Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Ю. Балахнев, О дифференциальных подстановках
для векторных обобщений мКдФ, *Матем. заметки*,
2015, том 98, выпуск 2, 173–179

DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm10414>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 02:44:27

О дифференциальных подстановках для векторных обобщений мКдФ

М. Ю. Балахнёв

Рассматриваются дифференциальные подстановки произвольного порядка для векторных обобщений мКдФ. Установлено, что указанные уравнения допускают только подстановки вида $\mathbf{u} = F(\mathbf{v}, \mathbf{v}_x)$.

Библиография: 9 названий.

DOI: 10.4213/mzm10414

Векторные обобщения мКдФ известны достаточно давно [1] и имеют вид

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + (\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{u}_1, \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + (\mathbf{u}, \mathbf{u})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}, \mathbf{u}_1)\mathbf{u}, \quad (2)$$

где вектор $\mathbf{u}(x, t)$ принадлежит некоторому N -мерному векторному пространству V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и $\mathbf{u}_t = \partial \mathbf{u} / \partial t$, $\mathbf{u}_i = \partial^i \mathbf{u} / \partial x^i$.

В скалярном случае эволюционные уравнения третьего порядка с постоянной сепарантой делятся на два класса (см. [2] и [3]): один включает уравнения, связанные дифференциальными подстановками с уравнением КдФ, другой – с уравнением Кричевера–Новикова. Именно этот факт, а также предположение об отсутствии дифференциальных подстановок порядка выше первого для векторных обобщений мКдФ в [4] и послужили предпосылкой для исследований, представленных в данной работе.

Поиск дифференциальных подстановок между известными уравнениями – не всегда простая, но все-же решаемая задача. Например, в [3] и [5] удалось отыскать подстановки не только первого, но и более высоких порядков. Ввиду отсутствия полного списка интегрируемых векторных уравнений третьего порядка, мы ограничились рассмотрением для (1) и (2) только дифференциальных подстановок вида

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^m \xi_i \mathbf{v}_i, \quad (3)$$

где ξ_i – функции, зависящие от всевозможных скалярных произведений векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$, $r \geq m$, а $\mathbf{v}$ является решением уравнения

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v} \quad (4)$$

с неизвестными функциями

$$f_i = f_i((\mathbf{v}, \mathbf{v}), (\mathbf{v}, \mathbf{v}_1), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1), (\mathbf{v}, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)).$$

Перед тем как идти далее, напомним основные обозначения, введенные в работах [6] и [7]:

$$\begin{aligned} D_x t &= 0, & D_x x &= 1, & D_t t &= 1, & D_t x &= 0, \\ v_{[i,j]} &= (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j), & D_x v_{[i,i]} &= 2v_{[i,i+1]}, & D_x v_{[i,j]} &= v_{[i+1,j]} + v_{[i,j+1]}, & i < j, \\ D_t \mathbf{v}_n &= D_x^n \mathbf{F}, & D_t v_{[i,j]} &= (\mathbf{v}_i, D_x^j \mathbf{F}) + (\mathbf{v}_j, D_x^i \mathbf{F}), & \mathbf{F} &= \mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}, \\ D_x f &= \frac{\partial f}{\partial x} + 2 \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial v_{[i,i]}} v_{[i,i+1]} + \sum_{i < j} \frac{\partial f}{\partial v_{[i,j]}} (v_{[i+1,j]} + v_{[i,j+1]}), & 0 \leq i < j \leq n, \\ \frac{\partial}{\partial v_{[k,s]}} D_x f &= D_x \frac{\partial f}{\partial v_{[k,s]}} + 2 \frac{\partial f}{\partial v_{[k,k]}} \delta_{k+1,s} + \frac{\partial f}{\partial v_{[k-1,s]}} + \frac{\partial f}{\partial v_{[k,s-1]}}, & k < s, \end{aligned}$$

где $\delta_{k+1,s}$ – символ Кронекера и $\partial f / \partial u_{[k,k-1]} \equiv 0$. Как и в указанных работах, скалярные произведения $v_{[i,j]}$ будем считать независимыми переменными, число j назовем *порядком переменной* $v_{[i,j]}$, а *порядком функции* $f = f(v_{[i,j]})$ – наивысший из порядков переменных, от которых она зависит.

