на бесконечномерных пространствах с гауссовской мерой. Оба способа используют интерполяционный подход. В первом используется вещественный интерполяционный метод, применявшийся для определения классов Бесова в работах [1] и [2]. Второй способ представляет собой применение метода следов и использовался в работе [3]. В данной работе доказывается, что эти два подхода эквивалентны. Заметим, что в работе [1] предполагается эквивалентность двух определений, но не дается доказательство. Доказательство требует применения результатов работы [2]. Заметим также, что существует альтернативный способ определения аналогов пространств Бесова, основанный на интегральном условии (см. [4]).

Рассмотрим локально выпуклое пространство X , на котором определена центрированная радоновская гауссовская мера γ (см. [5], [6]; далее можно считать, что речь идет о счетной степени прямой $X = \mathbb{R}^\infty$ со счетной степенью стандартной гауссовской меры на прямой). Пространства Соболева на X с мерой γ (см. подробнее [5]–[9]) можно определить с помощью полугруппы Орнштейна–Уленбека $\{T_t\}$, положив

$$H^{p,r}(\gamma) := V_r(L^p(\gamma)),$$

где операторы V_r и T_t на функциях $f \in L^p(\gamma)$ задаются равенствами

$$V_r f := \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)^{-1} \int_0^\infty t^{r/2-1} e^{-t} T_t f dt, \quad T_t f(x) = \int_X f(e^{-t}x - \sqrt{1-e^{-2t}}y) \gamma(dy).$$

Оператор V_r также можно выразить с помощью генератора L полугруппы Орнштейна–Уленбека равенством $V_r = (I - L)^{-r/2}$, где I – единичный оператор. Норму функции u из $H^{p,r}(\gamma)$ будем обозначать через $\|u\|_{p,r}$, при этом $\|u\|_{p,r} := \|(I - L)^{r/2}u\|_p$.

Вещественный интерполяционный метод позволяет по заданным банаховым пространствам X_0 и X_1 (которые предполагаются лежащими в некотором общем объемлющем пространстве, например, пространстве всех функций) построить двухпараметрическую шкалу банаховых пространств X таких, что $X_0 \cap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$, где пересечение $X_0 \cap X_1$ и алгебраическая сумма $X_0 + X_1$ являются банаховыми пространствами с нормами

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_0 \cap X_1} &= \max\{\|u\|_{X_0}, \|u\|_{X_1}\}, \\ \|u\|_{X_0 + X_1} &= \inf\{\|u_0\|_{X_0} + \|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1\}. \end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-33009).

DOI: 10.4213/mzm10412

Подробное обсуждение метода имеется в [10], [11]. Приведем определение вещественного интерполяционного K -метода. Пусть

$$K(t; u) := \inf \{ \|u_0\|_{X_0} + t\|u_1\|_{X_1} : u = u_0 + u_1, u_0 \in X_0, u_1 \in X_1 \}.$$

Если $0 \leq \theta < 1$ и $1 \leq q \leq \infty$, то $(X_0, X_1)_{\theta; q, K}$ обозначает пространство всех функций $u \in X_0 + X_1$ таких, что функция $t \mapsto t^{-\theta} K(t; u)$ входит в $L_*^q := L^q(0, \infty; dt/t)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|u\|_{\theta; q; K} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t; u))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & \text{если } 1 \leq q < \infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < \infty} \{t^{-\theta} K(t; u)\}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $0 < s < \infty$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, m – наименьшее целое, большее s . *Пространством Бесова* $B^{s; p, q}(\gamma)$ назовем определенное с помощью вещественного интерполяционного K -метода интерполяционное пространство между $L^p(\gamma)$ и $H^{p, m}(\gamma)$ с индексом $\theta = s/m$, т.е.

$$B^{s; p, q}(\gamma) = (L^p(\gamma), H^{p, m}(\gamma))_{s/m, q; K}.$$

Пространство $B^{s; p, q}(\gamma)$ автоматически становится банаховым пространством с нормой $(L^p(\gamma), H^{p, m}(\gamma))_{s/m, q; K}$. Обозначим ее через $\|\cdot\|_{s; p, q}$. Подчеркнем, что $s/m < 1$. Кроме того, при $k < m$ имеем

$$H^{p, m}(\gamma) \cap H^{p, k}(\gamma) = H^{p, m}(\gamma) \subset B^{s; p, q}(\gamma) \subset H^{p, m}(\gamma) + H^{p, k}(\gamma) = H^{p, k}(\gamma).$$

Более того, в [2] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $p > 1$, целых k, m таких, что $0 \leq k < s < m$ и $s = (1-\theta)k + \theta m$, справедливо равенство

$$B^{s; p, q}(\gamma) = (H^{p, k}(\gamma), H^{p, m}(\gamma))_{\theta; q; K},$$

В частности, $H^{p, k}(\gamma) \subset B^{s; p, q}(\gamma) \subset H^{p, m}(\gamma)$. При $p = 2$ то же верно и для $k, m \in \mathbb{R}$, $0 \leq k < s < m$.

Ватанабэ в работе [3] определяет дробные классы Соболева с помощью интерполяционного метода следов (метода Ж.-Л. Лионса). Приведем определение этого метода так, как оно дано в [12] (см. также [10]).

