Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ветохин, О свойствах топологической энтропии на компактном семействе отображений, *Матем. заметки*, 2016, том 99, выпуск 3, 333–341

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10413>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 17:01:13

О свойствах топологической энтропии на компактном семействе отображений

А. Н. Ветохин

В статье изучаются свойства топологической энтропии как функции на компактном семействе отображений компактного метрического пространства.

Библиография: 6 названий.

DOI: 10.4213/mzm10413

1. Постановка задачи. Пусть (X, d) – компактное метрическое пространство, а $f: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Наряду с исходной метрикой d определим на X дополнительную систему метрик

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через $B_f(x, \varepsilon, n)$ открытый шар $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \varepsilon\}$. Множество $E \subset X$ называется (f, ε, n) -покрытием, если

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

Пусть $S_d(f, \varepsilon, n)$ обозначает минимальное количество элементов (f, ε, n) -покрытия. Топологической энтропией динамической системы [1; с. 120], порожденной непрерывным отображением f , называется величина

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

В монографии [1; с. 501] установлено, что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на пространстве непрерывных отображений из $[0; 1]$ в $[0; 1]$ с равномерной топологией, является всюду полунепрерывной снизу функцией, а следовательно, принадлежит первому классу Бэра. Вообще же говоря (при произвольном X), функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ может и не быть полунепрерывной снизу. Рассмотрим, к примеру, семейство отображений $f_\mu: X_1 \rightarrow X_1$, $\mu \in [0, 1]$, где

$$X_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}, \quad f_\mu(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0, \\ \mu \frac{z^2}{|z|}, & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$$

При $\mu \in [0; 1)$ выполнено равенство $h_{\text{top}}(f_\mu) = 0$, а при $\mu = 1$ – неравенство $h_{\text{top}}(f_\mu) \geq \ln 2$ [2]. Таким образом, функция $F(\mu) = h_{\text{top}}(f_\mu): [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ не является полунепрерывной снизу в точке $\mu = 1$.

Напомним, что свойство точки топологического пространства называется *типичным по Бэру*, если множество точек, обладающих этим свойством, содержит всюду плотное множество типа G_δ [3].

В работе [2] установлено, что топологическая энтропия, рассматриваемая как функционал на множестве отображений, удовлетворяющих условию Липшица (с фиксированной константой), принадлежит второму классу Бэра и в типичной по Бэру точке полунепрерывна снизу. Аналогичный результат для отображений, удовлетворяющих условию Гёльдера, был представлен в докладе [4].

В данной статье изучаются свойства топологической энтропии, рассматриваемой как функционал на компактном семействе отображений, с точки зрения бэровской классификации функций.

2. Бэровский класс и типичность полунепрерывности снизу топологической энтропии. Обозначим $C(X, X)$ пространство непрерывных функций из X в X с метрикой

$$\rho(f, g) = \max_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Напомним, что семейство отображений $D \subset C(X, X)$ называется *компактным*, если из каждой последовательности $\{f_n\}$, все элементы которой принадлежат D , можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся к точке из D .

ТЕОРЕМА 1. Пусть D_∞ – счетное объединение компактных семейств отображений из X в X . Тогда функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве (D_∞, ρ) , и для любого замкнутого в $C(X, X)$ подмножества $Z \subset D_\infty$ функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ в типичной по Бэру точке пространства (Z, ρ) полунепрерывна снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы будет разбито на ряд лемм. Пусть семейство $D \subset C(X, X)$ является компактным и $f \in D$.

ЛЕММА 1. Для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство (X, d_f^n) является компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \in C(X, X)$, то f равномерно непрерывна на X , т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) \in (0, \varepsilon)$, что из $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ вытекает $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Для произвольных $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $n = 1, 2, \dots$ имеет место включение

$$B_f(x, \varepsilon, 0) \supset B_f(x, \varepsilon, n) \supset B_f(x, \underbrace{\delta(\delta(\dots \delta(\varepsilon), 0))}_{n-1}),$$

а следовательно, метрики d_f^n и d порождают одну и ту же топологию в пространстве X . Таким образом, из компактности пространства (X, d) получаем компактность пространства (X, d_f^n) .