ТЕОРЕМА 1. Векторное обобщение мКдФ (1) допускает с точностью до точечных преобразований только следующие дифференциальные подстановки (3):

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \left(\frac{c}{\sqrt{3 + 2v_{[0,0]}}} - \frac{2v_{[0,1]}}{3 + 2v_{[0,0]}} \right) \mathbf{v}; \quad (a_1)$$

$$\mathbf{u} = \frac{k}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}, \quad k^2 = -\frac{3}{2}, \quad (b_1)$$

$$\mathbf{u} = \frac{k}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}_1 + \left(\frac{c}{|\mathbf{v}|} - \frac{kv_{[0,1]}}{|\mathbf{v}|^3} - \frac{\sqrt{6}}{2v_{[0,0]}} \sqrt{v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}}} + v_{[0,1]} \right) \mathbf{v}, \quad k^2 = -\frac{3}{2}. \quad (c_1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $\mathbf{m} = 0$. Вычислим эволюционную производную (3), используя (1):

$$\mathbf{u}_3 + u_{[0,0]} \mathbf{u}_1 = \xi_{0,t} \mathbf{v} + \xi_0 (\mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}),$$

что с учетом (3) и всех его следствий примет вид

$$\begin{aligned} & \xi_{0,3x} \mathbf{v} + 3\xi_{0,xx} \mathbf{v}_1 + 3\xi_{0,x} \mathbf{v}_2 + \xi_0 \mathbf{v}_3 + \xi_0^2 v_{[0,0]} (\xi_{0,x} \mathbf{v} + \xi_0 \mathbf{v}_1) \\ & = \xi_{0,t} \mathbf{v} + \xi_0 (\mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Последнее выражение должно выполняться тождественно, поэтому, приравняв коэффициенты при $\mathbf{v}_i$ в левой и правой части, мы находим

$$f_2 = 3(\ln \xi_0)_x, \quad f_1 = 3 \frac{\xi_{0,xx}}{\xi_0} + \xi_0^2 v_{[0,0]}.$$

Порядок неизвестной функции f_1 в (4) не превосходит 2, следовательно,

$$\xi_0 = \xi_0(v_{[0,0]}).$$

Далее, выпишывая слагаемые с $\mathbf{v}$, имеем

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial \xi_0}{\partial v_{[0,0]}} (v_{[0,3]} + 3v_{[1,2]}) + 12 \frac{\partial^2 \xi_0}{\partial v_{[0,0]}^2} v_{[0,1]} (v_{[0,2]} + v_{[1,1]}) \\ & + 8 \frac{\partial^3 \xi_0}{\partial v_{[0,0]}^3} v_{[0,1]}^3 + 2 \xi_0^2 v_{[0,0]} \frac{\partial \xi_0}{\partial v_{[0,0]}} v_{[0,1]} \\ & = 2 \frac{\partial \xi_0}{\partial v_{[0,0]}} (v_{[0,3]} + f_2 v_{[0,2]} + f_1 v_{[0,1]} + f_0 v_{[0,0]}) + \xi_0 f_0. \end{aligned}$$

Как видно, при условии $\xi_0 \neq cv_{[0,0]}^{-1/2}$ из последнего уравнения можно выразить f_0 , а дифференциальная подстановка (3) представляет собой точечное преобразование – преобразование модуля вектор-функции