Пусть B_1 и B_2 – вещественные сепарабельные банаховы пространства; предположим также для простоты, что $B_1 \subseteq B_2$. Для $x \in B_2 \setminus B_1$ положим $|x|_{B_1} = \infty$ по определению. Для $1 < p < \infty$ и $\nu \in \mathbb{R}$ определим банахово пространство $W = W(p, \nu; B_1, B_2)$ как множество всех абсолютно непрерывных функций $f: (0, \infty) \rightarrow B_2$ таких, что $t^\nu f \in L_p((0, \infty) \rightarrow B_1)$ и $t^\nu f' \in L_p((0, \infty) \rightarrow B_2)$, с нормой

$$\|f\|_W = \max(\|t^\nu f\|_{L_p((0, \infty) \rightarrow B_1)}, \|t^\nu f'\|_{L_p((0, \infty) \rightarrow B_2)}).$$

Если $\theta = 1/p + \nu < 1$, то $B_2 - \lim_{t \downarrow 0} f(t) = f(0)$ существует в B_2 , и мы полагаем

$$T = T^{\theta, p}(B_1, B_2) = \{f(0) \mid f \in W(p, \nu; B_1, B_2)\},$$

$$\|u\|_T = \inf \{\|f\|_W \mid f \in W(p, \nu; B_1, B_2), f(0) = u\}, \quad u \in T.$$

Теперь, воспользовавшись интерполяционным методом следов, определим дробные классы Соболева $E^{s, p}(\gamma)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Дробные классы Соболева $E^{s,p}(\gamma)$, $1 < p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$, задаются равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = H^{p,s}(\gamma), \quad \text{если } s \in \mathbb{Z},$$

и равенством

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)), \quad \text{если } s = k + \sigma, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \sigma < 1.$$

Из общей теории интерполяционных пространств известно, что интерполяционный метод следов эквивалентен вещественному интерполяционному K -методу, который мы использовали для определения пространств Бесова $B^{s;p,q}(\gamma)$. Благодаря этому мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Для $1 < p < \infty$ и дробных s пространства $E^{s,p}(\gamma)$ совпадают с пространствами $B^{s;p,p}(\gamma)$, а их нормы эквивалентны. При $p = 2$ пространства $E^{s,2}(\gamma)$ и $B^{s;2,2}(\gamma)$ совпадают для всех $s > 0$ и совпадают с пространствами Соболева $H^{2,s}(\gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме об эквивалентности метода следов и вещественного интерполяционного K -метода (см. [10; с. 44])

$$E^{s,p}(\gamma) = T^{1-\sigma}(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma)) = (E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma))_{1-\sigma,p;K}, \quad s = k + \sigma.$$

По свойству K -метода (см. [10; с. 25])

$$(E^{k+1,p}(\gamma), E^{k,p}(\gamma))_{1-\sigma,p;K} = (E^{k,p}(\gamma), E^{k+1,p}(\gamma))_{\sigma,p;K}.$$

Далее, из теоремы 1 о вложениях пространств Бесова и пространств Соболева, положив $m = k + 1$ и $q = p$, получаем

$$B^{s;p,p}(\gamma) = (H^{p,k}(\gamma), H^{p,k+1}(\gamma))_{\sigma,p;K},$$

что в точности совпадает с предыдущим выражением, поскольку по определению $E^{k,p}(\gamma) = H^{p,k}(\gamma)$ и $E^{k+1,p}(\gamma) = H^{p,k+1}(\gamma)$.

Кроме того, в [2] доказано, что $B^{s;2,2}(\gamma) = H^{2,s}(\gamma)$ для всех вещественных s . Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для $s > 0$, $\varepsilon > 0$, $s \pm \varepsilon \notin \mathbb{Z}$, и любых $1 < p < \infty$ справедливы вложения

$$B^{s+\varepsilon,p,p}(\gamma) \subset H^{p,s}(\gamma) \subset B^{s-\varepsilon,p,p}(\gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из аналогичного утверждения для $E^{s,p}(\gamma)$, доказанного в [3].

Заметим, что аналогичное следствие, но верное только для целых индексов s , вытекает из утверждения теоремы 1 для $p > 1$. Данное следствие дополняет этот результат. В то же время для $p = 2$ утверждение следствия следует уже из теоремы 1 и в более сильной форме (для произвольных q).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Э. Эро, В.И. Богачев, П. Леско, Докл. РАН, **391**:3 (2003), 320–323. [2] Е.В. Никитин, Докл. РАН, **452**:2 (2013), 130–135. [3] S. Watanabe, Probab. Theory Related Fields, **95**:2 (1993), 175–198. [4] Е.В. Никитин, Матем. заметки, **93**:6 (2013), 951–953. [5] V.I. Bogachev, Gaussian Measures, Math. Surveys Monogr., **62**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. [6] V.I. Bogachev, Differentiable Measures and the Malliavin Calculus, Math. Surveys Monogr., **164**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. [7] V.I. Bogachev, J. Math. Sci. (New York), **87**:4 (1997), 3577–3731. [8] I. Shigekawa, Stochastic Analysis,

Transl. Math. Monogr., **224**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004. [9] S. Fang, *Introduction to Malliavin calculus*, Tsinghua Univ. Press, Beijing, 2004. [10] X. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980. [11] R. A. Adams, J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Pure Appl. Math. (Amst.), **140**, Academic Press, New York, 2003. [12] R. A. Adams, *Sobolev Spaces*, Pure Appl. Math., **65**, Academic Press, New York, 1975.

Е. В. НИКИТИН

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: yegor.nikitin@gmail.com

Поступило

13.07.2013