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть множество $E \subset X$ является (f, ε, n) -покрытием. Тогда существует натуральное число $m: \varepsilon - 1/m > 0$ такое, что множество E является $(f, \varepsilon - 1/m, n)$ -покрытием.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество $E \subset X$ является (f, ε, n) -покрытием, то справедливо включение

$$X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n).$$

В силу равенства

$$B_f(x, \varepsilon, n) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} B_f\left(x, \varepsilon - \frac{1}{m}, n\right)$$

множество шаров $\{B_f(x, \varepsilon - 1/m, n), m \in \mathbb{N}, x \in E\}$ образует счетное покрытие компактного пространства (X, d_f^n) . Выберем из этого покрытия конечное подпокрытие $\{B_f(x_j, \varepsilon - 1/m_j, n), j = 1, \dots, J\}$, и положим $m^* = \max_{j=1, \dots, J} m_j$. Тогда множество шаров $\{B_f(x, \varepsilon - 1/m^*, n), x \in E\}$ – тоже покрытие компактного пространства (X, d_f^n) , и лемма верна при $m = m^*$.

Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. Для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая окрестность $U(f) \subset D$ точки f , что для каждой точки $g \in U(f)$ и любых $x, y \in X$ выполнено неравенство

$$d_g^n(x, y) < 2\varepsilon + d_f^n(x, y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как D – компактное множество, в силу теоремы Асколи–Арцела это множество является равномерно непрерывным, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) : 0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$, что из $d(x, y) < \delta(\varepsilon)$ вытекает $d(g(x), g(y)) < \varepsilon$ для любой $g \in D$. Пусть

$$U(f) = \left\{ g \in D : \rho(f, g) < \underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-1} \right\}.$$

Пусть $g \in U(f)$; тогда для любого $x \in X$ получаем

$$d(f(x), g(x)) < \underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-1} < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} d(f^2(x), g^2(x)) &\leq d(f(f(x)), f(g(x))) + d(f(g(x)), g(g(x))) \\ &< \underbrace{\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-2} + \underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-1} \\ &< \underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-2} < \varepsilon, \end{aligned}$$

.....,

$$\begin{aligned} d(f^{n-1}(x), g^{n-1}(x)) &\leq d(f(f^{n-2}(x)), f(g^{n-2}(x))) + d(f(g^{n-2}(x)), g(g^{n-2}(x))) \\ &< \frac{1}{2}\varepsilon + \underbrace{\delta\left(\frac{1}{2}\delta\left(\dots\frac{1}{2}\delta\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)\dots\right)\right)}_{n-1} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует

$$\begin{aligned} d_g^n(x, y) &= \max_{0 \leq i \leq n-1} d(g^i(x), g^i(y)) \\ &\leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (d(g^i(x), f^i(x)) + d(f^i(x), f^i(y)) + d(f^i(y), g^i(y))) \\ &< \varepsilon + \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) + \varepsilon = 2\varepsilon + d_f^n(x, y). \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любого натурального n и любого $\varepsilon > 0$ сужение функции $S_d(\cdot, \varepsilon, n)$ на пространство (D, ρ) полунепрерывно сверху в точке f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $E \subset X$ является (f, ε, n) -покрытием, т.е. $X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \varepsilon, n)$. По лемме 2 существует натуральное число m , удовлетворяющее неравенству $\varepsilon - 1/m > 0$ и такое, что множество E является $(f, \varepsilon - 1/m, n)$ -покрытием. Для числа $1/(2m)$ в силу леммы 3 найдется такая окрестность $U(f) \subset D$ точки f , что для любых $g \in U(f)$, $x \in X$, $y \in B_f(x, \varepsilon - 1/m, n)$ выполнено неравенство

$$d_g^n(x, y) < 2 \frac{1}{2m} + d_f^n(x, y) < \varepsilon,$$

и следовательно, точка y принадлежит шару $B_g(x, \varepsilon, n)$. Таким образом, выполнено включение $B_f(x, \varepsilon - 1/m, n) \subset B_g(x, \varepsilon, n)$, т.е. множество E является (g, ε, n) -покрытием. Следовательно, $S_d(g, \varepsilon, n) \leq S_d(f, \varepsilon, n)$ для любой функции $g \in U(f)$.

Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Существует такая неубывающая последовательность функций $\{\Phi_p : D \rightarrow \mathbb{R}\}_{p=1}^\infty$ первого класса Бэра, что для каждой функции $f \in D$ выполнено равенство

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi_p(f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1; с. 122] установлено, что верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$ в определении топологической энтропии можно заменить на нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty}$, т.е. справедливо равенство

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n).$$

По лемме 4 функция $S_d(\cdot, \varepsilon, n)$ полунепрерывна сверху на пространстве (D, ρ) ; следовательно (см. [5; с. 237]) существует последовательность непрерывных функций $\varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n)$ на пространстве (D, ρ) такая, что

$$\frac{1}{n} \ln S_d(\cdot, \varepsilon, n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n).$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d(f, \varepsilon, n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, n\right) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{l \geq n} \inf_{m \in \mathbb{N}} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, l\right) \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq p} \max_{1 \leq n \leq p} \lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, l\right). \end{aligned}$$

Из непрерывности функций $\varphi_d^m(\cdot, \varepsilon, n)$ следует непрерывность функций

$$\min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(\cdot, \frac{1}{k}, l\right)$$

(см. [5; с. 224]). Отсюда функции

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(\cdot, \frac{1}{k}, l\right)$$

принадлежат первому классу Бэра; следовательно, функция

$$\Phi_p(f) = \max_{1 \leq k \leq p} \max_{1 \leq n \leq p} \lim_{q \rightarrow \infty} \min_{n \leq l \leq q} \min_{1 \leq m \leq q} \varphi_d^m\left(f, \frac{1}{k}, l\right) \quad (1)$$

также принадлежат первому классу Бэра на пространстве (D, ρ) (см. [5; с. 224]). Таким образом, получаем

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi_p(f), \quad \Phi_p(f) \leq \Phi_{p+1}(f).$$

Лемма 5 доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1. Пусть

$$D_\infty = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$$

– счетное объединение компактных семейств отображений из X в X . Для каждого натурального $k \in \mathbb{N}$ множество D_k является замкнутым в пространстве $C(X, X)$.

По лемме 5 для любого $k \in \mathbb{N}$ сужение функции $h_{\text{top}}(\cdot)$ на замкнутое множество D_k принадлежит второму классу Бэра, а следовательно, по теореме (см. [6; с. 385]) функция

$$h_{\text{top}}(\cdot): D_\infty \rightarrow [0, +\infty)$$

принадлежит второму классу Бэра на пространстве (D_∞, ρ) .

Пусть Z замкнутое в $C(X, X)$ подмножество множества D_∞ . Докажем, что в типичной по Бэру точке пространства (Z, ρ) функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ полунепрерывна снизу. Для любого натурального числа p функция (1) принадлежит первому классу Бэра на пространстве D_k , а следовательно, в силу теоремы (см. [6; с. 385]) функция $\Phi_p^n(\cdot)$ принадлежит первому классу Бэра на пространстве (D_∞, ρ) . Таким образом, функция $\Phi_p^n(\cdot)$ принадлежит первому классу Бэра на (Z, ρ) .

По теореме Бэра (см. [5; с. 247]) множество точек непрерывности G_p каждой функции $\Phi_p(\cdot)$ является всюду плотным множеством типа G_δ в пространстве (Z, ρ) . Пересечение всех G_p снова является всюду плотным множеством типа G_δ (см. [6; с. 428]), каждая точка которого является точкой непрерывности всех функций $\Phi_p(\cdot)$. Пусть

$$f_0 \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} G_p, \quad \varepsilon > 0.$$

Так как последовательность $(\Phi_p(f_0))_{p=1}^\infty$ сходится к $h_{\text{top}}(f_0)$, при достаточно большом p окажется $\Phi_p(f_0) \geq h_{\text{top}}(f_0) - \varepsilon$. Зафиксируем такое p , найдем окрестность

$U(f_0)$ точки f_0 такую, что для всякого $f \in U(f_0)$ будет $\Phi_p(f) \geq \Phi_p(f_0) - \varepsilon$. Так как $h_{\text{top}}(f) \geq \Phi_p(f)$, для $f \in U(f_0)$ окажется $h_{\text{top}}(f) \geq h_{\text{top}}(f_0) - 2\varepsilon$. Следовательно, в каждой точке множества $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} G_p$ функция

$$h_{\text{top}}(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} \Phi_p(f)$$

полу непрерывна снизу.