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}f(u_{[0,0]}). \quad (5)$$

Остановимся на этом моменте подробнее. Очевидно, что (5) не нарушает интегрируемости (4) и не меняет тип уравнения. В то же время преобразование (5) обратимо тогда и только тогда, когда обратимо преобразование

$$v_{[0,0]} = u_{[0,0]} f^2,$$

Якобиан которого имеет вид

$$J = \frac{D(v_{[0,0]})}{D(u_{[0,0]})} = f \left(f + 2u_{[0,0]} \frac{\partial f}{\partial u_{[0,0]}} \right).$$

Легко проверить, что по модулю преобразования (5) в уравнении вида

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_3 + 3(\ln f)_x \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}, \quad f = f(v_{[0,0]}),$$

возможны только два неэквивалентных случая

$$f \equiv \text{const} \quad \text{и} \quad f = cv_{[0,0]}^{-1/2},$$

что значительно упрощает поиск подстановок (3) при $m = 1$.

Случай $m = 1$. Дифференцирование (3) по переменной t в силу (1) приводит к выражению

$$\begin{aligned} & \xi_{1,3x} \mathbf{v}_1 + 3\xi_{1,xx} \mathbf{v}_2 + 3\xi_{1,x} \mathbf{v}_3 + \xi_1 \mathbf{v}_4 + \xi_{0,3x} \mathbf{v} + 3\xi_{0,xx} \mathbf{v}_1 + 3\xi_{0,x} \mathbf{v}_2 + \xi_0 \mathbf{v}_3 \\ & + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 (\xi_{1,x} \mathbf{v}_1 + \xi_1 \mathbf{v}_2 + \xi_{0,x} \mathbf{v} + \xi_0 \mathbf{v}_1) \\ & = \xi_{1,t} \mathbf{v}_1 + \xi_1 (\mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}_0)_x + \xi_{0,t} \mathbf{v} + \xi_0 (\mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}_0). \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при различных $\mathbf{v}_i$:

$$\begin{aligned} 3\xi_{1,x} &= \xi_1 f_2, \\ 3\xi_{1,xx} + 3\xi_{0,x} + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 \xi_1 &= 3\xi_1 (\ln \xi_1)_{xx} + \xi_1 f_1 + 3\xi_0 (\ln \xi_1)_x, \\ \xi_{1,3x} + 3\xi_{0,xx} + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 (\xi_{1,x} + \xi_0) &= \xi_{1,t} + \xi_1 (f_{1,x} + f_0) + \xi_0 f_1, \\ \xi_{0,3x} + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 \xi_{0,x} &= \xi_1 f_{0,x} + \xi_{0,t} + \xi_0 f_0. \end{aligned}$$

Два первых уравнения позволяют определить функции f_2 и f_1 , причем, так как порядок f_i не превосходит 2, то $\xi_i = \xi_i(v_{[0,0]}, v_{[0,1]}, v_{[1,1]})$. Расщепив два последних уравнения по переменным более высокого порядка и удовлетворив всем полученным при этом следствиям, находим указанные в теореме подстановки.

Случай $m = 2$. Аналогично предыдущим вариантам имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^2 (\xi_{i,3x} v_i + 3\xi_{i,2x} v_{i+1} + 3\xi_{i,x} v_{i+2} + \xi_i v_{i+3}) \\ & + \left(\sum_{i=0}^2 \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) \sum_{i=0}^2 (\xi_{i,x} v_i + \xi_i v_{i+1}) \\ & = \sum_{i=0}^2 \xi_{i,t} v_i + \sum_{i=0}^2 \xi_i (v_3 + f_2 v_2 + f_1 v_1 + f_0 v)_{ix}. \end{aligned}$$

Выписывая коэффициенты при v_4 и v_3 , получаем

$$f_2 = 3(\ln \xi_2)_x, \quad f_1 = 3(\ln \xi_2)_x^2 + 3 \left(\frac{\xi_1 - \xi_{2,x}}{\xi_2} \right)_x + \sum_{i=0}^2 \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 \xi_i \xi_j v_{[i,j]}.$$

Оставшиеся уравнения примут вид

$$\begin{aligned} & \xi_{2,3x} + 3\xi_{1,xx} + 3\xi_{0,x} + \left(\sum_{i=0}^2 \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) (\xi_{2,x} + \xi_1) \\ & = \xi_{2,t} + \xi_2 f_{2,xx} + 2\xi_2 f_{1,x} + \xi_2 f_0 + \xi_1 f_{2,x} + \xi_1 f_1 + \xi_0 f_2, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \xi_{1,3x} + 3\xi_{0,xx} + \left(\sum_{i=0}^2 \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) (\xi_{1,x} + \xi_0) \\ & = \xi_{1,t} + \xi_1 f_{1,x} + \xi_1 f_0 + \xi_0 f_1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\xi_{0,3x} + \left(\sum_{i=0}^2 \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) \xi_{0,x} = \xi_{0,t} + \xi_2 f_{0,xx} + \xi_1 f_{0,x} + \xi_0 f_0. \quad (8)$$

В уравнениях (6)–(8) содержатся переменные более высокого порядка, чем порядок неизвестных функций f_i и ξ_i . Расщепив (7) и (8) по независимым переменным, сначала находим, что порядок ξ_1 и ξ_0 не превосходит 2, затем дифференцирование (8) по переменной $v_{[3,4]}$ влечет

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial v_{[2,2]}} = 0.$$

Наконец, комбинируя слагаемые, содержащие $v_{[2,3]}$ в (6) и $v_{[3,3]}$ в (7), получаем $\xi_2 = 0$, т.е. уравнение (1) не допускает подстановку (3) при $m = 2$.

Случай $m > 2$. Эволюционная производная (3) в силу (1) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^m (\xi_{i,3x} \mathbf{v}_i + 3\xi_{i,2x} \mathbf{v}_{i+1} + 3\xi_{i,x} \mathbf{v}_{i+2} + \xi_i \mathbf{v}_{i+3}) \\ & + \left(\sum_{i=0}^m \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^m \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) \sum_{i=0}^m (\xi_{i,x} \mathbf{v}_i + \xi_i \mathbf{v}_{i+1}) \\ & = \sum_{i=0}^m \xi_{i,t} \mathbf{v}_i + \sum_{i=0}^m \xi_i (\mathbf{v}_3 + f_2 \mathbf{v}_2 + f_1 \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v})_{ix}. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при $\mathbf{v}_{m+2}$, находим $f_2 = 3(\ln \xi_m)_x$, т.е. порядок ξ_m не превосходит 1. Слагаемые при $\mathbf{v}_{m+1}$ позволяют записать

$$f_1 = 3 \frac{\xi_{m,2x}}{\xi_m} + 3 \left(\frac{\xi_{m-1}}{\xi_m} \right)_x - 3m(\ln \xi_m)_{xx} + \sum_{i=0}^m \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^m \xi_i \xi_j v_{[i,j]}.$$

Согласно (4) порядок функции f_1 не превосходит 2, но, как не трудно заметить, в правой части последнего выражения содержатся переменные более высокого порядка, например, слагаемое $\xi_m^2 v_{[m,m]}$. Доказав независимость всех ξ_i от $v_{[m,m]}$, получим, что ξ_m должно равняться нулю, т.е. при $m > 2$ дифференциальные подстановки (3) для (1) отсутствуют.

Коэффициенты при произвольном $\mathbf{v}_k$ связаны следующей формулой:

$$\begin{aligned} & \xi_{k,3x} + 3\xi_{k-1,2x} + 3\xi_{k-2,x} + \left(\sum_{i=1}^m \xi_i^2 v_{[i,i]} + 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^m \xi_i \xi_j v_{[i,j]} \right) (\xi_{k,x} + \xi_{k-1}) \\ & = \xi_{k,t} + \sum_{s=0}^{m-k+2} C_{s+k-2}^s \xi_{s+k-2} f_{2,sx} \\ & + \sum_{s=0}^{m-k+1} C_{s+k-1}^s \xi_{s+k-1} f_{1,sx} + \sum_{s=0}^{m-k} C_{s+k}^s \xi_{s+k} f_{0,sx}. \end{aligned}$$