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим $H_{K,\alpha}(X, X)$ – множество непрерывных отображений $f: X \rightarrow X$, удовлетворяющих условию Гёльдера с константами $K > 1$ и $0 < \alpha \leq 1$:

$$d(f(x), f(y)) \leq K d^\alpha(x, y) \quad \text{для любых элементов } x, y \in X.$$

Получим следствие из теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть

$$H(X, X) = \bigcup_{K > 1, 0 < \alpha \leq 1} H_{K,\alpha}(X, X).$$

Тогда $h_{\text{top}}(\cdot)$ принадлежит второму классу Бэра на пространстве $(H(X, X), \rho)$, и для любого замкнутого в $C(X, X)$ подмножества $Z \subset H(X, X)$, функция $h_{\text{top}}(\cdot)$ в типичной по Бэру точке пространства (Z, ρ) полу непрерывна снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим, что множество $H_{K,\alpha}(X, X)$ является компактным.

Пусть f_0 предельная точка множества $H_{K,\alpha}(X, X)$. Тогда существует последовательность $(f_n)_{n=1}^\infty \subset H_{K,\alpha}(X, X)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f_0$. Для любого отображения f_n и любых $x, y \in X$ справедливо неравенство

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq K d^\alpha(x, y).$$

В этом неравенстве перейдем к пределу при $n \rightarrow \infty$; получим

$$d(f_0(x), f_0(y)) \leq K d^\alpha(x, y);$$

следовательно, $f_0 \in H_{K,\alpha}(X, X)$. Таким образом, множество $H_{K,\alpha}(X, X)$ является замкнутым в пространстве $C(X, X)$.

Множество $H_{K,\alpha}(X, X)$ равномерно непрерывно, так как для любого $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta(\varepsilon) = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$.

Таким образом, в силу теоремы Асколи–Арцела множество $H_{K,\alpha}(X, X)$ является компактным. Теперь утверждение следствия получается из равенства

$$H(X, X) = \bigcup_{p, q \in \mathbb{N}} H_{p, 1/q}(X, X)$$

и теоремы 1.

Следствие доказано.

3. О топологической энтропии отображений одного бэровского пространства. На множестве последовательностей $\{x = (x_1, x_2, \dots) : x_k \in \{0, 1\}\}$ введем метрику

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ \frac{1}{\min\{k : x_k \neq y_k\}}, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Полученное компактное метрическое пространство обозначим через $\mathfrak{B}$.

Пусть $\delta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – возрастающая функция, удовлетворяющая условиям

- 1) выполнено равенство $\delta(0) = 0$;
- 2) существует такое $K > 1$, что для любого $\varepsilon \geq 0$ выполнено неравенство $\delta(\varepsilon) \geq K\varepsilon$.

Рассмотрим $D_\delta(X, X)$ – множество непрерывных отображений $f: X \rightarrow X$, удовлетворяющих условию

$$d(f(x), f(y)) \leq \delta(d(x, y)) \quad \text{для любых элементов } x, y \in X.$$

ТЕОРЕМА 2. *Функция $h_{\text{top}}: D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) \rightarrow [0, +\infty)$ разрывна в каждой точке пространства $(D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \rho)$, и в типичной по Бэру точке топологическая энтропия равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ будет разбито на ряд лемм.

ЛЕММА 6. *Для любого $f \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ выполнено равенство*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\rho(f, g) < \varepsilon} h_{\text{top}}(g) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$, $f(x_1, x_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots)$. Рассмотрим отображение $g_{n_0}(x_1, x_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots, u_{n_0}, x_{n_0+1}, \dots)$. В силу определения g_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, g_{n_0}) = \max_{x \in \mathfrak{B}} d(f(x), g_{n_0}(x)) \leq \frac{1}{n_0}.$$

Докажем, что $g_{n_0} \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$. Пусть $x, y \in \mathfrak{B}$.

1. Если $d(f(x), f(y)) \geq 1/n_0$, то

$$d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leq \delta(d(x, y)).$$

2. Если $d(f(x), f(y)) \leq 1/(n_0 + 1)$, то

$$d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = d(x, y) \leq \delta(d(x, y)).$$

Таким образом, $g_{n_0} \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.

Вычислим топологическую энтропию отображения g_{n_0} . Пусть k_0 такое, что выполнено $1/n_0 > K/k_0$. Если $d(x, y) < 1/k_0$, то $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < 1/n_0$. В противном случае из включения $g_{n_0} \in L_{K,1}$ имеем

$$\frac{1}{n_0} \leq d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) < Kd(x, y) < \frac{K}{k_0}.$$

Следовательно, для любого n выполнено равенство $B_{g_{n_0}}(x, 1/k_0, 0) = B_{g_{n_0}}(x, 1/k_0, n)$. Таким образом, для любого n получаем $S_d(g_{n_0}, 1/k_0, n) \leq 2^{k_0}$, откуда

$$h_{\text{top}}(g_{n_0}) = \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln S_d\left(g_{n_0}, \frac{1}{k_0}, n\right) = \lim_{k_0 \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{k_0}{n} = 0.$$