Анализ каждого уравнения, начиная с номера k , соответствующего ξ_k наибольшего порядка, позволяет установить, что все неизвестные функции ξ_k зависят только от $v_{[i,j]}$, $0 \leq i \leq j \leq m+1$. Это вытекает из правил дифференцирования по переменным x и t — слагаемые $\xi_{k,3x}$ и $\xi_{k,t}$ дают члены более высокого порядка, которым нет подобных. Далее, дифференцируя по переменной $v_{[m+1,m+2]}$, приходим и к $\partial \xi_k / \partial v_{[m,m]} = 0$. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. Векторное обобщение мКДФ (2) допускает с точностью до точечных преобразований только следующие дифференциальные подстановки (3):

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \frac{c - v_{[0,1]}}{3 + v_{[0,0]}} \mathbf{v}, \quad (a_2)$$

$$\mathbf{u} = \frac{k}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}_1 + c|\mathbf{v}|\mathbf{v}, \quad k^2 = -3, \quad (b_2)$$

$$\mathbf{u} = \frac{k}{|\mathbf{v}|} \mathbf{v}_1 + \left(\frac{c}{|\mathbf{v}|} - \frac{kv_{[0,1]}}{|\mathbf{v}|^3} - \frac{\sqrt{3}}{v_{[0,0]}} \sqrt{v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}} + v_{[0,1]}} \right) \mathbf{v}, \quad k^2 = -3. \quad (c_2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема доказывается аналогично предыдущей.

ЗАМЕЧАНИЕ. Дифференциальные подстановки (a_1, a_2) и (b_1, b_2) , а также соответствующие им уравнения для $\mathbf{v}$ впервые найдены в [8] и [9]. Подстановки (c_1) и (c_2) приводят к новым точно интегрируемым уравнениям вида

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_3 + 3 \frac{\xi_{1,x}}{\xi_1} \mathbf{v}_2 + \left(3 \left(\frac{\xi_{1,x}}{\xi_1} \right)^2 + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 + 3 \left(\frac{\xi_0}{\xi_1} \right)_x \right) \mathbf{v}_1 + f_0 \mathbf{v}.$$

При этом в случае (c_1) имеем

$$\xi_1 = \frac{k}{|\mathbf{v}|}, \quad \xi_0 = \frac{c}{|\mathbf{v}|} - \frac{kv_{[0,1]}}{|\mathbf{v}|^3} - \frac{\sqrt{6}}{2v_{[0,0]}} \sqrt{v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}} + v_{[0,1]}}, \quad k^2 = -\frac{3}{2},$$

и f_0 – квадратичная по переменным второго порядка функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\xi_{0,3x} + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 \xi_{0,x} = \xi_1 f_{0,x} + \xi_{0,t} + \xi_0 f_0,$$

а в случае (c_2) :

$$\xi_1 = \frac{k}{|\mathbf{v}|}, \quad \xi_0 = \frac{c}{|\mathbf{v}|} - \frac{kv_{[0,1]}}{|\mathbf{v}|^3} - \frac{\sqrt{3}}{v_{[0,0]}} \sqrt{v_{[1,1]} - \frac{v_{[0,1]}^2}{v_{[0,0]}} + v_{[0,1]}}, \quad k^2 = -3,$$

и f_0 – квадратичная по переменным второго порядка функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\xi_{0,3x} + (\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2 \xi_{0,x} + \frac{1}{2} [(\xi_1 \mathbf{v}_1 + \xi_0 \mathbf{v})^2]_x \xi_0 = \xi_1 f_{0,x} + \xi_{0,t} + \xi_0 f_0.$$

В качестве заключения отметим, что наряду с (3) существуют дифференциальные подстановки и другого типа. Такие подстановки иногда называют преобразованиями Беклунда – в отличие от авто-преобразований Беклунда, позволяющих выражать одно решение уравнения через другое, они связывают решения двух различных уравнений. В частности, известна следующая формула:

$$p_x + q_x = -\frac{1}{6}(2q - p)^2,$$

связывающая решения $p(x, t)$ и $q(x, t)$ уравнений Савада–Котеры и Каупа–Купершмидта в потенциальной форме

$$p_t = p_{xxxxx} + 5p_x p_{xxx} + \frac{5}{3} p_x^3, \quad q_t = q_{xxxxx} + 10q_x q_{xxx} + \frac{15}{2} q_{xx}^2 + \frac{20}{3} q_x^3.$$

В качестве примера приведем полученное автором преобразование Беклунда для систем интегрируемых уравнений

$$\begin{aligned} 3(p_x + q_x + P_x)^2 + 2(2p - q)^2(p + q + P) &= 0, \\ (3P_{xx} + (2p - q - P)P + 3Q)^2 + 6P_x^2(p + q + P) &= 0, \end{aligned}$$

где $\{P(x, t), p(x, t)\}$ и $\{Q(x, t), q(x, t)\}$ – решения двуполевых обобщений уравнения КдФ – систем Ито–Дринфельда–Соколова–Вильсона:

$$\begin{aligned} P_t &= P_{xxx} + 2P_x p + P p_x, & p_t &= \frac{1}{3} P P_x; \\ Q_t &= Q_{xxx} + Q_x q + Q q_x, & q_t &= Q_x. \end{aligned}$$

Таким образом, дальнейшим направлением в изучении дифференциальных подстановок для (1) и (2) может стать рассмотрение преобразований вида

$$\mathbf{u}_k = \sum_{i=0}^m \xi_i \mathbf{v}_i,$$

где ξ_i зависят от всевозможных скалярных произведений векторов $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r, \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\}$, $\mathbf{u}$ – решение (1) или (2), а $\mathbf{v}$ – решение (4).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, “Векторно-матричные обобщения классических интегрируемых уравнений”, *ТМФ*, **100:2** (1994), 214–218.
- [2] С. И. Свинолупов, В. В. Соколов, Р. И. Ямилов, “Преобразования Беклунда для интегрируемых эволюционных уравнений”, *Докл. АН СССР*, **271:4** (1983), 802–805.
- [3] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, “Интегрируемые эволюционные уравнения с постоянной сепарантой”, *Уфимск. матем. журн.*, **4:3** (2012), 104–154.
- [4] М. Ю. Балахнёв, “Интегрируемые векторные изотропные уравнения, допускающие дифференциальные подстановки первого порядка”, *Матем. заметки*, **94:3** (2013), 323–330.
- [5] M. Ju. Balakhnev, A. G. Meshkov, “Two-Field Integrable Evolutionary Systems of the Third Order and Their Differential Substitutions”, *SIGMA*, **4** (2008), 018, 29 pp.
- [6] A. G. Meshkov, V. V. Sokolov, “Integrable evolution equations on the N -dimensional sphere”, *Commun. Math. Phys.*, **232** (2002), 1–18.
- [7] А. Г. Мешков, В. В. Соколов, “Классификация интегрируемых дивергентных N -компонентных эволюционных систем”, *ТМФ*, **139:2** (2004), 192–208.
- [8] М. Ю. Балахнёв, “Об одном классе интегрируемых эволюционных векторных уравнений”, *ТМФ*, **142:1** (2005), 13–20.
- [9] M. Ju. Balakhnev, A. G. Meshkov, “On a classification of integrable vectorial evolutionary equations”, *J. Nonlinear Math. Phys.*, **15:2** (2008), 212–226.

М. Ю. Балахнёв

Орловский государственный университет

E-mail: balakhnev@yandex.ru

Поступило

12.09.2013

Исправленный вариант

16.01.2015