В силу произвольности n_0 получаем

$$0 \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\rho(f, g) < \varepsilon} h_{\text{top}}(g) \leq \lim_{n_0 \rightarrow \infty} h_{\text{top}}(g_{n_0}) = 0.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Для любого $f \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\rho(f, g) < \varepsilon} h_{\text{top}}(g) = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \in \mathbb{N}$, n_0 такие, что $1 + m/n_0 < K$, и $f(x_1, x_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots)$. Рассмотрим отображение (сдвиг на m элементов влево начиная с $n_0 + 1$) $g_{n_0}(x_1, x_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots, u_{n_0}, x_{n_0+m+1}, \dots)$. В силу определения g_{n_0} выполнено неравенство

$$\rho(f, g_{n_0}) = \max_{x \in \mathfrak{B}} d(f(x), g_{n_0}(x)) \leq \frac{1}{n_0}.$$

Докажем, что $g_{n_0} \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.

1. Пусть $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = 1/l$, $l = 1, 2, \dots, n_0$; тогда

$$d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) = d(f(x), f(y)) \leq K \cdot d(x, y).$$

2. Пусть $d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) \leq 1/(n_0 + 1)$ и $d(x, y) = 1/l$, $l = 1, 2, \dots, n_0 + m$. Тогда

$$\begin{aligned} d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) &\leq \frac{1}{n_0 + 1} \leq \frac{1}{n_0 + 1} \cdot \frac{n_0 + m}{l} \leq \frac{n_0 + m}{n_0 + 1} \cdot \frac{1}{l} \\ &\leq \left(1 + \frac{m}{n_0 + 1}\right) \cdot d(x, y) \leq K \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

3. Пусть $d(x, y) = 1/(n_0 + m + l)$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\begin{aligned} d(g_{n_0}(x), g_{n_0}(y)) &= \frac{1}{n_0 + l} = \frac{1}{n_0 + l} \cdot \frac{n_0 + m + l}{n_0 + m + l} = \frac{n_0 + m + l}{n_0 + l} \cdot \frac{1}{n_0 + m + l} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n_0 + l}\right) \cdot d(x, y) \leq K \cdot d(x, y). \end{aligned}$$

Таким образом, $g_{n_0} \in D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$.

Оценим снизу топологическую энтропию отображения g_{n_0} . Это отображение, начиная с n_0 , совпадает с m -й степенью сдвига влево на 1 элемент. Топологическая энтропия сдвига не менее $\ln 2$ [1; с. 132]; следовательно, топологическая энтропия отображения g_{n_0} не менее $m \ln 2$ [1; с. 123]. В силу произвольности n_0 получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\rho(f, g) < \varepsilon} h_{\text{top}}(g) \geq \lim_{n_0 \rightarrow \infty} h_{\text{top}}(g_{n_0}) = +\infty.$$

Лемма 7 доказана.

ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 2. В силу лемм 6 и 7 каждая точка пространства $(D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \rho)$ является точкой разрыва функции $h_{\text{top}}(\cdot)$.

Множество $D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$ является замкнутым и равномерно непрерывным в пространстве $(C(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \rho)$, а следовательно, в силу теоремы Асколи–Арцела, компактным. Таким образом, из леммы 6 и теоремы 1 в типичной по Бэру точке пространства $(D_\delta(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}), \rho)$ топологическая энтропия равна нулю.

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А. Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
- [2] А. Н. Ветохин, “О некоторых свойствах топологической энтропии динамических систем”, *Матем. заметки*, **93**:3 (2013), 347–356.
- [3] Р. Бэр, *Теория разрывных функций*, Гостехиздат, М., 1932.
- [4] А. Н. Ветохин, “О некоторых свойствах топологической энтропии отображений, удовлетворяющих обобщенному условию Гёльдера”, *Дифференц. уравнения*, **50**:8 (2014), 1139–1140.
- [5] Ф. Хаусдорф, *Теория множеств*, ОНТИ, М., 1937.
- [6] К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.

А. Н. Ветохин

Российский государственный университет
туризма и сервиса,
Московская обл., Пушкинский р-н, пос. Черкизово
E-mail: vetokhin@front.ru

Поступило

28.10.2013

Исправленный вариант

06.02.2015